УДК 517.977

О НЕКОТОРЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ ПО УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРЕКЛЮЧАЕМЫХ И ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ

С.Н.Васильев, А.И.Маликов
snv@mail.ru, malikov@au.kstu-kai.ru

Исследование свойств устойчивости переключаемых и гибридных систем дает начало многим интересным математическим и инженерным проблемам. Цель этой статьи состоит в том, чтобы обсудить некоторые из этих проблем, рассмотреть успехи, достигнутые в решении этих проблем в научных сообществах, и рассмотреть некоторые проблемы, которые остаются открытыми. Обзор начинается с упоминания ранних работ, в которых зарождались истоки современной теории устойчивости и стабилизации переключаемых и гибридных систем. Далее приводятся результаты по применению и развитию методов Ляпунова для линейных переключаемых систем. Обсуждается связь проблемы устойчивости переключаемых линейных систем с проблемой робастной устойчивости линейных систем с неопределенностями матриц, задаваемых многогранными множествами, и с проблемой устойчивости линейных дифференциальных включений. В частности, представлены результаты по общим квадратичным функциям Ляпунова, кусочно-квадратичным и кусочно-линейным функциям Ляпунова, поскольку они позволяют доказать устойчивость и показать существенные успехи в их конструктивном построении. Кратко представлены результаты по обращению теоремы Ляпунова для переключаемых систем. Также рассматриваются критерии устойчивости для систем с ограничениями на правила переключений, применение различных модификаций метода с кусочно-линейными, кусочно-квадратичными, полиномиальными функциями Ляпунова и линейных матричных неравенств. Отдельное внимание уделяется развитию и применению методов матричных систем сравнения и модельных преобразований для анализа устойчивости и оценивания состояния нелинейных гибридных систем.

Введение

Многие прикладные проблемы приводят к исследованию систем с переключениями. Переключаемую систему можно представлять как многорежимную динамическую систему, с законом переключения режимов, определяющим интервалы «жизни» (интервалы «активности») каждого режима. При этом естественно как-то ограничить частоту переключений, обычно конечное число переключений на конечном интервале времени. Под гибридной системой будем понимать систему, процессы в которой имеют несколько уровней разнородного описания, а состояние содержит как непрерывные, так и дискретные компоненты. Системы этого вида широко встречаются в прикладных проблемах управления механическими, электроэнергетическими системами, в управлении летательными аппаратами, технологическими процессами, трафиком в компьютерных сетях и во многих других областях. Структурные изменения в процессе функционирования, многорежимность, разнородность описания процессов являются особенностью многих технических систем. С другой стороны, основанные на событиях и логических правилах организации переключений между различными управляющими устройствами методы интеллектного, интеллектуального управления интенсивно развиваются и применяются в различных областях благодаря достижениям в информатике и компьютерной технике [12-14]. Кроме того, существует большой класс систем, которые могут быть стабилизированы, переключая законы управления, но не могут быть стабилизированы никаким (т.е. одним непрерывным) статическим законом управления с обратной связью по состоянию. Этим объясняется все возрастающий за последние годы интерес к исследованию таких систем специалистов разного профиля. Поэтому гибридные системы становятся междисциплинарной областью исследований, относящейся к математике, теории управления, информатике и области, именуемой искусственным интеллектом.

В литературе различают, во-первых, системы, в которых переключения производятся под действием влияния внешней среды, сбоев, отказов элементов, подсистем (скачкообразное изменение параметров и структуры как объекта, так и обратной связи) – их называют системами со структурными изменениями (возмущениями или управлениями). Во-вторых, системы, для которых структурные изменения (переключения управления) имеются только в контуре обратной связи – они называются системами с переменной структурой (СПС). Кроме того, обычно выделяют класс систем, в которых скачкообразно изменяется состояние – их называют импульсивными системами (impulsive systems, impulsive differential equation и т.п.), правда сами воздействия в русско-язычной литературе именуют импульсными). Все они, а также их комбинации, относятся к классу гибридных систем потому, что их эволюция происходит в непрерывно-дискретном времени, а динамика их состояния характеризуется интервалами непрерывности и скачкообразным их изменением в некоторые (дискретные) моменты времени.

Системы с переключениями привлекали внимание исследователей начиная с 50-х годов прошлого столетия. Прообразом таких систем явились обычные релейные системы и системы с изменениями параметров. Дифференциальные уравнения, чьи параметры изменяются во времени, были предметом интенсивного исследования нескольких научных школ большей части прошлого столетия. В монографии Е.А.Барбашина [2] системами с переменной структурой называются системы, работа которых основана на принципе скачкообразного изменения параметров обратной связи (регулятора). В частности в [2] отмечается, что фундаментальные результаты по теории таких систем принадлежат I. F1ugge-Lotz J [111], Ю.В.Долголенко [22], Ю.И.Неймарку [57]. На ряд преимуществ, которыми обладают системы с изменяемым коэффициентом усиления, обращал внимание в 1957 г. А. М. Летов [36]. Исследования по теории устойчивости систем с переменной структурой проводились в 50-х годах под руководством Е. А. Барбашина и С. В. Емельянова. В результатах 60-х годов С.В. Емельянова и его учеников в разрабатываемой теории систем автоматического управления с переменной структурой (СПС) [23-26] делается акцент на преднамеренном использовании скользящих режимов. Именно в таком варианте достигается полная независимость (инвариантность) уравнений движения от факторов неопределённости (возмущений параметров и внешних сил). В теории СПС эффективно решались актуальные задачи теории управления, в том числе: стабилизация сильно неопределённой системы; построение астатической системы слежения произвольного порядка; основные задачи теории инвариантности; задачи управления при различного рода ограничениях, задачи идентификации параметров динамических систем и др.

Наиболее ранние работы, посвященные моделированию и исследованию систем с толчками, импульсными воздействиями, являются работы В.Д.Мильмана, А.Д.Мышкиса, А.М.Самойленко [53,55]. В дальнейшем эти системы изучались многими авторами. Интересующиеся могут обратиться к источникам [20,28,56] и ссылкам в них.

Теория импульсивных дифференциальных уравнений развита в монографиях А.М. Самойленко, Н.А.Перестюка, [62], D.D. Bainov, P.S. Simenov [77], D.D.Bainov, V.Lakshmikantham, P.S.Simenov [76].

Предметом данного обзора будут являться методы анализа устойчивости систем с переключениями и гибридных систем. Моделями таких систем являются системы дифференциальных или разностных уравнений с переключениями правых частей. В англоязычной литературе их называют переключаемыми (switched) или гибридными (hybrid) системами. Обычно переключаемыми называют системы, динамические характеристики и/или управляющие воздействия которых изменяются (или переключаются) по определенному правилу. Под переключаемой системой понимают многорежимную динамическую систему, состоящую из семейства непрерывных (или дискретных) по времени подсистем и правила, которое управляет переключениями режимов. Это правило задается с помощью условий в виде ограничений по времени, по состоянию, в виде последовательности событий, в логической форме с установлением условия переключения на основе логического вывода. Процессы в таких системах имеют два уровня описания. На нижнем уровне они представляются дифференциальными или разностными уравнениями (в каждом режиме), а на верхнем уроне – дискретным процессом переключения режимов. Поэтому такие системы также называют гибридными. Гибридная система, в которой правило переключения задается в логической форме, а вектор состояния наряду с обычными переменными содержит логические переменные, описываемые логическим автоматом, или алгоритмом логического вывода, принято называть логико-динамическими. Разумеется, в литературе используются и более общие описания динамических систем, в частности, в аксиоматической форме (назовем, например, концепции систем «вход-выход» Месаровича, полисистем Башо, функционирующих систем [48]), или гетерогенные системы, представленные моделями в виде логико-дифференциальных операторных уравнений. Но это выходит за рамки данной статьи.

Первый математический вопрос, возникающий в теории гибридных систем с переключениями векторных полей ОДУ, это понятие решения задачи Коши, вопросы существования, единственности и продолжимости решений. Ответом на них явилась развитая А.Ф.Филипповым теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью [50, 96] и теория дифференциальных уравнений и неравенств типа Чаплыгина-Важевского в различных классах обобщенных решений и решений Каратеодори [30, 47].

Проблеме устойчивости систем с переключениями посвящено множество работ, и авторы не надеются охватить их все в данном обзоре. Кроме указанных выше наиболее ранние работы по моделям гибридных (переключаемых) систем выполнены O.Perron [162], В.Д.Майзель [37], G.R.Sell [176], H. Witsenhausen [201], К.Д. Жуком, А.А. Тимченко [27], F. Cellier и др. [95], L. Tavernini [191], А.А.Мартынюком [43-45], А.Ф.Филипповым [63] и др. Эти исследования активизировались начиная с 90-х годов (смотри обзоры R. DeCarlo и др. [103], A.Michel [154], U.Bouscan [86], H.Lin, P.Antsaklis [144], R. Shorten и др. [184], К.Ю. Котов, О.Я. Шпилевская [34], I.L.D.Santos, G.N.Silva [174] и ссылки в них).

Непрерывная нелинейная система с переключениями может быть представлена моделью вида

$$\dot{x}(t) = f_i\big(x(t), u(t)\big),\ t \in \mathbb{R}^+, \tag{1}$$

где состояние $x \in \mathbb{R}^n$, $i \in \mathcal{L} = \{1, \cdots, N\}$, управление $u \in \mathbb{R}^m$, $t \in \mathbb{R}^+ = \{t \in R^1, t \geq 0\}$, конечное множество $\mathcal{L}$ – есть множество индексов, обозначающих семейство дискретных режимов. Точно так же можно представить дискретную систему с переключениями как семейство разностных уравнений

$$x(k+1) = f_i(x(k), u(k)),\ \ k \in \mathbb{Z}^+,\ \ i \in \mathcal{L}, \tag{2}$$

где $\mathbb{Z}^+$ обозначает множество всех неотрицательных целых чисел.

Логическое правило, которое управляет переключением режимов, генерирует переключающие сигналы, которые обычно описываются как классы кусочно-постоянных отображений, $\sigma\colon \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}$ (или задаются последовательностью $\sigma\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathcal{L}$). Индекс $i = \sigma(t)$ – номер активного режима в момент времени t. Вообще, активный режим в момент t может зависеть не только от момента времени t, но также и от текущего состояния $x(t)$ и/или от истории активации режимов $\sigma(\tau)$ для $\tau < t$. Соответственно, логика переключений обычно классифицируется как управляемая по времени (зависит только от времени t), по позиции (зависит от позиции $(t, x(t))$), и как имеющая память (т.е. от истории активации режимов).

Требуя, чтобы переключающий сигнал был кусочно-постоянным, мы подразумеваем, что у $\sigma(t)$ есть конечное число разрывов на любом конечном интервале из $\mathbb{R}^+$. Содержательно это соответствует требованию отсутствия высокочастотных переключений.

Наиболее изученными к настоящему времени являются переключения непрерывных (дифференциальных) линейных инвариантных по времени систем (ЛИВ-систем) вида

$$\dot{x}(t) = A_i x(t),\ t \in \mathbb{R}^+,\ \ i \in \mathcal{L} \tag{3}$$

или дискретных (разностных) ЛИВ-систем вида

$$x(k+1) = A_i x(k),\ \ k \in \mathbb{Z}^+,\ \ \ i \in \mathcal{L} \tag{4}$$

где состояние $x \in \mathbb{R}^n$ и $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ для всех $i \in \mathcal{L}$.

Усилия в исследовании систем с переключениями обычно направлены на анализ динамических свойств, таких как устойчивость [1,3-4,46, 82,103,108,112,121,123,127,140,141, 85,205], стабилизируемость, управляемость, достижимость [9,58,79,128,129,164,186-189], наблюдаемость [79,105,106,124], на верификацию [87,190,194], на способы синтеза регуляторов с гарантируемой устойчивостью и качеством [73,80,121, 128,130,163,188,202], на оптимальное управление [5-6,94,171,203, 209].

В данном обзоре мы кратко остановимся в основном на проблемах устойчивости для переключаемых и гибридных систем. Сначала рассмотрим переключения ЛИВ-систем. Пусть начало координат $x = 0$ является равновесием для систем (3) и (4), а задача состоит в получении условий устойчивости.

