

## К ИССЛЕДОВАНИЮ НАПРЯЖЕННО- ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Н. М. Якупов, Х.Г. Киямов, И.Х. Киямов

yzsrr@kfti.knc.ru

Отмечаются некоторые положения подхода моделирования трехмерных элементов конструкций сложной геометрии, базирующегося на идеях параметризации рассматриваемой области параметрами единичного куба и метода конечных элементов с аппроксимацией искомым переменных интерполяционными эрмитовыми кубическими сплайнами трех переменных. Рассматривается пример определения напряженно-деформированного состояния балки в виде крюка.

**Введение.** В работах [1-4] изложен эффективный метод расчета тонкостенных оболочечных конструкций, имеющих сложную геометрию – сплайновый вариант метода конечных элементов. Благодаря синтезу идеи параметризации и метода конечных элементов с аппроксимацией переменных интерполяционными эрмитовыми бикубическими сплайнами удается получать пространственно искривленные согласованные двумерные конечные элементы. Метод развит для определения напряженно-деформированного состояния элементов конструкций в трехмерной постановке [5]. Он позволяет исследовать также напряженно - деформированное состояние оболочек сложной геометрии, особенно те их области, где оболочечные гипотезы не могут дать достоверные результаты, например, области пересечения оболочек, зон приложения сосредоточенных нагрузок и точечного крепления и т.д.

**Некоторые положения метода.** Как и для двумерного случая [1-4], на первом этапе решается задача параметризации. На рис.1а представлен фрагмент односвязной трехмерной области сложной геометрии, состоящий из 6 граней сложной формы и 12 криволинейных ребер. Трехмерный объект сложной геометрии,

занимаемый объем  $V$ , задается криволинейными координатами  $t^1, t^2, t^3$  единичного куба  $V_\Phi$  (рис.1б) таким образом, чтобы прямоугольной сетке в области  $V_\Phi$  соответствовала криволинейная пространственная сетка  $V$ :

$$\bar{r} = \bar{r}(t^1, t^2, t^3). \quad (1)$$

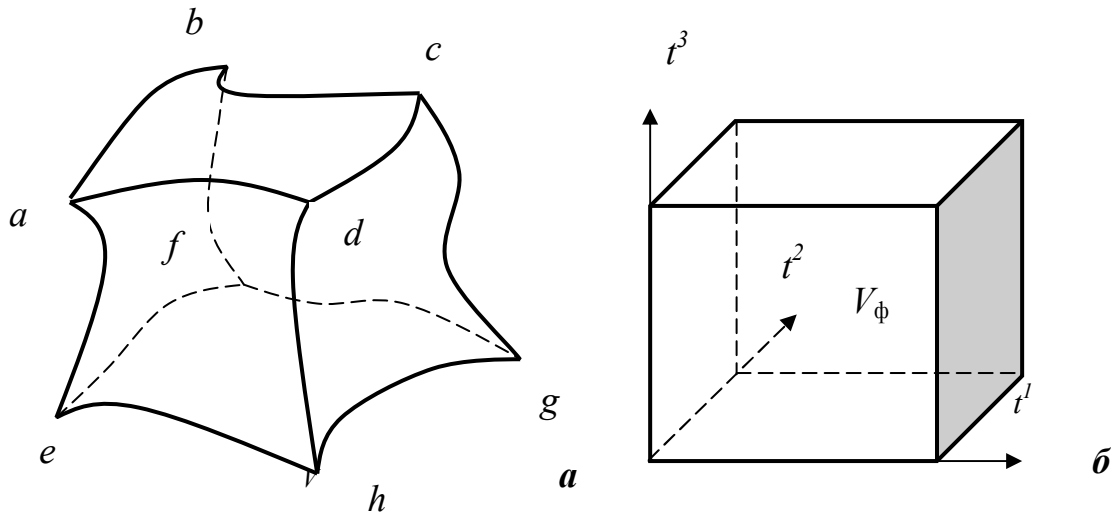


Рис.1. Параметризация трехмерного тела сложной геометрии

Задача параметризации трехмерной области сложной геометрии представляет собой самостоятельную сложную задачу. Для решения задачи, по аналогии с параметризацией двумерной области [6], развивается экспериментальный подход: изготовление каркаса с двенадцатью формообразующими ребрами, на который натягивают трехмерную сеть из эластичного материала, замеряют координаты узловых точек и выполняют обработку полученных результатов с определением компонент метрики рассматриваемой области.