ЛИВ-системы с переключениями обнаруживают несколько интересных явлений. Известно, например, что даже когда все режимы экспоненциально устойчивы, при их переключении у системы может быть не только неустойчивость, но и неограниченные решения [89,139]. Другой факт (но позитивного толка) – то, что переключениями неустойчивых режимов можно добиться экспоненциальной устойчивости ЛИВ-системы [89,103,139]. Эти примеры показывают, что устойчивость систем с переключениями зависит не только от динамики системы в каждом режиме, но также и от переключаемых сигналов. Поэтому исследование устойчивости систем с переключениями может быть примерно разделено на два класса проблем. Первый -

анализ устойчивости при произвольных переключениях, второй – анализ устойчивости с ограничениями на переключающие сигналы (медленные переключения – с ограничением на время активности каждого режима, зависимые от состояния переключения). Разумеется, во втором случае законы переключения могут носить не только характер возмущений, но и управлений.

1. Анализ устойчивости при произвольных переключениях

Известные примеры, демонстрирующие, что путем переключения устойчивых режимов можно породить неустойчивость переключаемой системы показывают, что предположение об устойчивости всех отдельных режимов недостаточно для устойчивости системы с произвольными переключениями. Исключениями являются особые случаи: A_i являются коммутируемыми парами ($A_i A_j = A_j A_i$ для всех $i, j \in \mathcal{L}$) [160,206]; A_i – симметричные ($A_i = A_i^T$ для всех i) [109], A_i – нормальные ($A_i A_i^T = A_i^T A_i$ для всех i) [208]. С другой стороны, если существует общая функция Ляпунова (ФЛ) для всех подсистем, то устойчивость системы гарантируется при произвольных переключениях.

1.1. Общие квадратичные функции Ляпунова

Существование общей квадратичной функции Ляпунова (ОКФЛ) для всех режимов гарантирует квадратичную устойчивость системы с переключениями [120]. Известно, что условия существования ОКФЛ могут быть выражены в виде линейных матричных неравенств (ЛМН) [88]. А именно, существует положительно определенная симметрическая матрица $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ такая, что выполняются одновременно неравенства

$$PA_i + A_i^T P < 0,\ \forall i \in \mathcal{L},$$

для непрерывного случая или

$$A_i^T P A_i - P < 0,\quad \forall i \in \mathcal{L},$$

для дискретного случая. Однако, стандартные методы внутренней точки для ЛМН могут стать неэффективными, когда увеличивается число режимов. В [142] был предложен интерактивный градиентный алгоритм, который может сходиться к ОКФЛ за конечное число шагов. Кроме того, авторы показали, что норма сходимости может быть улучшена, вводя немного случайности.

Не смотря на то, что численные методы для решения ЛМН для конечного числа устойчивых ЛИВ-систем были разработаны, получение алгебраических условий (на системные матрицы) для существования ОКФЛ остается привлекательной задачей [139,140].

В [181,182] R.Shorten и K.Narendra рассматривали ЛИВ-системы второго порядка с двумя режимами; они предложили необходимое и достаточное условие для существования ОКФЛ. Результаты в [181,182] были основаны на устойчивости пучка матриц, сформированного парой системных матриц. Пусть даны две матрицы A_1 и A_2, пучок матриц $\gamma_\alpha(A_1, A_2)$ определяется как однопараметрическое семейство матриц $\gamma_\alpha(A_1 A_2) = \alpha A_1 + (1-\alpha)A_2,\ \alpha \in [0,1]$. Пучок матриц $\gamma_\alpha(A_1, A_2)$ является гурвицевым, если его собственные значения находятся в открытой левой полуплоскости при всех $0 \leq \alpha \leq 1$. Формально результаты, полученные для пары ЛИВ-систем второго порядка в [181,182] могут быть суммированы в итоге следующей теоремой.

Теорема 1 [181,182]. Пусть A_1, A_2 есть две гурвицевы матрицы в $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Следующие условия эквивалентны

1) существует ОКФЛ для (3) с двумя режимами A_1, A_2;
2) пучки матриц $\gamma_\alpha(A_1, A_2)$ и $\gamma_\alpha(A_1, A_2^{-1})$ являются гурвицевыми;
3) у матриц $A_1 A_2$ и $A_1 A_2^{-1}$ нет никаких отрицательных реальных собственных значений.

Обобщить данное алгебраическое условие на системы более высокой размерности оказывается трудной задачей. В [183] необходимые и достаточные алгебраические условия были получены для не существования ОКФЛ для систем с произвольными переключениями, составленных из пары ЛИВ-систем третьего порядка. Для пары ЛИВ-систем n-го порядка необходимое условие для существования ОКФЛ было получено в [180,183].

Теорема 2. [180,183] Пусть A_1, A_2 – две гурвицевы матрицы в $\mathbb{R}^{n\times n}$. Необходимое условие для существования ОКФЛ то, что у матричных произведений $A_1[\alpha A_1 + (1-\alpha)A_2]$ и $A_1[\alpha A_1 + (1-\alpha)A_2]^{-1}$ нет отрицательных реальных собственных значений при всех $0 \leq \alpha \leq 1$.

Как особый случай рассматривается переключения ЛИВ-системы с двумя режимами с матрицами, разность которых есть матрица ранга один. Следующее необходимое и достаточное условие для существования ОКФЛ было получено в [180].

Теорема 3. [180] Пусть A_1, A_2 – две гурвицевы матрицы в $\mathbb{R}^{n\times n}$ с $rank(A_1 - A_2) = 1$. Необходимое и достаточное условие для существования ОКФЛ для системы (3) с двумя режимами с матрицами A_1, A_2 состоит в том, что у произведения матриц $A_1 A_2$ нет никаких отрицательных реальных собственных значений. Эквивалентно, матрица $A_1 + \gamma A_2$ не сингулярная для всех $\gamma \in [0, +\infty)$.

Пока, наше обсуждение о существовании ОКФЛ было ограничено ЛИВ-системами с переключениями только между двумя режимами. Однако, вообще, система с переключениями может содержать больше чем два режима. Очевидно, необходимое условие для существования ОКФЛ для системы с переключениями состоит в том, что каждая пара ее режимов совместно использует ОКФЛ. Фактически, существование ОКФЛ для каждой пары режимов может также повлечь существование ОКФЛ для системы с переключениями в определенных особых случаях, например, позитивные системы второго порядка [117]. К сожалению, это не выполняется вообще. Существование ОКФЛ для конечного числа ЛИВ-систем второго порядка было исследовано в [183], и интересно заметить, что необходимое и достаточное условие для существования ОКФЛ состоит в том, что ОКФЛ существует для каждого семейства из 3-х ЛИВ-систем.

Недавно в [134] тензорное условие было получено как необходимое условие для существования ОКФЛ для общего случая, то есть для системы с переключениями, состоящей из конечного числа ЛИВ-систем n-го порядка. Было показано, что тензорное условие является необходимым и достаточным, когда система с переключениями только содержит пару режимов. Однако для общего случая систем, имеющих большее число режимов более высокого порядка, необходимые и достаточные условия для существования ОКФЛ все еще не получены, и это остается открытой проблемой.

Альтернативный подход предложили в D.Liberzon, J.P.Hespanha и A.S.Morse [140] для ЛИВ-систем с переключениями. Они показали, что если алгебра Ли, сгенерированная множеством системных матриц A_i разрешима, то существует ОКФЛ, и ЛИВ-система устойчива при произвольных переключениях. Ли алгебраические условия были также расширены на нелинейные системы с переключениями [67,140], чтобы получить локальные результаты устойчивости, основанные на первом методе Ляпунова. В дальнейшем, свойство глобальной устойчивости переключаемых нелинейных систем было изучено в [151] и Ли алгебраический критерий глобальной устойчивости, основанный на скобках Ли нелинейных векторных полей, был получен. Интересующиеся могут обратиться к [139,140,151] для подробного рассмотрения этих условий.

1.2. Переключаемые квадратичные функции Ляпунова

Есть примеры [139] систем, которые не имеют ОКФЛ, но экспоненциально устойчивы при произвольном переключении. Вообще, существование ОКФЛ только достаточно для асимптотической устойчивости ЛИВ-систем с произвольными переключениями, и могут быть довольно консервативными. С целью ослабления условий, основанных на ОКФЛ, в [98,99,107,152] предложено использовать класс переключаемых квадратичных функций Ляпунова (КФЛ). Поскольку в каждом i-м режиме ЛИВ-система устойчива, то существует положительно определенная симметрическая матрица P_i, которая может быть найдена как решение алгебраического матричного уравнения Ляпунова для каждой i-й подсистемы $(i \in \mathcal{L})$. Затем матрицы P_i стыкуются вместе в соответствии с переключающим сигналом $\sigma(t)$ чтобы создать глобальную ФЛ вида

$$V\big(k, x(k)\big) = x^T(k) P_{\sigma(k)} x(k) \tag{5}$$

Тогда устойчивость ЛИВ-системы (4) с произвольными переключениями может быть сведена к разрешимости задачи с линейными матричными неравенствами (ЛМН) [88]. Для иллюстрации приведем один результат из [107].

Теорема 4. Если существуют положительно определенные симметрические матрицы $P_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(P_i = P_i^T)$ и матрицы F_i, G_i $\in R^{n\times n}$ ($i \in \mathcal{L}$), удовлетворяющие ЛМН

$$\begin{bmatrix} A_i F_i^T + F_i A_i^T - P_i & A_i G_i - F_i \\ G_i^T A_i^T - F_i^T & P_j - G_i - G_i^T \end{bmatrix} < 0 \tag{6}$$

для всех $i, j \in \mathcal{L}$, тогда ЛИВ-система с переключениями (4) асимптотически устойчива.

При определенном выборе вспомогательных матриц F_i и G_i ЛМН (6) в теореме 4 могут быть заменены на ЛМН

$$\begin{bmatrix} P_i & A_i^T P_j \\ P_j A_i & P_j \end{bmatrix} > 0 \tag{7}$$

или [99] на ЛМН

$$\begin{bmatrix} -P_i & A_i G_i \\ G_i^T A_i^T & P_j - G_i - G_i^T \end{bmatrix} < 0. \tag{8}$$

Когда $P_i = P_j$ для всех $i, j \in \mathcal{L}$, то переключаемая КФЛ становится ОКФЛ. Поэтому критерии устойчивости, основанные на переключаемых КФЛ, обобщают подход ОКФЛ и обычно дают менее консервативные результаты. Однако, стоит отметить, что метод с переключаемыми КФЛ также дает только достаточное условие.

1.3. Матричные системы сравнения

Предположение о произвольности переключающих сигналов эквивалентно тому, что кусочно-постоянная функция $i(k)$ не известна, а все ее значения возможны в любой момент времени. Пусть переключающий сигнал для дискретной системы (4) генерирует логический автомат. Очевидно, условия устойчивости решения x=0 системы (4) будут определяться динамикой логической части, которая в свою очередь зависит как от выбранного начального состояния x_0, так и от текущего состояния $x(k)$. Здесь условия устойчивости будут представлены как для случая всего множества вариантов решений, принимаемых на логическом уровне (без каких либо ограничений на динамику функционирования автомата), так и при некоторых предположениях о характере поведения логической части. Такие условия будут полезны, когда неопределенным является описание логической части при наличии априорной информации о возможном ее поведении (известен граф функционирования автомата).

Данная задача рассматривалась в [38], где были получены условия асимптотической устойчивости в виде разрешимости взаимосвязанной системы алгебраических матричных уравнений Ляпунова. Здесь аналогичные условия получены с помощью матричных систем сравнения [61]. Кроме того, с помощью матричной системы сравнения [39-41] здесь будут получены эллипсоидальные оценки множества решений для заданных вариантов переключений в фиксированные моменты времени.

Определим функцию $\mu(k)=[\mu_1(k),...,\mu_N(k)]^T$ с компонентами

$$\mu_i(k)=\begin{cases}1 \text{ если система находится в } i\text{ - м режиме} \\ 0 \qquad \text{в противном случае}\end{cases} \quad i\in\mathcal{L}.$$

Тогда система с переключениями (4) может быть представлена в виде

$$x(k+1)=\sum_{i=1}^{N}\mu_i(k)A_i x(k),\ \ k\in E^+, x\in R^n. \tag{9}$$

Возьмем матричную функцию

$$V(k,x(k))=x(k)x^T(k) \tag{10}$$

и вычислим $V(k+1,x(k+1))$ в силу системы (9)

$$V(k+1,x(k+1))=x(k+1)x^T(k+1)=$$

$$=[\sum_{i=1}^{N}\mu_i(k)A_i x(k))][\sum_{i=1}^{N}\mu_i(k)A_i x(k)]^T=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\mu_i(k)A_i x(k)x^T(k)A_i^T=\sum_{i=1}^{N}\mu_i(k)A_i V(k,x(k))A_i^T$$

В результате получили матричную систему сравнения вида

$$Q(k+1)=\sum_{i=1}^{N}\mu_i(k)A_i Q(k)A_i^T, \tag{11}$$

которая для любой наперед заданной реализации функции $\mu(k)$ будет давать точные эллипсоидальные оценки множества решений, начинающихся из заданного эллипсоида, т.е.

$$x(k)\in E(0,Q_{\mu(k)}(k,k_0,Q_0))=\{x;x^T Q_{\mu(k)}^{-1}(k,k_0,Q_0)x\le 1\}, \tag{12}$$

где $Q_{\mu(k)}(k,k_0,Q_0)$ – решение матричной системы сравнения (11) при заданной функции $\mu(k)$ и начальном условии $Q(k_0)=Q_0$ (Q_0 – заданная положительно определенная матрица, определяющая начальный эллипсоид.