Разрешающие соотношения получаются из вариационного уравнения Лагранжа:

$$\delta \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 W \sqrt{g} dt^1 dt^2 dt^3 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \rho f^i \delta u_i \sqrt{g} dt^1 dt^2 dt^3 + \int_S p^i \delta u_i dS, \quad (2)$$

где  $W$  – удельная потенциальная энергия деформации трехмерного тела;  $f^i, p^i$  – контравариантные компоненты вектора массовых и

поверхностных сил;  $\rho$  – массовая плотность;  $g$  – определитель матрицы метрического тензора;  $S$  – поверхность боковых граней тела.

Используются геометрические и физические соотношения [7]:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial t^i} + \frac{\partial u_i}{\partial t^j} \right) - \Gamma_{ij}^k u_k \quad (i, j, k = 1, 2, 3), \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^{11} \\ \sigma^{22} \\ \sigma^{33} \\ \sigma^{12} \\ \sigma^{21} \\ \sigma^{23} \end{array} \right\} = \left| \begin{array}{cccccc} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & B_{15} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} & B_{25} & B_{26} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} & B_{35} & B_{36} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} & B_{45} & B_{46} \\ B_{51} & B_{52} & B_{53} & B_{54} & B_{55} & B_{56} \\ B_{61} & B_{62} & B_{63} & B_{64} & B_{65} & B_{66} \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^{11} \\ \varepsilon^{22} \\ \varepsilon^{33} \\ \varepsilon^{12} \\ \varepsilon^{13} \\ \varepsilon^{23} \end{array} \right\}, \quad (4)$$

где  $\varepsilon_{ik}$  – ковариантные компоненты тензора деформации;  $u_i$  – ковариантные компоненты вектора переменных;  $\sigma^{ij}, \varepsilon^{ij}$  – компоненты тензора напряжений и деформации, соответственно;  $B_{ij}$  – параметры, зависящие от характеристик материала и метрики.

Искомые неизвестные  $u, v$  и  $w$  в каждом из конечных элементов представляются в виде эрмитового кубического сплайна трех переменных [5, 8-10]:

$$\begin{aligned} u &= [\psi_1(s^1) \times \psi_2(s^2) \times \psi_3(s^3)] \otimes F_U, \\ v &= [\psi_1(s^1) \times \psi_2(s^2) \times \psi_3(s^3)] \otimes F_V, \\ w &= [\psi_1(s^1) \times \psi_2(s^2) \times \psi_3(s^3)] \otimes F_W, \end{aligned} \quad (5)$$

$$s^1 = \frac{t^1 - t_i^1}{h_i^1}, s^2 = \frac{t^2 - t_j^2}{h_j^2}, s^3 = \frac{t^3 - t_k^3}{h_k^3}, h_i^1 = t^1 - t_i^1, h_j^2 = t^2 - t_j^2, h_k^3 = t^3 - t_k^3,$$

где  $\psi_1, \psi_2$  и  $\psi_3$  – векторы координатных функций по трем соответствующим координатным линиям,  $F_U, F_V, F_W$  – трехмерные матрицы компонент искомых неизвестных  $u, v, w$  и его производных.

Подставляя вариации перемещений и деформаций, учитывая независимость узловых перемещений и их производных, после ряда преобразований получается система 24Ф алгебраических уравнений

$$[A] \{U\} = \{R\}, \quad (6)$$

где  $[A]$  – симметричная матрица жесткости системы ленточной структуры,  $\{U\}$  – вектор неизвестных,  $\{R\}$  – вектор нагрузки,  $\Phi$  – суммарное число узлов в рассматриваемом трехмерном объекте.

Ниже приведены некоторые результаты расчета напряженно-деформированного состояния изогнутой балки в виде крюка разработанными трехмерными элементами.

**Изогнутая балка в виде крюка.** Рассматривается искривленная балка в виде крюка с поперечным сечением 20 мм на 20 мм. Схема балки представлена на рис 2, а сечение приложения нагрузок – на рис.3.