Для асимптотической устойчивости достаточно, чтобы для любого $k\ge k_1$ и всех возможных значений $\mu(k)$ имело место неравенство

$$Q(k+1)=\sum_{i=1}^{N}\mu_i(k)A_iQ(k)A_i^T<Q(k) \tag{13}$$

Будем искать решение неравенства (13) в виде

$$Q(k)=Q(\mu(k))=\sum_{j=1}^{N}\mu_j(k)Q_j. \tag{14}$$

В результате неравенство (13) запишется в виде

$$\sum_{i=1}^{N}\mu_i(k)\sum_{j=1}^{N}\mu_j(k)A_iQ_jA_i^T<\sum_{i=1}^{N}\mu_j(k)Q_j. \tag{15}$$

Неравенство (15) можно представить в виде системы линейных матричных неравенств. Достаточные условия асимптотической устойчивости системы (15) при всех вариантах принятия решений на логическом уровне в результате даются следующей теоремой.

Теорема 5. Пусть существуют N симметрических положительно определенных матриц $Q_1,\ldots,Q_N$ такие, что

$$\begin{bmatrix} Q_i & Q_jA_i^T \\ A_iQ_j & Q_j \end{bmatrix}>0 \text{ для любых } (i,j)\in \mathcal{L}\times\mathcal{L}. \tag{16}$$

Тогда исходная система с переключениями асимптотически устойчива.

Отметим, что при выполнении условий теоремы существует КФЛ с переключениями вида

$$v(k,x(k))=x^T(k)\left[\sum_{i=1}^{N}\mu_i(k)Q_i^{-1}\right]x(k),$$

первая разность для которой в силу исходной системы является отрицательно определенной квадратичной формой.

Отметим, что неравенства (16) эквивалентны

$$\begin{bmatrix} P_i & A_i^TP_j \\ P_jA_i & P_j \end{bmatrix}>0 \text{ для любых } (i,j)\in \mathcal{L}\times\mathcal{L}. \tag{17}$$

С использованием леммы о параметризации линейных матричных неравенств справедливо утверждение.

Теорема 6. Пусть существуют N симметрических положительно определенных матриц $Q_1,\ldots,Q_N$ и N матриц $G_1,\ldots,G_N$, удовлетворяющих

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^T - Q_i & G_i^T A_i^T \\ A_i G_i & Q_j \end{bmatrix} > 0, \tag{18}$$

Тогда исходная система с переключениями (4) асимптотически устойчива.

Полученные условия (17), (18) аналогичны условиям (7), (8) для переключаемой КФЛ. Однако с помощью матричной системы сравнения (11) могут быть получены также эллипсоидальные оценки множества решений в виде (12) для каждого заданного варианта последовательности переключений.

Теоремы 5 и 6 дают достаточные условия устойчивости системы с переключениями при любых возможных вариантах принятия решения на логическом уровне. Возникают, однако, следующие вопросы. А что делать, если не удается обеспечить устойчивость системы при любых вариантах поведения логической части системы с переключениями? Возможно ли обеспечить устойчивость хотя бы при некоторых ограничениях на множество возможных решений, принимаемых на логическом уровне? Поэтому в [38] рассмотрена постановка задачи об устойчивости системы с переключениями при наличии некоторых ограничений на поведение ее логической части. К такой же задаче приводит рассмотрение системы с переключениями при наличии некоторой априорной информации о возможном ее поведении в процессе функционирования. Если имеется качественная информация о совместном функционировании логической и непрерывной частей системы, то следовало бы учесть ее при получении условий устойчивости, чтобы смягчить их и тем самым расширить область устойчивости в пространстве параметров.

В связи с этим введем предположение о поведении системы с переключениями в процессе функционирования и рассмотрим, как его учесть при получении условий устойчивости. Пусть задан граф функционирования логической части системы с переключениями в виде (J,M), где J – множество вершин (структурных состояний, режимов), а $M \subseteq J \times J$ – множество дуг (возможных переходов).

Предположение 1. Пусть существуют подмножества $J_1 \subset J$ множества состояний и $M_1 \subset M$ - множества переходов логической части системы такие, что для любого $i, j \in J : (i, j) \in M$ и для любых начальных состояний (x_0, i_0) в логической части системы может реализоваться ограниченное известным числом N_1 общее число раз состояний i и переходов (i,j).

При выполнении предположения 1 оказывается возможным при рассмотрении задачи об устойчивости исключить матричные неравенства, соответствующие тем вершинам и переходам, которые реализуются в системе ограниченное число раз или вообще не реализуются. Для свойства устойчивости системы с переключениями такие режимы и переходы не являются существенными. Поэтому имеет место следующая теорема [38].

Теорема 7. Если для любых $i \in J \setminus J_1$ и для любых $(i, j) \in M \setminus M_1$ система линейных матричных неравенств (17) или (18) имеет решением положительно определенные $(n_i \times n_i)$ матрицы Q_i , $i \in J \setminus J_1$, то решение x=0 системы (4) асимптотически устойчиво.

Отметим, что теоремы 5 - 7 дают способ построения квадратичной ФЛ для дискретной ЛИВ-системы с переключениями, который сводится к численному решению системы ЛМН (16)-(18). Сначала по графу функционирования логического автомата выписывается полная система ЛМН вида (16)-(18), а затем из нее удаляются неравенства, относящиеся к состояниям и переходам, которые не являются реализуемыми.

1.4. Кусочно-линейные функции Ляпунова

Большинство известных результатов для проблемы произвольных переключений связано с существованием ОКФЛ. Однако не трудно построить переключаемую линейную систему, которая асимптотически устойчива для произвольных последовательностей переключения, где у составляющих систем нет ОКФЛ (см. например [102]).

Из обратной теоремы А.П. Молчанова и Е.С. Пятницкого [157] следует, что общая кусочно-квадратичная, или общая кусочно-линейная ФЛ всегда существует при условии, что основная переключаемая линейная система асимптотически устойчива для произвольного переключения. Мотивированные этим результатом, многие авторы стремились получить поддающиеся проверке условия для существования кусочно-линейных ФЛ вида

$$V(x) = \max_{1 \le i \le N} \{w_i^T x\} \tag{19}$$

где $w_i \in R^n, i = 1, \dots, N$ и линейные функции $w_i^T x$ называют образующими кусочно-линейной ФЛ. Функция (19) индуцирована многогранным множеством вида

$$\mathcal{P} = \{x \in R^n : w_i^T x \leq c, i = 1, \dots, N\}, c \in R_+.$$

Такие функции, как можно показать, являются локально Липшицевыми и разбивают пространство состояний на ряд выпуклых конусов, внутренности которых являются несвязными. Многогранное множество $\mathcal{P}$ называют положительно инвариантным относительно траекторий динамической системы, если для всех $x(0) \in \mathcal{P}$ решение $x(t) \in \mathcal{P}$ для $t>0$. Обзор свойств положительно инвариантных множеств и их использования для ряда проблем в теории управления может быть найдено в [84].

Если многогранник $\mathcal{P}$ ограничен и центрально симметрический, то он называется политопом и ФЛ V может быть представлена в виде

$$V(x) = \|Wx\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N}\{|w_i x|\} \tag{20}$$

где $W \in R^{N \times n}, N \geq n$ имеет полный ранг n. Функции вида (43) радиально не ограничены, имеют единственный минимум, и одностороннюю производную [157].

Существование кусочно-линейных ФЛ рассмотрено во многих статьях по устойчивости нелинейных переменных во времени систем, и численные методы для вычисления таких функций были развиты. Однако, несмотря на несколько десятилетий исследования, техника для построения кусочно-линейных ФЛ представляет серьезное узкое место для практики. Следующий результат, который был получен в [157, 158] представляет одно из исключений.

Теорема 8. Функция $V(x) = \|Wx\|_\infty$ - общая кусочно-линейная функция Ляпунова для переключаемой системы (3), если и только если существуют $Q_i \in R^{N \times N}$, $i \in \mathcal{L}$, такие что

$$q_{kk}^i + \sum_{k \neq l} |q_{lk}^i| < 0, \tag{21}$$

и

$$WA_i = Q_i W \tag{22}$$

для всех $i \in \mathcal{L}$.

Здесь q_{lk}^i обозначает (l,k) элемент матрицы Q_i.

Обобщение этого результата для ФЛ вида $V(x) = \|Wx\|_p$ можно найти в [183,205].

В [202] существование кусочно-линейной ФЛ с четырьмя образующими (N=4) рассматривают для переключаемых систем второго порядка с двумя режимами.

Отметим, что много попыток было сделано в развитии численных методов для построения таких ФЛ [29]. В [90,91] R.Brayton и C.Tong разработали алгоритм для разностных включений[1], который вычисляет ряд сбалансированных многогранников, сходящихся к множеству уровня общей кусочно-линейной ФЛ за конечное число шагов. Н.Е.Барабанов [78] предложил другую технику для того, чтобы проверить асимптотическую устойчивость линейного дифференциального включения. Эта идея была развита первоначально для разностных включений и требует достаточно мелкой дискретизации и последовательных улучшений. Снова вычисления выпуклой оболочки значительно увеличивают вычислительную нагрузку даже для методов, применимых к плоским системам, как демонстрируется примерами в [90,91,78].

В ряде публикаций A.Polan'ski представлен алгоритм построения общей кусочно-линейной ФЛ (20) с заданным числом образующих для ЛИВ-систем с переключениями. Здесь алгебраическое условие устойчивости (21)-(22) используется для того, чтобы сформулировать поиск кусочно-линейной ФЛ как задачу линейного программирования. Такие же вычислительные трудности возникают, и техника применима только к плоским системам. В [167] усовершенствованный подход с использованием только вершин многогранника и масштабирования делает технику применимой к трехмерным системам. Показано, что есть случаи, даже для размерности трех, в которых не может быть получена неустойчивость, даже когда решение не может быть найдено. Кроме того, вопрос числа N требуемых образующих остается нерешенным.

Эту проблему частично преодолевают в методе лучевой сетки, развитом C.Yfoulis и R.A.Shorten [205]. Подход основан на равномерном разделении пространства состояний в терминах направлений луча, что позволяет перебирать семейства многогранников приспосаб-

[1] Как будет отмечено в дальнейшем, устойчивость переключаемых ЛИВ систем и соответствующих дифференциальных включений оказываются эквивалентными

ливаемого размера. Техника обеспечивает два важных преимущества. Во-первых, проблема оптимизации может быть решена намного более эффективно, так что полная обработка трехмерного случая возможна; и во-вторых, для применения этой техники не требуется знания числа образующих граней.

2. Необходимые и достаточные условия устойчивости

2.1. Обращение теорем Ляпунова

В [102] обращение теоремы Ляпунова было получено для глобальной равномерной асимптотической устойчивости и локальной равномерной экспоненциальной устойчивости непрерывных систем с произвольными переключениями. Было показано, что такая система с произвольными переключениями допускает общую ФЛ.

Теорема 9 [102]. Если система с переключениями глобально равномерно асимптотически устойчива и, кроме того, равномерно экспоненциально устойчива, то она имеет общую ФЛ.

Обращение теорем Ляпунова было распространено в [147] на нелинейные системы с переключениями, которые глобально равномерно асимптотически устойчивы относительно компактного предельно инвариантного множества. Эти обращения теорем Ляпунова подтверждают, что метод общей ФЛ будет развиваться. Однако они также предполагают, что ОФЛ может не обязательно быть квадратичной. Поэтому исследования с не квадратичными ФЛ, особенно с многогранными ФЛ, привлекают все больше внимания.

Основанные на эквивалентности между асимптотической устойчивостью произвольно переключаемых линейных систем и робастной устойчивостью многогранных неопределенных линейных неавтономных систем, некоторые установленные обратные теоремы Ляпунова могут быть применены для произвольных переключаемых линейных систем. Например, следующие результаты были взяты из [158].

Теорема 10 [158]. Если линейная система с переключениями (4) экспоненциально устойчива при произвольном переключении, то у нее есть строго выпуклая, однородная (второго порядка) общая ФЛ вида псевдоквадратичной формы

$$V(x) = x^T L(x) x,$$

где $L(x) = L^T(x) = L(\tau x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и отличного от нуля $\tau \in \mathbb{R}$.

Кроме того, оказывается можно ограничить поиск рассматривая только многогранные ФЛ (также известные как кусочно-линейные ФЛ) как указывает следующий результат из [83].

Теорема 11 [83,157]. Если ЛИВ-система асимптотически устойчива при произвольных переключениях, то существует многогранная ФЛ, которая монотонно уменьшается вдоль траекторий системы.

Это обращение теоремы Ляпунова выполняется и для дискретных и для непрерывных случаев. По сравнению с предыдущими обращениями теорем Ляпунова у вышеупомянутого результата есть следующие преимущества. Во-первых, он показывает, что можно сосредоточиться на многогранных ФЛ без потери общности. Во-вторых, существуют вычислительные методы для построения многогранных ФЛ.

Несколько методов для автоматизированного построения общей многогранной ФЛ были предложены в литературе. Ранние результаты включают [105], где построение ФЛ было сведено к построению равновесного многогранника, удовлетворяющего некоторым свойствам инвариантности. Альтернативный подход был предложен А.П.Молчановым и Е.С.Пятницким в [158], где алгебраические условия устойчивости, основанные на взвешенных бесконечных нормах, были предложены.

2.2. Связь с робастной устойчивостью и устойчивостью дифференциальных включений

Здесь будут рассмотрены ряд необходимых и достаточных условий для асимптотической устойчивости ЛИВ-систем при произвольных переключениях [144]. Этот результат дает решение для долго стоящей проблемы. Он показывает, что проблема асимптотической устойчивости для ЛИВ-систем с произвольными переключениями эквивалентна проблеме робастной асимптотической устойчивости для многогранных неопределенных линейных переменных во времени систем, для которых существуют несколько сильных результатов об устойчивости [75,93].

Напомним сначала результат о робастной устойчивости для линейных неавтономных по времени систем с многогранной неопределенностью

$$x(k+1) = A(k)x(k) \tag{23}$$

где $A(k) \in \mathcal{A} = Conv\{A_1, A_2, \cdots, A_N\}$. Здесь $Conv\{\cdot\}$ обозначает выпуклую комбинацию. Другими словами, системная матрица $A(k)$ вышеупомянутой линейной неавтономной системы (23) создана выпуклыми комбинациями (с переменными по времени коэффициентами) всех системных матриц ЛИВ-системы с переключениями (4).

Лемма 1. [75] линейная неавтономная система (23) является робастно асимптотически устойчивой, если и только если существует конечное целое число n такое что

$$\left\|A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_n}\right\| < 1,$$

для всех n-кортежей $A_{i_j} \in \{A_1, A_2, \cdots, A_N\}$, где j=1, $\cdots$,n.

Здесь робастная устойчивость понимается как устойчивость при параметрической неопределенности, норма $\|\cdot\|$ обозначает ∞ норму матрицы [75]. Основанное на вышеупомянутой лемме необходимое и достаточное условие для асимптотической устойчивости линейных систем с переключениями (4) может быть выражено следующей теоремой [144].

Теорема 12*:* Переключаемая линейная система $x(k+1) = A_{\sigma(k)} x(k)$, где $A_{\sigma(k)} \in \{A_1, A_2, \cdots A_N\}$, асимптотически устойчива при произвольном переключении, если и только если существует конечное целое число n такое что

$$\left\|A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_n}\right\| < 1,$$

для всех n-кортежей $A_{i_j} \in \{A_1, A_2, \cdots A_N\}$, где j=1,…,n.

Обратим внимание, что это условие совпадает с необходимым и достаточным условием для робастной асимптотической устойчивости для многогранных неопределенных линейных неавтономных систем (23). Поэтому имеются следующие эквивалентные отношения между этими двумя проблемами [144].

Утверждение 1*:* Следующие утверждения эквивалентны:

1) Линейная система с переключениями $x(k+1) = A_{\sigma(k)} x(k)$, где $A_{\sigma(k)} \in \{A_1, A_2, \cdots A_N\}$, асимптотически устойчива при произвольном переключении;

2) Линейная неавтономная система $x(k+1) = A(k) x(k)$, где $A(k) \in \mathcal{A} \triangleq Conv\{A_1, A_2, \cdots A_N\}$, робастно асимптотически устойчива;

3) Существует конечное целое число n такое что

$$\left\|A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_n}\right\| < 1,$$

для всех n-кортежей $A_{i_j} \in \{A_1, A_2, \cdots A_N\}$, где j=1,…,n.

Интересно то, что исследование робастной устойчивости многогранной неопределенной линейной неавтономной системы, у которой есть бесконечное число возможных режимов, эквивалентно рассмотрению динамики переключений только конечного числа режимов, соответствующих вершинам многогранного множества неопределенных матриц. Отметим, что это не удивительный результат, так как этот факт уже был известен в литературе, например [81,158], в соответствии с которым критериями для робастной устойчивости являлось устойчивость по конечному числу вершин. Сопоставляя эти эквивалентные отношения в [144] представлены критерии устойчивости для линейных систем с переключениями, используя существующие результаты по робастной устойчивости [81,82,158].

Согласно аналогичной аргументации вышеупомянутая эквивалентность также выполняется для непрерывного случая. В [144] приведено необходимое и достаточное алгебраическое условие для произвольно переключаемой ЛИВ-системы, основанное на следствиях из [158] для равномерной асимптотической устойчивости дифференциальных и разностных включений, а именно:

Теорема 13. Следующие утверждения эквивалентны:

1) Линейная система с переключениями

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(k)}x(t),$$

где $A_{\sigma(k)} \in \{A_1, A_2, \cdots A_N\}$, асимптотически устойчива при произвольном переключении;

2) Линейная неавтономная система

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

где $A(t) \in \mathcal{A} = Conv\{A_1, A_2, \cdots A_N\}$, робастно асимптотически устойчива;

3) Существует матрица полного ранга $L \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$ и семейство матриц $\{\bar{A}_i \in \mathbb{R}^{m\times n}: i \in \mathcal{L}\}$ со строго отрицательной доминирующей диагональю, то есть, для каждого $\bar{A}_i$, $i \in \mathcal{L}$ ее элементы удовлетворяют неравенству

$$\hat{a}_{kk} + \textstyle\sum_{k\neq l}|\hat{a}_{kl}| < 0\,, k = 1, \cdots, m$$

такие, что матричные отношения

$$LA_i = \bar{A}_i L$$

имеют место.

Интересно обратить внимание, что хорошее свойство A_i $(i \in \mathcal{L})$ влечет существование общей кусочно-линейной ФЛ для системы с переключениями. К сожалению, применение вышеупомянутой теоремы для более высокой размерности является все еще трудным занятием потому, что числовой поиск матрицы L не прост. Однако, эта эквивалентность соединяет вместе два направления исследований. Поэтому существующие результаты в области робастной устойчивости, которая интенсивно изучалась больше двух десятилетий, могут быть непосредственно применены для изучения произвольно переключаюемых систем и наоборот. Например, в литературе по робастной устойчивости известно, что сходимость, (глобальная) асимптотическая устойчивость, и (глобальная) экспоненциальная устойчивость - являются эквивалентными для многогранных неопределенных линейных неавтономных систем [81]. Следовательно, эти понятия устойчивости также эквивалентны для линейных систем с произвольными переключениями [144].

Отметим, что результаты, представленные в этом разделе для систем с произвольными переключениями, были получены в таких областях как теория абсолютной устойчивости, робастной устойчивости и теория дифференциальных и разностных включений. Эти области были изучены в течение многих десятилетий и содержат много интересных результатов, которые могут использоваться для изучения систем с произвольными переключениями. Интересное направление исследований в литературе по абсолютной устойчивости основано на идентификации “самой неустойчивой” траектории дифференциального или разностного включения через вариационные принципы. Основная идея проста: если самая плохая траектория устойчива, то вся система в этом случае должна быть устойчивой также. Интересующиеся могут обратиться, например, к [127,149-151,169]. В последнее время A.R.Teel с соавторами [92, 114] получили теоретические результаты о решениях, свойствах устойчивости и обращении теоремы Ляпунова для дифференциальных включений с импульсами, названными импульсивными дифференциальными включениями, которые, как можно отметить, являются расширениями классических результатов для дифференциальных и разностных включений (смотрите [92, 114, 192] и ссылки в них). Более общие результаты по свойствам решений дифференциальных включений, в том числе с невыпуклой правой частью, представлены в монографии А.А.Толстоногова [193].

3. Анализ устойчивости при ограниченном переключении

Системы с переключениями, например система со многими регуляторами в виде обратной связи, могут оказаться не в состоянии обеспечить устойчивость при произвольном переключении, но могут быть устойчивыми при ограниченных сигналах переключения. Ограниченное переключение может возникнуть естественно из физических ограничений, например, в автомобильной коробке передач последовательность переключений имеет определенный порядок (с первой передачи на вторую и т.д.). Кроме того, есть случаи, когда имеется информация о возможной логике переключений, например, разделение пространства состояний и соответствующие ему правила переключений. Это знание может повлечь ограничения на переключающие сигналы. Например, должна существовать определенная граница на интервал времени между двумя последовательными переключениями, которые могут быть вследствие того, что фазовые траектории должны провести некоторый конечный отрезок времени в движении от начального множества до границ определенных множеств, если эти два множества отделены. С такими априорными знаниями о переключающих сигналах можно получить более сильные результаты об устойчивости для данной гибридной системы, чем в случае произвольного переключения, где учитываются, при необходимости, самые плохие варианты.

Проблема состоит в изучении устойчивости систем с переключениями при ограничениях на переключающие сигналы. Ограничения на переключения сигналов могут быть либо ограничениями на интервал времени (например, на время задержки, среднее время задержки сигнала переключения, которые будут определены ниже), или ограничения в пространстве состояний (например, разделение пространства состояний на множества). Обратим внимание на то, что различие между управляемыми по времени переключающими сигналами (независимые от состояния) и зависимыми от состояния переключающими сигналами существенна. В [123] J.P.Hespanha показал, что когда класс сигналов переключения управляется временем, то есть независимо от состояния, равномерная асимптотическая устойчивость линейных систем с переключениями эквивалентна экспоненциальной устойчивости. Однако, эта эквивалентность не выполняется для зависимых от состояния переключающих сигналов. Котрпример дан в [123].

3.1. Медленные переключения

Интуитивно ясно, что если система находится в устойчивых режимах достаточно долго и переключается из них менее часто, то есть переключение медленное, тогда есть возможность освободиться от увеличения энергии, вызванного переключением или неустойчивым режимом, и сохранить устойчивость. Это обосновывается с помощью таких понятий как время задержки и среднее время задержки до переключения, предложенных A.S.Morse и J.P.Hespanha (см. например [123,125,156,206]).

Определение 1. Положительную постоянную $\tau_d \in \mathbb{R}$ назовем временем задержки переключающего сигнала, если интервал времени между какими-нибудь двумя последовательными переключениями не меньше чем τ_d.

Можно показать, что всегда возможно, чтобы сохранить устойчивость, когда все подсистемы устойчивы, и переключение является достаточно медленным, в смысле, что τ_d достаточно большое [159]. В действительности не имеет значения, если иногда случается меньшее время задержки между переключениями, и если это не происходит слишком часто. В этом случае в [125] используется понятие “среднего времени задержки”.

Определение 2. Положительная постоянная τ_a называется средним временем задержки для переключающего сигнала $\sigma(t)$ если

$$N_\sigma(t,\tau) \leq N_0 + \frac{t-\tau}{\tau_a}$$

выполняется для всех $t \geq \tau \geq 0$ и некоторого скаляра $N_0 \geq 0$, где $N_\sigma(t,\tau)$ обозначает число переключений режимов на интервале (τ, t).

Теорема 14*:* [125] Предполагается, что все режимы ЛИВ-системы с переключениями экспоненциально устойчивы. Тогда существует величина $\tau_a^* > 0$ такая, что система с переключениями экспоненциально устойчива, если среднее время задержки больше чем τ_a^*.