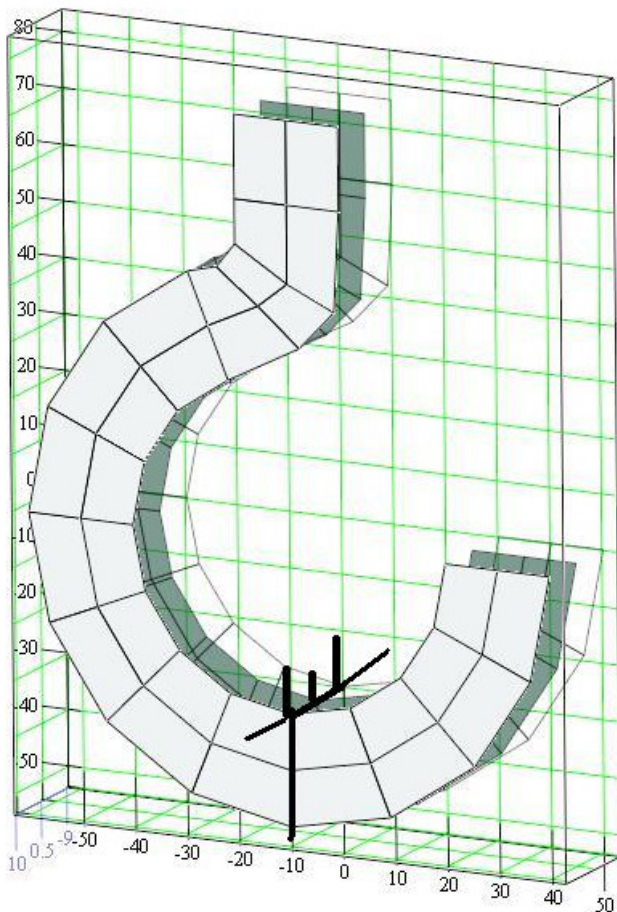


Рис.2. Искривленная балка

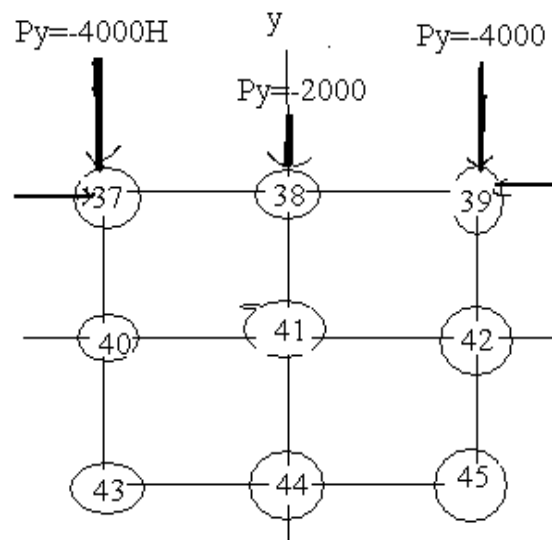


Рис.3. Поперечное сечение приложения сил

По верхней грани балка точно в узлах сетки закреплена. Балка разбита на 60 элементов: 15 – вдоль направления  $t^1$ , 2 – вдоль  $t^2$  и 2 – по толщине  $t^3$ . Модуль упругости материала балки  $E = 100000$  МПа.

На рисунке (рис.4) представлено распределение интенсивности напряжений (линии равных уровней) на поверхности симметрии  $z = 0$ . Из рис.4 наглядно видны области концентрации напряжений – наиболее опасные сечения.