Вариант со средним временем задержки характеризует больший класс устойчивых сигналов переключений, чем вариант с фиксированным временем задержки. Интересующиеся могут обратиться к [122,123] для выяснения подробностей.

Результаты по устойчивости для медленных переключений распространены на дискретные системы с переключениями, где время задержки или среднее время задержки τ_a может быть определено как число тактов (периодов обработки данных) [207], и подобные результаты могут быть получены. Кроме того, можно расширить результаты на случай, когда в дискретной системе имеются как устойчивые так и неустойчивые режимы. Когда имеются неустойчивые режимы, медленное переключение (то есть, достаточно длинный перерыв в переключениях или среднее время задержки) не достаточно для устойчивости; должно также удовлетворяться условие, что система с переключениями не проводит слишком много времени в неустойчивых режимах. Причина рассмотрения неустойчивых режимов в системах с переключениями состоит в том, что в ряде случаев переключения в неустойчивые режимы становится неизбежным, например, когда отказ происходит или в сети передачи данных есть потеря пакета. В этом случае важно определить условия, при которых устойчивость систем с переключениями все еще сохраняется [145,206,207].

Хотя время задержки и среднее время задержки главным образом характеризуют управляемые по времени переключающие сигналы, идея медленного переключения может быть обобщена на гибридные системы с управляемыми по состоянию сигналами переключения. В [156] авторы изучили проблему анализа устойчивости для гибридного автомата (названный структурированным гибридным автоматом) через абстрагирования его в 'подобную' систему с переключениями. Подобие в смысле сохранения свойства среднего времени задержки.

3.2. Множественные Функции Ляпунова

Анализ устойчивости с ограниченными по состоянию (с зависимыми от состояния) сигналами переключений обычно рассматриваются методом множественных (составных) функций Ляпунова (МФЛ) [89]. Основная идея [144] - то, что МФЛ или Ляпуновско-подобные функции, которые могут соответствовать каждому режиму или определенной области в пространстве состояний, связаны вместе, чтобы произвести нетрадиционную ФЛ. Нетрадиционность понимается в том смысле, что

МФЛ, возможно, не монотонно уменьшается вдоль траекторий, может иметь разрывы и быть кусочно-дифференцируемой. Причина для рассмотрения нетрадиционных ФЛ - то, что традиционные ФЛ, возможно, не существуют для систем с ограниченными сигналами переключений. Для таких случаев можно всегда построить семейство ФЛ, для которых требуют только не положительность производных Ли для определенных подсистем в определенных областях пространства состояний, вместо того, чтобы быть отрицательными глобально. Так как теория МФЛ является возможно наиболее хорошо изученной областью в литературе по системам с переключениями, то уже существуют несколько обзоров, смотрите например [101,103,122,141,154].

Есть несколько версий результатов МФЛ в литературе. Интуитивный результат с МФЛ в [103] состоит в том, что Ляпуновско-подобная функция уменьшается, когда соответствующий режим является активным и не увеличивает свое значение в каждый момент переключения.

Фактически, можно получить менее консервативные результаты [144]. Например, переключающие сигналы могут быть ограничены таким образом, что каждый раз, когда происходит выход (переключение) из определенного режима, соответствующее ей значение Ляпуновско-подобной функции, меньше чем ее значение в предыдущий раз выхода, тогда система с переключениями асимптотически устойчива [89].

Кроме того, Ляпуновско-подобная функция может увеличить свое значение во время интервала времени, только если приращение ограничено определенным видом непрерывных функций [144]. Интересующиеся могут обратиться к обзорам [103,141,154] и ссылкам в них. Отметим, что все результаты МФЛ для непрерывных гибридных/переключаемых систем распространены на дискретный случай.

3.3. Кусочно-квадратичные Функции Ляпунова

Основная трудность применения теорем с МФЛ в практических задачах – как построить подходящее семейство ФЛ. Однако в линейном случае условия устойчивости в теоремах с МФЛ могут быть сформулированы в виде ЛМН [130,131,165,170], для решения которых существуют эффективные программные пакеты.

Так как при рассмотрении ЛИВ-систем с переключениями (3) не предполагалось, что все ее режимы устойчивы, то возможно, не существует квадратичная ФЛ в классическом смысле. Однако имеется возможность ограничить поиск определенными областями пространства состояний, скажем $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$, где энергия рассеянная i-й подсистемы могла бы убывать вдоль траекторий только в этой области (нет никаких требований на убывание снаружи Ω_i). Предположим, что объединение всех этих областей Ω_i покрывает целиком пространство состояний. Тогда получаем семейство кусочно-квадратичных ФЛ [131].

Предположим, что для пространства состояний $\mathbb{R}^n$ дано разбиение $\{\Omega_1, \cdots, \Omega_N\}$, и эти области Ω_i определены априорно как ограничение возможных сигналов переключения (зависимых от состояния). В этом подразделе представлены условия в терминах ЛМН для существования квадратичных ФЛ вида $V_i(x) = x^T P_i x$, ответственных за каждую область Ω_i. Функция $V_i(x) = x^T P_i x$, должна удовлетворять следующим двум условиям [150]:

Условие 1: Существуют постоянные скаляры $\beta_i \geq \alpha_i \geq 0$ такие что неравенство

$$\alpha_i \|x\|^2 \leq V_i \leq \beta_i \|x\|^2$$

выполняется для всех $x \in \Omega_i$. Ясно, что общая квадратичная ФЛ - особый случай для кусочно-квадратичной ФЛ, соответствующий $P_i = P_j$ для всех $i,j \in \mathcal{L}$ и для $x \in \Omega_i$.

Рассмотрим квадратичную функцию $V_i(x) = x^T P_i x$ в качестве кандидата Ляпуновско-подобной функции и потребуем чтобы неравенство

$$\alpha_i x^T I x \leq x^T P_i x \leq \beta_i x^T I x,$$

выполнялось для любого $x \in \Omega_i$. Оно будет выполняться, если неравенства

$$\begin{cases} x^T(\alpha_i I - P_i)x \leq 0 \\ x^T(P_i - \beta_i I)x \leq 0 \end{cases} \tag{24}$$

выполняются для всех $x \in \Omega_i$.

Условие 2: Для всех $x \in \Omega_i$ и $x \neq 0$, $\dot{V}_i(x) < 0$.

Отрицательность производной Ляпуновско-подобной функции вдоль траекторий системы в i-м режиме может быть представлено как: $\exists P_i, \left(P_i = P_i^T\right)$ такие, что неравенство

$$x^T(A_i^T P_i + P_i A_i)x < 0 \tag{25}$$

выполняется для всех $x \in \Omega_i$.

Условие переключения: Согласно теореме с МФЛ из [89], для устойчивости также требуется, чтобы значения Ляпуновско-подобных функций в моменты переключений не увеличивались, что может быть выражено неравенством

$$x^T P_j x \leq x^T P_i x \tag{26}$$

для $x \in \Omega_{i,j} \subseteq \Omega_i \bigcap \Omega_j$. $\Omega_{i,j}$ определяет множество состояний, где траектория переходит из области Ω_i в область Ω_j.

Отметим, что все представленные выше неравенства (24)-(26) рассматриваются в локальной области, так как $x \in \Omega_i$ или Ω_{ij}. Далее методика, основанная на S-процедуре применяется для того, чтобы заменить условие в виде ЛМН с ограничениями, на условие в виде ЛМН без ограничений. Чтобы использовать S-процедуру, области Ω_i и Ω_{ij} должны быть выражены или содержаться в областях, заданными квадратичными формами. Это всегда возможно и методики нахождения квадратичных форм для описания гиперплоскости, многогранника или более общих множеств могут быть использованы из [88, 170]. Для простоты здесь предполагается, что каждая область Ω_i имеет квадратичное представление или приближение, которое задается в виде

$$\Omega_i = \{x | x^T Q_i x \geq 0\}$$

и области $\Omega_{i,j}$ могут быть выражены или приближены так

$$\Omega_{i,j} = \left\{x | x^T Q_{i,j} x \geq 0\right\}.$$

Тогда вышеупомянутые матричные неравенства могут быть преобразованы в ЛМН без ограничений, базируемые также на S-процедуре, а именно:

Теорема 15 [165]. ЛИВ-система (3) экспоненциально устойчива, если существуют матрицы $P_i\left(P_i = P_i^T\right)$, и скаляры $\alpha > 0, \beta > 0, \mu_i \geq 0$, $v_i \geq 0$, $\vartheta_i \geq 0$ и $\eta_{i,j} \geq 0$, такие что ЛМН

$$
\begin{cases}
\alpha I + \mu_i Q_i \le P_i \le \beta I - v_i Q_i \\
A_i^T P_i + P_i A_i + \vartheta_i Q_i \le -I \\
P_j + \eta_{i,j} Q_{i,j} \le P_i
\end{cases} \tag{27}
$$

удовлетворяются.

Кроме того, граница на скорость сходимости может быть оценена: $\|x(t)\| \le \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} e^{-\frac{1}{2\beta}t} \|x_0\|$, где $x(t)$ является непрерывной траекторией с начальным состоянием x_0, а константы α, β - решения ЛМН (25). Аналогичным образом в [94] получены достаточные условия с ЛМН для дискретного случая.

Отметим, что условия (27), основанные на МФЛ, являются только достаточными. Чтобы уменьшить возможную консервативность кусочно-квадратичных ФЛ, были предложены и применены для анализа устойчивости переключаемых и гибридных систем ФЛ вида бесконечной нормы [138] и полиномиальные ФЛ [161], [168]. Построение полиномиальных ФЛ может быть эффективно выполнено, используя выпуклую оптимизацию, основанную на представлении многомерных полиномов в виде суммы квадратов.. Многомерный полином $p(\mathrm{x})$ представим в виде суммы квадратов полиномов (СКП), если существуют полиномы $p_1(\mathrm{x}), \cdots, p_m(\mathrm{x})$ такие что $p(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{m} p_i^2(\mathrm{x})$. Это в свою очередь эквивалентно существованию позитивной полуопределенной матрицы Q, и должным образом выбранному вектору одночленов $Z(x)$ так, что $p(\mathrm{x}){=}Z^T(\mathrm{x})QZ(\mathrm{x})$. Например, $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ и $Z(\mathrm{x})$ порядка $k = 2$ влечет $Z(\mathrm{x}) = [1, x_1, x_2, x_1 x_2, x_1^2, x_2^2]^T$. Очевидно, что квадратичная форма $\mathrm{x}^{\mathrm{T}} P \mathrm{x}$ является особым случаем СКП. Другое преимущество, которое делает методику СКП привлекательной, является тот факт, что если полином есть СКП, то автоматически это означает положительность полинома, что в противном случае могло быть трудным для проверки (проверка положительности полинома, принадлежит классу NP трудных проблем [144]).

Также можно использовать методики СКП и S-процедуры для того, чтобы создать кусочно-полиномиальные ФЛ, с каждым полиномом как СКП, включая ограничения на состояния, тем самым обобщить кусочно-квадратичные ФЛ. Используя подход СКП, ФЛ более высокой степени могут быть созданы, таким образом уменьшая консерватизм при поиске только среди квадратичных кандидатов. Фактически, степень полиномов крайне важна для подхода с СКП. С одной стороны, чем ниже порядок полинома, тем более низкая сложность вычислений (см. [82, 184], где обсуждаются примеры вычислительных проблем сложности), с другой стороны более высокая степень желательна, чтобы уменьшить консервативность метода. С увеличением порядка полинома расширяются возможности построить такую ФЛ, если она существует. В [144] отмечено, что должен существовать компромисс в выборе оптимальной степени СКП, и эта проблема должна быть исследована. Кроме того, другая открытая проблема состоит в том, можно ли всегда найти полиномиальную или кусочно-полиномиальную ФЛ при условии, что ФЛ существует, то есть, универсален ли СКП. Если так, то может ли верхняя граница степени полиномов быть оценена?

В дополнение к подходу с МФЛ есть альтернативные методы [96, 106,166] для анализа устойчивости систем с переключениями (с зависимой от состояния логикой переключения), используя например столкновение отображения и поверхности ФЛ [116], связанной с поверхностями переключений. Интересующиеся могут обратиться к [116] для рассмотрения данного вопроса.

4. Методы анализа устойчивости нелинейных гибридных систем

4.1. Метод функций Ляпунова

Сегодня популярными методами анализа устойчивости нелинейных гибридных систем являются различные модификации 2-го метода Ляпунова [1,3,4,51,54,60,68,74,85,118,157,172 и др.]. Один из первых вопросов был о существовании общей ФЛ для всего семейства подсистем [103, 184]. Проблемы существования и построения общей ФЛ полностью еще не решены, даже для переключаемых ЛИВ-систем [144]. Известно, что существование однородной 2-го порядка ОФЛ является необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости ЛИВ-систем [158], и поэтому общая ФЛ уже не является квадратичной формой. Ряд необходимых и достаточных условий существования ОКФЛ для переключаемых ЛИВ-систем 2-го порядка было получено Shorten и др. [184], П.В.Пакшиным и В.В.Поздяевым [59].

Метод ФЛ стал мощным инструментом для анализа устойчивости, диссипативности, пассивности а также для синтеза управления гибридных систем [118,119,139,175]. Известно что, если существует ОФЛ (положительно определенная, радиально неограниченная с отрицательной производной), тогда переключаемая система глобально асимптотически устойчива. Для равномерной глобальной асимптотической устойчивости, существование ОФЛ становится необходимым и достаточным [102,147]. Построение ОФЛ является все еще интересной и стимулирующей проблемой (см. [67,97,139,144,183] и ссылки в них).

Проблема существования общей ФЛ для нелинейных систем – не решенная проблема теории управления (Liberzon [139,142]) и кажется, что ее успешное решение может быть найдено только для отдельных классов систем, например с однородными [84] или приводимыми правыми частями. Способ для исследования однородной переключаемой системы 2-го порядка был предложен в [126,173] на основе рассмотрения случая наихудшего закона переключения. На основе представления уравнений движения таких систем в псевдолинейной форме и известной технике ЛМН ряд достаточных условий устойчивости был получен L. Zhang и др. [210].

Множественные ФЛ M.Branicky [89], а на их основе и другие подходы (J.P.Hespanha [124], A.A.Ahmadi и др. [68]) были предложены для того чтобы удовлетворить требование их не возрастания в моменты переключений, или дать компенсацию их скачкам. Метод множественных ФЛ позволяет каждому режиму переключения иметь свою собственную ФЛ [89]. Однако, в качестве компенсации некоторые дополнительные условия необходимы, чтобы гарантировать, что значение каждой ФЛ на ее соответствующем режиме уменьшится. Например, устойчивость может быть обеспечена, если переключения происходят достаточно редко [125].

Ряд работ посвящено ослаблению условий на функции типа Ляпунова. В частности, используются немонотонные ФЛ [68]. Когда производная кандидата на ФЛ относительно каждого режима только не положительна, ее называют слабой ФЛ [57]. Чтобы решить проблему устойчивости в таком случае различные расширения принципа инвариантности Ла Салля для переключаемых систем были получены для линейных [123] и нелинейных систем [71,124,148]. Естественно, если не вводятся какие-либо ограничения для переключающих сигналов, каждый режим должен быть асимптотически устойчивым. Иначе, когда система навсегда остается в не асимптотически устойчивом режиме, полная система не будет асимптотически устойчива. При определенном предположении эргодичности на переключающие сигналы в [200] предложены расширения принципа инвариантности Ла Салля, в котором не требуется, чтобы каждый режим был асимптотически устойчивым. Современное состояние теории устойчивости и стабилизации переключаемых систем отражено в обзорах [34, 144,184].

4.2. Метод векторных функций Ляпунова

Термин ВФЛ принадлежит R.Bellman (1962). Метод ВФЛ был развит В.М.Матросовым (1962) в форме принципа сравнения и далее в некоторой алгоритмической форме метода сравнения, (В.М.Матросов, 1967-1973) (см. также книги D.Siljak [179], В.М.Матросова и др. [48-50], Груйича и др. [21], Lakshmikantam и др. [136,137]. Начиная с работ D. Siljak и L. Grujic [116,177,178] метод векторных функций Ляпунова стал применяться для исследования устойчивости систем со структурными изменениями. Они ввели так называемую устойчивость к связыванию (коннективная устойчивость), состоящую в том, что система, имеющая ряд подсистем, будет оставаться устойчивой при структурных изменениях, состоящих в отключении или подключении ее подсистем. Показано (D.Siljak [179]), что метод ВФЛ хорошо совместим с переключениями и скачками состояний в задачах анализа коннективной устойчивости.

Дальнейшее развитие метода вектор-функций Ляпунова в исследовании устойчивости крупномасштабных систем со структурными изменениями выполнено в монографиях Д. Шильяка [179, 66], Л.Т.Груйича, А.А.Мартынюка, М.Риббенс-Павеллы [21]. Были получены различные условия устойчивости систем со структурными изменениями, в предположении непрерывности изменения координат состояния при структурных переходах.

В [42, 146] это направление обобщается на случай достаточно общего описания систем с разнообразными структурными изменениями с учетом изменения размерности пространства состояния и импульсных возмущений координат при структурных изменениях. В

[32,33,136] развит метод с сублинейными ВФЛ для исследования некоторых классов непрерывных, дискретных и непрерывно-дискретных нелинейных управляемых систем с неопределенностями и структурными возмущениями.

В [119,136] метод ВФЛ применяется для анализа устойчивости импульсивных систем. Теория устойчивости многокомпонентных нелинейных систем на основе метода ВФЛ с сублинейными ВФЛ развита в монографии В.М.Матросова, Р.И.Козлова, Н.И.Матросовой [50], а теория систем сравнения, применяемых в методе ВФЛ, представлена в монографии Козлова Р.И. [31].

4.3. Метод редукции в анализе гибридных систем

Для широкого класса динамических систем, охватываемых концепцией системы движений [49], в том числе со структурными управлениями и при структурных возмущениях, развит метод исследования вопросов сохранения требуемой динамики при гомоморфных и других преобразованиях моделей векторного и матричного типа с приложениями к гибридным и другим системам [10,11, 16-19].

Предлагаемое является дальнейшим развитием алгоритмов метода ВФЛ [49], результатов о сохранении свойств алгебраических систем при гомоморфизмах (критериев типа Р. Линдона), а также метода редукции [11]. Помимо сведения исходных задач качественного анализа к более простым, вспомогательным, задачам, развиваемый метод позволяет исследовать также корректность модельных преобразований, используемых, например, для перехода от исходных моделей аналитической механики к тем или иным каноническим формам. При этом, в отличие, например, от метода сравнения с ВФЛ [48,52], преобразование не ищется, оно известно, но требуется оценить его приемлемость с точки зрения не искажения требуемой динамики в исходной модели. Эти искажения возможны даже при таких преобразованиях пространства состояний, как гомеоморфизмы и диффеоморфизмы (например, если необходимо сохранение устойчивости, то оно может не обеспечиваться, когда эти преобразования зависят от времени [60,19]).

Развитие метода редукции основано на применении ранее разработанного исчисления позитивно-образованных формул [8,13] к решению логических уравнений метода редукции [11]. При этом снимаются априорные требования согласованности известных членов логического уравнения, что расширяет область применения метода редукции из [11].

Рассматривается использование метода а) для получения условий корректности модельных преобразований, понимаемой в смысле сохранения требуемой динамики в прямом, обратном или обоих направлениях, а также б) в качественном анализе динамики системы движений и ее примеров, в том числе систем с переменной структурой (см. обзор [25]). Последние в современной терминологии изучаются также как переключаемые и гибридные системы, т.е. системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переключениями векторных полей, определяемых правыми частями уравнений. Такие задачи динамического анализа возникают в многорежимных системах со структурными изменениями модельного представления процессов, вызываемыми, например, отказами подсистем.

Большинство известных в литературе работ по качественному анализу динамики гибридных систем посвящены переключению линейных систем (см. обзоры [103,144,184]). Методы редукции применимы также к гибридным системам с переключением нелинейных дифференциальных систем. При этом в сравнении со многими известными результатами для гибридных систем с переключениями нелинейных векторных полей [85,155] используется более широкий класс преобразований и в том числе преобразования в форме траекторных гомоморфизмов. Предлагаемый метод обобщает метод сравнения с ВФЛ, который, как ранее отмечалось, используется для исследования систем со структурными изменениями и скачками по состоянию (импульсами) [42, 66, 137]. Применение гомоморфных преобразований моделей [10,11,15-19] позволяет снять ограничения на используемые системы сравнения в виде требования квазимонотонности их правых частей в форме Важевского. В отличие от использования конуснозначных ВФЛ [199,135], также ослабляющих условие Важевского, развитый метод редукции приводит к существенно более слабым прочим условиям, допуская, например, знакопеременность гомоморфизмов [19].

Получены теоремы редукции для динамических свойств систем движений, а также гибридных систем с нелинейными правыми частями, сводящие динамический анализ к аналогичным вспомогательным задачам качественного анализа динамики для обыкновенных дифференциальных уравнений без структурных переключений, но с импульсными воздействиями, т.е. для уравнений со скачками только по состоянию. Теория качественного динамического анализа таких вспомогательных задач в терминах ВФЛ и гомоморфизмов развита в [10,16,19,195-197].

С другой стороны необходимость и обоснованность применения модельных преобразований возникает, когда при достаточно полном и точном математическом моделировании физических процессов получаются модели высокой размерности и сложности. Поэтому требуются эффективные средства для сведения сложных моделей к более простым моделями [96,113,153,155], которые способны к сохранению динамических свойств исходной сложной модели. Следует отметить, что большинство методов, которые предложены пока для анализа и управления гибридных и переключаемых систем, требуют больших вычислительных затрат, когда имеют дело с крупномасштабными динамическими системами. Не достаточная разработанность методов редукции нелинейных моделей и необходимость их использования для эффективного анализа и управления крупномасштабными гибридными и переключаемыми системами заставляет исследователей изучать и применять модельные преобразования в гибридных системах. Для нелинейных систем эта проблема является все еще в значительной степени открытой.

Проблема устойчивости для нелинейных переключаемых систем с помощью нелинейных преобразований может быть сведена к аналогичной вспомогательной проблеме, которая может быть более простой (например, может иметь меньшее измерение или форму импульсивных дифференциальных уравнений без переключений). Метод редукции гарантирует также, чтобы проверить корректность координатных и других преобразований модели с точки зрения сохранения желаемой динамики в прямом, обратном или в обоих направлениях.

Метод редукции применим для более широких классов моделей и их свойств, чем метод сравнения и может использоваться с более широким классом преобразований модели (СДВ, общие СДВ, матричные ФЛ, векторные и матричные гомоморфизмы, и т.д.).

Любое преобразование состояния и времени системы движений r ведет к преобразованию движения x и появлению вспомогательной системы движений r'.

В [11] получены условия сохранения свойств типа устойчивости систем движений r и r' при модельных преобразованиях (в прямом от r к r' и обратном от r' к r направлениях), удовлетворяющих условию траекторного гомоморфизма и некоторым дополнительным условиям. Из доказанных в [11] теорем легко получаются аналогичные утверждения для разных интерпретаций систем движений r и r', в том числе для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и для ОДУ с переключениями векторных полей.

Пусть кусочно-постоянная функция $s: T \to N$, где $N = \{1,2,3\ldots\}$, имеет счетное число разрывов первого порядка на каждом конечном интервале из T а $T = [t_0, +\infty)$. За τ_i, $i \in N$, обозначим точки разрывов функции s и допустим, что множество этих точек образует монотонно возрастающую последовательность $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \ldots$, и $\tau_i \to \infty$ при $i \to \infty$. Предположим, что функция s непрерывна справа в точках τ_i, и $s(\tau_i^+)$ ее правый предел в точке τ_i. За S обозначим множество функций s, а за $\Delta(s)$ - множество точек разрывов τ_i функции s.

Рассмотрим ОДУ с разрывной правой частью

$$\dot{x} = F(t, x, s(t)), \qquad x \in R^n, \qquad t \in T \setminus \Delta(s), \qquad s \in S, \tag{28}$$

где $F: T \times R^n \times N \to R^n$, $F(t, 0, s(t)) \equiv 0$. Допустим что, для всех $m \in N_S = \cup\{range\ s:\ s \in S\}$, функции $F(\cdot,\cdot,m)$ удовлетворяют требованиям существования и продолжимости вправо классических решений $x(t)$ задачи Коши для ОДУ $\dot{x} = F(t, x, m)$ на $(\tau_{i-1}, \tau_i] \times R^n$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ если $t_0 \in [\tau_{i-1}, \tau_i)$, $i \ge 1$, и аналогичным требованиям для $(j+1)$ -й задачи на множестве $(\tau_j, \tau_{j+1}] \times R^n$, $x(\tau_j^+) = x(\tau_j)$, где $j \ge i$, $x(\tau_j)$ есть финальное значение решения j-й задачи на множестве $(\tau_{j-1}, \tau_j] \times R^n$.