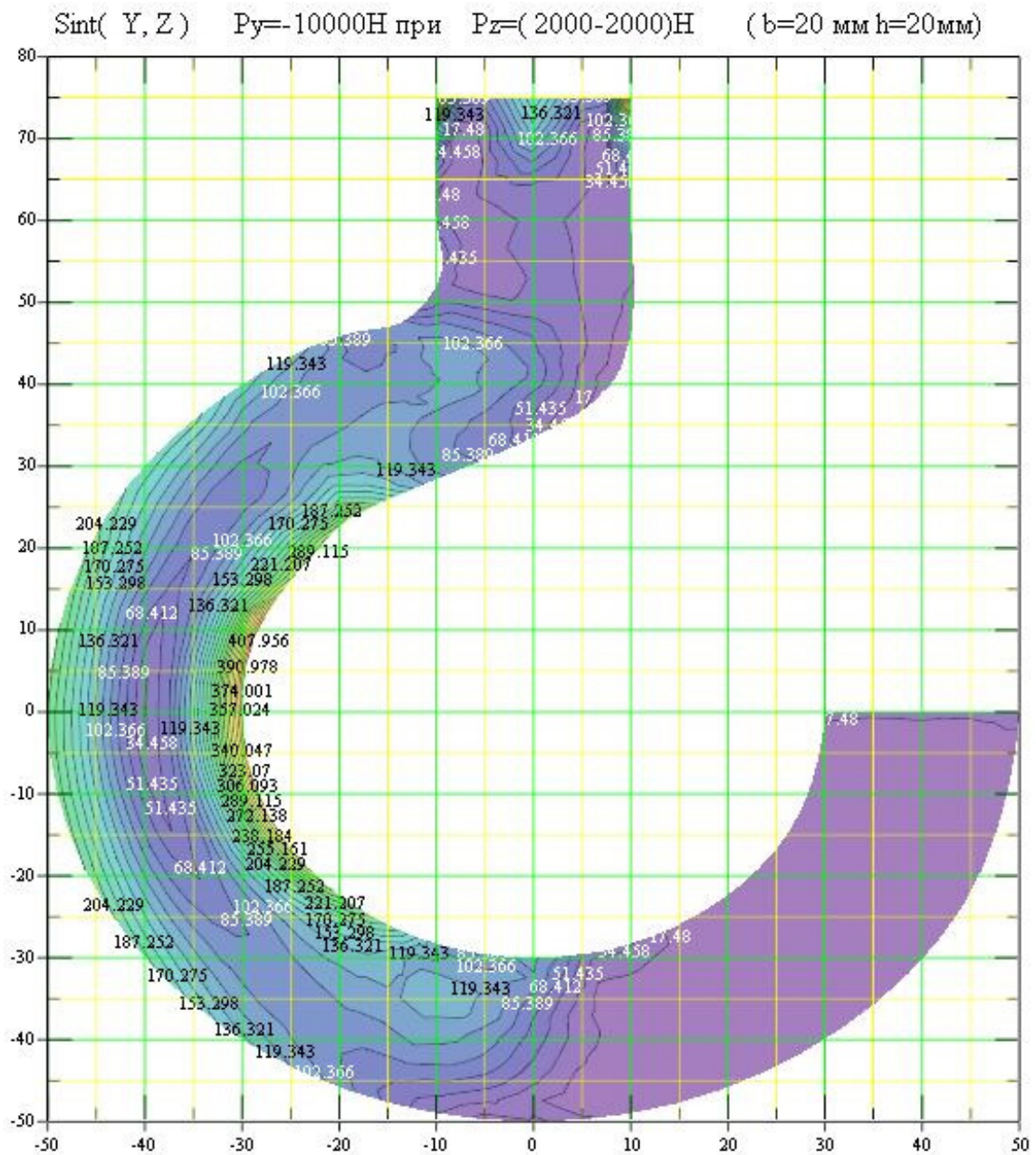


Рис.4. Распределение интенсивности напряжений  $\sigma_i$ ,  $\text{H}/\text{mm}^2$

**Заключение.** Моделирование элементов конструкций трехмерными конечными элементами позволяет определять

пространственное распределение напряженно - деформированного состояния элементов конструкций сложной геометрии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Якупов Н.М.* Об одном методе расчета оболочек сложной геометрии // Исследования по теории оболочек. Труды семинара. Казань: КФТИ КФАН СССР, 1984. Вып.17. Часть II. С.4-17.
2. *Корнишин М.С., Якупов Н.М.* Сплайновый вариант метода конечных элементов для расчета оболочек сложной геометрии // Прикладная механика. 1987. Т.23. №3. С.38-44.
3. *Якупов Н.М., Серазутдинов М.Н.* Расчет упругих тонкостенных конструкций сложной геометрии. ИММ РАН. Казань, 1993. 207 с.
4. *Якупов Н.М.* Прикладные задачи механики упругих тонкостенных конструкций. ИММ КНЦ РАН, Казань, 1994. 124 с.
5. *Якупов Н.М., Киямов Х.Г., Якупов С.Н., Киямов И.Х.* Моделирование элементов конструкций сложной геометрии трехмерными конечными элементами // Механика композиционных материалов и конструкций, 2011. №1. С.145-154.
6. *Якупов Н.М., Нуруллин Р.Г., Якупов С.Н., Мифтахутдинов И.Х., Киямов Х.Г.* Экспериментальный способ параметризации минимальных поверхностей со сложным контуром // Патент на изобретение РФ №2374697.
7. *Демидов С.П.* Теория упругости. М.: Высшая школа, 1979. 432 с.
8. *Якупов Н.М., Киямов Х.Г., Галявиев Ш.Ш., Хисамов Р.З.* Методы и подходы исследования напряженно-деформированного состояния конструкций сложной геометрии // Строительство. Известия ВУЗов. №8 (524), 2002. С.14-18.
9. *Якупов Н.М., Киямов Х.Г.* К расчету двумерных и трехмерных элементов конструкций сложной геометрии // Труды Международной научно-практической конференции «Инженерные системы - 2009». М.: РУДН, 2009. Т.II. С.355-361.
10. *Якупов Н.М., Киямов Х.Г.* Моделирование тонкостенных элементов конструкции // Современные проблемы механики сплошной среды. Тезисы докладов XIV Международной конференции, Ростов-на-Дону, Азов. Ростов на/Дону. Изд-во ЮФУ, 2010. С.88-89.