Предположим решения ОДУ (28) (непрерывные в точках τ_i) интерпретируются как движения $x \in rh$ системы движений r;

$h=(t_0,\mathrm{x}_0,s)\in H=T_0\times X_0\times S$, $T_0=T$, $X_0\subset O_\alpha\subset X=R^n$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_0$ являются семействами текущих и финального оценочных множеств $P=T\times O_\varepsilon$, $P_0=T\times O_\delta$ $(\varepsilon,\delta>0)$, соответственно.

В качестве вспомогательной системы движений r', выберем семейство решений ОДУ с разрывной правой частью и разрывными решениями $y(t)$

$$\dot{\mathrm{y}}=G(t,\mathrm{y},s(t)),\qquad t\in T\setminus\Delta(s),\qquad \mathrm{y}\in R^k,\qquad s\in S \tag{29}$$

$$\mathrm{y}(\tau_i^+)=\Psi(\tau_i,y(\tau_i),s(\tau_i)),\qquad \tau_i\in\Delta(s), \tag{30}$$

где $G:T\times R^k\times N_S\to R^k$, $G(t,0,s(t))\equiv 0$, $\Psi:T\times R^k\times N_S\to R^k$, $\Psi(t,0,s(t))\equiv 0$, $G(\cdot,\cdot,m)$ $(m\in N_S)$ удовлетворяет аналогичным условиям как F для существования и продолжимости вправо составного решения $y(t)$, но предполагается соединение решений последовательности задач Коши в точках $\tau_i\in\Delta(s)$ не по непрерывности, а по правилу (30), так что в точках τ_i решения $y(t)$ будут, вообще говоря, непрерывными только слева $(m\in N_S)$.

Пусть $T_0'=T'=T$, $X_0'=X=R^k$, $H'=T_0\times R^k\times S$, $r'h'=r'(t_0,\mathrm{y}_0,s)$, $\mathcal{R}'$ и $\mathcal{R}'_0$ - семейства оценочных множеств

$$P'(t)=P_{\varepsilon'}'(t)=\{\mathrm{y}\in R^k:|\,\mathrm{y}\,|<\frac{\varepsilon'}{t(2+\sin t)}\},\ \mathcal{R}'=\{P'\}_{\varepsilon'>0},\ \mathcal{R}'_0=\mathcal{R}'. \tag{31}$$

Введем функцию $v:Q\times S\to R^k$, $v(t,0,s(t))\equiv 0$, $z(h)=z(t_0,\mathrm{x}_0,s)\equiv s$, $w_0(h)\equiv t_0$, $v_0(h)=v(t_0,\mathrm{x}_0,s)$, $w(t,h)\equiv t$, которые удовлетворяют условию гомоморфизма. В случае дифференцируемости $v(t,\mathrm{x},m)$ по t, x, для всех $m\in N$, условие гомоморфизма удовлетворяется следующими требованиями

$\forall m,l\in N_S$, $(t,\mathrm{x})\in Q$

$$\dot{v}(t,\mathrm{x},m)\,|_{(28)}=G(t,v(t,\mathrm{x},m),m), \tag{32}$$

$$v(t,\mathrm{x},l)=\Psi(t,v(t,\mathrm{x},m),l),\qquad t\in\Delta(s), \tag{33}$$

где, для всех $m\in N_S$ $\dot{v}(t,\mathrm{x},m)\,|_{(1)}$ есть производная $v(t,\mathrm{x},m)$ по t вдоль решений системы (28), а пара (m,l) соответствует хотя бы одному событию переключения векторного поля из $F(t,\mathrm{x},m)$ в $F(t,\mathrm{x},l)$ на рассматриваемом интервале. Если непрерывная функция $v(\cdot,\cdot,s)$ является не дифференцируемой, но удовлетворяет локальному условию Липшица по x, условие (32) может быть заменено равенством

$$\overline{\lim_{h\to 0+}}\frac{1}{h}[v(t+h,\mathrm{x}+hF(t,\mathrm{x},m))-v(t,\mathrm{x},m)]=G(t,v(t,\mathrm{x},m),m).$$

Рассмотрим свойство $S_{\mathrm{K}}\varepsilon\delta$-устойчивости тривиального решения $x(t)\equiv 0$ системы (30):

$$\mathrm{K}s\in S\ \ \forall t_0\in T_0\ \ \forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall \mathrm{x}_0\in R^n:\|\mathrm{x}_0\|<\delta$$
$$\forall x(\cdot;t_0,\mathrm{x}_0)\ \ \forall t\ge t_0\ \ \forall \mathrm{x}=x(t)\ \ \|\mathrm{x}\|<\varepsilon,$$

где $T_0\subseteq T=[\tau_0,+\infty)$. В системе (29), (30) рассматривается аналогичное свойство $S_K\mathcal{R}'\mathcal{R}'_0$ -устойчивости решения $y(t)\equiv 0$, но для семейств оценочных множеств $\mathcal{R}'\mathcal{R}_0'$

$$\mathrm{K}s\in S\ \ \forall t_0\in T_0\ \ \forall P'\in\mathcal{R}'\ \ \exists P_0'\in\mathcal{R}_0'\ \ \forall \mathrm{y}_0\in R^k:\mathrm{y}_0\in P_0'(t_0)$$
$$\forall y(\,\cdot\,;t_0,\mathrm{y}_0)\ \ \forall t\ge t_0\ \ \forall \mathrm{y}=y(t)\ \ \mathrm{y}\in P'(t).$$

$S_{\mathrm{K}_1}\varepsilon\delta$ устойчивость в комбинации с $S_{\mathrm{K}_2}\varepsilon\delta$ притяжением называется асимптотической $S_{\forall}\varepsilon\delta$ устойчивостью, если $\mathrm{K}_1=\mathrm{K}_2=\forall$ и асимптотической $S_{\exists}\varepsilon\delta$ устойчивостью, если или $\mathrm{K}_1=\forall\,\&\,\mathrm{K}_2=\exists$ или $\mathrm{K}_1=\exists\,\&\,\mathrm{K}_2=\forall$.

Теорема 16. **(**о сохранении устойчивости и притяжения от (29)-(30) к (28)). Предположим, системы (28) и (29)-(30) удовлетворяют условию гомоморфизма (32), (33) и следующие условия выполняются:

1) $\forall t_0\in T_0\ \ \forall m\in N_S\ \ \forall P_0'\in\mathcal{R}_0'\ \ \exists\delta>0\ \ v(t_0,O_\delta,m)\subseteq P_0'(t_0)$,

2) $\forall t_0\in T_0\ \ \forall\varepsilon\in(0,\alpha)\ \ \exists P'\in\mathcal{R}'\ \ \forall t\ge t_0\ \ \forall m\in N_S\ \ v(t,R^n\setminus O_\varepsilon,m)\subseteq R^k\setminus P'(t)$,

или, в случае существования обратной функции $v^{-1}(t,\cdot,m)$, $v^{-1}(t,P'(t),m)\subseteq O_\varepsilon$.

Тогда $S_K\mathcal{R}'\mathcal{R}'_0$-устойчивость (асимптотическая $S_K\mathcal{R}'\mathcal{R}'_0$-устойчивость) системы (27)-(28) влечет $S_K\varepsilon\delta$-устойчивость (асимптотическую $S_K\varepsilon\delta$-устойчивость) (28).

Аналогичные утверждения имеют место для сохранения свойств типа устойчивости от исходной системы к вспомогательной системе.

Пример 1 [19]. Рассмотрим ОДУ (28) с $N_S=\{1,2\}$, т.е. с двумя векторными полями:

$$\widetilde{F}^1(t,\mathrm{x})=\frac{\mathrm{x}\cos t}{2+\sin t},\qquad \widetilde{F}^2(t,\mathrm{x})\equiv 0.$$

Предположим что $\tau_0>0,\tau(t_0)\overset{\mathrm{df}}{=}\tau_{l+1}$, где τ_{l+1} определяется неравенствами $\tau_l\le t_0<\tau_{l+1}$, $l=0,1,2,\ldots$, а вспомогательные конструкции – соотношениями

$$\forall m\in N_S\quad G(t,\mathrm{y},m)=-\frac{\mathrm{y}}{t},$$

$$\widetilde{v}_1(t,\mathrm{x})=\frac{\mathrm{x}}{t(2+\sin t)},\qquad \widetilde{v}_2=\frac{\mathrm{x}}{t},$$

$$\widetilde{\Psi}^1(t,\mathrm{y})=\frac{\mathrm{y}}{(2+\sin t)},\qquad \widetilde{\Psi}^2(t,\mathrm{y})=\mathrm{y}(2+\sin t).$$

Так как τ_i есть точки разрыва функции s (хотя и неизвестные), а $N_S=\{1,2\}$, $s(\tau_i)=3-j$ если $s(\tau_{i-1})=j$, $j=1,2$ для $i=2,3,\ldots$

При $t\in[t_0,\tau(t_0)]$ имеем $F(t,\mathrm{x},s(t_0))\in\{\widetilde{F}^1(t,\mathrm{x}),\widetilde{F}^2(t,\mathrm{x})\}$ (начальное векторное поле – любое из двух возможных), а далее $\forall\tau_i>\tau(t_0)$ $\forall t\in(\tau_j,\tau_{j+1}]$ a) $\forall\mathrm{x}\in Q(t)$ $F(t,\mathrm{x},s(t))=\widetilde{F}^{s(t)}(t,\mathrm{x})$,

$v(t,\mathrm{x},s(t))=\widetilde{v}^{s(t)}(t,\mathrm{x})$, b) $\Psi(t,\mathrm{y},s(t))=\widetilde{\Psi}^{s(t)}(t,\mathrm{y})$. Легко проверить, что условия (32), (33) выполнены, и потому выполнены условия гомоморфизма.

Хотя в примере мощность N_S равна 2, множество S может быть континуальным из-за не фиксированности точек разрыва. Пусть при произвольном начальном векторном поле $F(t,\mathrm{x},s(t_0))$

$$\{\tau_0, \tau_1, \tau_2, ...\} = \{\frac{\pi}{2},\ \pi,\ 2\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ 3\pi,\ 4\pi,\ \tau_0 + 4\pi,\ \tau_1 + 4\pi,\ \tau_2 + 4\pi, \ldots\}.$$

В системе (29), (30) имеется свойство $S_K \mathcal{R}' \mathcal{R}'_0$ устойчивости решения $y(t) \equiv 0$ относительно семейств $\mathcal{R}'$, $\mathcal{R}'_0$ вида (31) и все условия теоремы 16 выполняются. Следовательно, решение $x(t) \equiv 0$ исходной системы (28) обладает свойством $S_{\forall}\varepsilon\delta$-устойчивостью. Свойством $S_K \mathcal{R}' \mathcal{R}'_0$-притяжения когда $\mathcal{R}'$, $\mathcal{R}'_0$ имеют вид (31), система (29)-(31), (как и система (28)) не обладает, даже при $K = \exists$.

В теореме 16 анализ устойчивости исходной модели (28) сводится к изучению вспомогательной системы ОДУ с импульсными воздействиями. Для исследования устойчивости последних нужны свои критерии. В терминах гомоморфизмов критерии устойчивости ОДУ с не переключаемой правой частью $G(t, \mathrm{y}, m) = G(t, \mathrm{y})$, но с импульсными воздействиями в неизвестные моменты времени получены в [195].

В случае фиксированных моментов импульсных воздействий критерии сохранения устойчивости в терминах ВФЛ предложены в [197].

В [18] предлагается расширение класса рассматриваемых преобразований, варьирование выбора семейств оценочных множеств с новыми критериями сохранения свойств. В частности, возьмем в качестве функции преобразования матричную функцию $v : Q \times S \to M$, $v(t, 0, s(t)) \equiv 0$, $z(h) = z(t_0, \mathrm{x}_0, s) \equiv s$, $w_0(h) \equiv t_0$, $v_0(h) = v(t_0, \mathrm{x}_0, s)$, $w(t, h) \equiv t$ (M – пространство вещественных матриц размерности $k \times k$. В случае дифференцируемости $v(t, \mathrm{x}, m)$ по t, x, для всех $m \in N$, условие гомоморфизма состоит в выполнении требований (32), (33), где $G : T \times M \times N_S \to M$, $\Psi : T \times M \times N_S \to M$ - матричные функции, удовлетворяющим условиям существования и продолжимости вправо составного решения $y(t)$ вспомогательной системы (29),(30). В этом случае также будет справедливо утверждение теоремы 16 о сохранении устойчивости и притяжения от (29)-(30) к (28).

4.4. Метод редукции в оценивании состояния нелинейной гибридной системы с полиномиальной правой частью

Для решения сопряженных (к задачам качественного анализа) задач количественного оценивания состояния и множеств достижимости таких систем развивается основанный на матричных преобразованиях метод матричных систем сравнения. В частности методы эллипсоидального гарантированного оценивания [35,65,132,133] можно рассматривать как применение преобразования вектора состояния x исходной системы в матрицу xx^T и получение матричной системы сравнения, решения которой описывают эволюцию эллипсоидальных оценок решений исходной системы [39-41].

В ряде работ [69,71,72,87,194] оценивание множества достижимости гибридных систем проводилось на основе численного решения уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана (уравнение в частных производных) для соответствующей задачи оптимизации с использованием различных аппроксимаций его решений. Для линейных систем с переключениями получены эволюционные уравнения для внешней и внутренней эллипсоидальной аппроксимации множества достижимости [132,133]. Для нелинейных систем предложены и обоснованы методы численного интегрирования и построения оболочки, содержащей решения. Они основаны на сеточном покрытии множества достижимости или интервальном разложении в ряд Тейлора. Когда множество начальных состояний или неопределенных параметров является большим, используются теоремы сравнения и дифференциальные неравенства с интервальным разложением для интегрирования на множестве. В данной работе для класса переключаемых нелинейных систем с полиномиальной правой частью (с фиксированными моментами переключений) получена система сравнения, решения которой определяют внешнюю эллипсоидальную аппроксимацию множества достижимости.

Пусть в (28) $F(t, \mathrm{x}, s(t))$ задана в виде полинома с нечетными степенями

$$F(t, \mathrm{x}, s(t)) = A(t, s(t))\mathrm{x} + \sum_{i=1}^{m} b_i(t, s(t))\sigma_i^{2\mu_i - 1}, \ \sigma_i = c_i^T(t, s(t))x \quad (34)$$

где $A(t, s(t))$ - $(n \times n)$-матрица, $b_i(t, s(t)), c_i(t, s(t))$ - n-векторы, $\mu_i \geq 2$ - целые числа, (i=1,…,m). Пусть переключения производятся в известные моменты $\tau_j (j \geq 1)$, при этом имеют место импульсные возмущениями координат

$$x(\tau_j^+) = D(\tau_j, s(\tau_j)) x(\tau_j), \tag{35}$$

где $D(\tau_j, s(\tau_j))$ - известные матрицы.

Пусть в начальный момент t_0 состояние системы x_0 считается неопределенным, но известно, что оно принадлежит эллипсоиду $E(0, Q_0)$, где Q_0 - заданная положительно определенная матрица. С помощью матричного преобразования $\mathrm{V}(\mathrm{x}) = \mathrm{xx}^T \geq 0$ система (1) сводится к виду (при дифференцировании матричной функции $\mathrm{V}(\mathrm{x}) = \mathrm{xx}^T$ в силу (28),(34))

$$\begin{aligned} d\mathrm{V}(s)/dt = A(t,s)\mathrm{V}(s) + \mathrm{V}(s)A^T(t,s) + \sum_{i=1}^{m} [c_i(t,s)\mathrm{V}(s)c_i(t,s)]^{\mu_i} [b_i(t,s)c_i^T(t,s)\mathrm{V}(s) + \\ + \mathrm{V}(s)c_i(t,s)b_i^T(t,s)], \end{aligned} \tag{36}$$

При этом соотношения (35) преобразуются к виду

$$\mathrm{V}(\tau_j, s(\tau_j)) = D(\tau_j, s(\tau_j))\mathrm{V}(\tau_j, s(\tau_j)) D^T(\tau_j, s(\tau_j)) \tag{37}$$

Пусть $Q(t, s(t))$ при $t \in [t_0, t_1]$ решение матричного дифференциального уравнения (36) со скачками (37) и начальным условием

$$Q(t_0, s(t_0)) = Q_0.$$

Теорема 17. Пусть все матрицы скачков D_j не сингулярные $(\det D_j \neq 0,\ j = 1,2,...)$. Тогда решение $Q(t, t_0, Q_0)$ системы (36) со скачками (37), с начальным условием $Q(t_0, t_0, Q_0) = Q_0$ сохраняет положительную определенность для всех $t \in [t_0, t_1]$ и решения $x(t, t_0, x_0)$ системы (28), (34), (35) с начальными условиями $x_0 \in E(0, Q_0)$ (т.е. $\mathrm{V}_0 = V(t_0, s(t_0)) \leq Q_0$) принадлежат эллипсоиду

$$E[0, Q(t, s(t))] = \{\mathrm{x} \in R^n : \mathrm{x}^T Q^{-1}(t, s(t))\mathrm{x} \leq 1\},$$

при всех $t \in [t_0, t_1]$.

Таким образом, частное решение матричной системы сравнения (36), (37) описывает эволюцию эллипсоида $E[0, Z(t, s(t))]$, в котором находятся решения системы (28),(34),(35), начинающиеся из заданного эллипсоида $E(0,Q_0)$.

Заключение

Данный обзор по устойчивости гибридных систем далек от завершенности. Из соображений компактности изложения здесь представлены не все результаты. Не исключено, что о некоторых результатах авторы не осведомлены, и мы приносим извинения за возможные упущения. Такие задачи как синтез управления, синтез наблюдателей состояния, ограниченность, инвариантность, пассивность, верификация, качество управления, стабилизируемость, управляемость, достижимость, наблюдаемость гибридных систем заслуживают отдельного рассмотрения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А.Ю., Платонов А.В*. Об абсолютной устойчивости одного класса нелинейных систем с переключениями //Автом. и телем. 2008. Т.69. №7. С.1101-1116.
2. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. М.:Наука, 1967.
3. *Баркин А.И.* Системы с ключом и оценка области абсолютной устойчивости//Автоматика и телемеханика. 2009. № 6. С. 181-186.
4. *Бычков А.С.* Использование второго метода Ляпунова для исследования устойчивости гибридных систем //Вестник Киевского ун-та. Серия: физико-математические науки. 2005. № 4. С.125-133.
5. *Бортаковский А.С.* Необходимые условия оптимальности управления логико-динамическими системами//Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2007. № 6. С. 16-33.
6. *Бортаковский А.С.* Синтез логико-динамических систем на основе достаточных условий оптимальности //Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2010. № 2. С. 41-55
7. *Васильев С.Н.* Метод сравнения в анализе систем. I-IV // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 9. С.1562-1573; Т.17. № 11. С. 1545-1554; 1982. Т. 18. № 2. С. 197-205; Т. 18. №6. С. 938-947.
8. *Васильев С.Н.* Метод синтеза условий выводимости хорновских и некоторых других формул // Сибирский мат. журнал. 1997. Т.38. №5. С. 1034-1046.

9. *Васильев С.Н.* Достижимость и связность в автоматной сети с общим правилом переключения состояний // Дифференциальные уравнения, 2002. Т. 38, N 11. С. 1533-1539.
10. *Васильев С.Н.* К теории редукции в качественном анализе и управлении динамическими системами // Труды Института математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, 2004. Т. 10. №2. С. 20-34.
11. *Васильев С.Н.* Метод редукции и качественный анализ динамических систем, I-II // Известия РАН. Теория и системы управления. 2006. №1. С. 21-29. № 2. С.5-17.
12. *Васильев С.Н., Жерлов А.К.* Логическое моделирование и управление в реальном времени // Материалы Всесоюзной научно-технической конференции “Интеллектуальные системы в машиностроении”, Самара, 1991. Ч. 2. С. 33-38.
13. *Васильев С.Н., Жерлов А. К.* Об исчислениях типово-кванторных формул // Докл. РАН, 1995. Т.343. №5. С. 583-585.
14. *Васильев С.Н., Жерлов А.К., Федосов Е.А., Федунов Б.Е.* Интеллектное управление динамическими системами, М.: Наука, Физматлит, 2000. 352 с.,
15. *Васильев С.Н., Козлов Р.И.* Качественная теория логико-динамических систем // Проблемы управления и моделирования в сложных системах: Тр. II Междунар. конф. Самара: Самарский научный центр РАН, 2000. С. 175–186.
16. *Васильев С.Н., Козлов Р.И., Ульянов С.А.* Анализ координатных и других преобразований моделей динамических систем методом редукции //Труды ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15. №3. С. 38-55.
17. *Васильев С.Н., Лакеев А.В., Максимкин Н.Н. и др.* Методы редукции в качественном анализе логико-динамических систем // Вестник Томского госуниверситета, Томск, 2004. №9(1). С.193-198.
18. *Васильев С.Н., Маликов А.И.* Развитие метода редукции для анализа модельных аналогий в динамике систем движений и гибридных систем //Труды конференции «Управление в технических системах» УТС-2010. Санкт-петербург, 12-14 октября, 2010. С.15-19.
19. *Васильев С.Н., Ульянов С.А.* К сохранению устойчивости динамических систем при гомоморфизмах //Диф. уравнения. 2009. Т. 45. №12. С.1675-1686.

20. *Гладилина Р.И., Игнатьев А.О.* О сохранении свойства устойчивости импульсных систем при наличии возмущений// Автомат. и телемех. 2007. № 8. С. 78-85.
21. *Груйич Л.Т., Мартынюк А.А., Риббенс-Павелла М.* Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях. Киев: Наук. Думка, 1984.
22. *Долголенко Ю.В.* Скользящие режимы релейных систем непрямого регулирования //Тр. Второго Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования, М.-Л.: АН СССР, 1957, т. 1.
23. *Емельянов С.В.* Способ получения сложных законов регулирования с использованием лишь сигнала ошибки и ее первой производной // Автоматика и телемеханика. 1957. Т.18. №10. С.873-885.
24. *Емельянов С.В.* Системы автоматического управления с переменной структурой. М.:Наука, 1967. 336 с.
25. *Емельянов С.В.* Теория систем автоматического управления с переменной структурой: зарождение и начальный этап развития //Нелинейная динамика и управление. Вып.4. Под ред. С.В.Емельянова, С.К.Коровина. М.: Физматлит, 2004. С.5-16.
26. *Емельянов С.В., Уткин В.И.* Теория систем с переменной структурой. М.: Наука, 1970. 592 с.
27. *Жук К.Д., Тимченко А.А., Доленко Т.И.* Исследование структур и моделирование логико-динамических систем. Киев: Наук.думка, 1975. 199 с.
28. *Игнатьев А.О.* Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием //Матем. сб., 2003, Т. 194(10). С. 117-132.
29. *Каменецкий В. А., Пятницкий Е.С.* Градиентный метод построения функций Ляпунова в задачах абсолютной устойчивости //Автом. и телем. 1987. №1. С. 3-12
30. *Козлов Р.И.* К теории дифференциальных уравнений и неравенств с разрывными правыми частями //Диф. уравнения, 1974. Т.10. №7. С.1264-1275.
31. *Козлов Р.И.* Теория систем сравнения в методе векторных функций Ляпунова. Новосибирск: Наука СО, 2001. 137 с.
32. *Козлов Р.И.* Сублинейные ВФЛ в исследовании нелинейных систем управления с неопределенностями и структурными возмуще-

ниями // Оптимизация, управление, интеллект. 2000. Вып. 5(2). С. 268–277.

33. *Козлов Р.И., Ульянов С.А.* Синтез робастного управления с использованием сублинейных ВФЛ // //Труды конференции «Управление в технических системах» УТС-2010. Санкт-петербург, 12-14 октября, 2010. С.271-274.
34. *Котов К.Ю. Шпилевая О.Я.* Переключаемые системы: устойчивость и проектирование (обзор) //Автометрия. 2008. Т. 44. № 5. С. 71-87.
35. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
36. *Летов А.М.*, Условно устойчивые регулируемые системы (об одном классе оптимальных регулируемых систем) //Автом. и телемех. 1957. Т. 18. № 7.
37. *Майзель А.Д.* Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений // Тр. Урал. политех. ин-та. Сер. Мат., 1954, т. 51. С. 20-50.
38. *Маликов А.И.* Об устойчивости логико-динамических систем управления со структурными изменениями //Известия РАН. Теория и системы управления. 1996. № 2. С.5-12.
39. *Маликов А.И.* Синтез алгоритмов оценивания состояния нелинейных регулируемых систем с применением матричных систем сравнения //Вестник Казан. гос. техн. ун-та. 1998. №3. С.54-59.
40. *Маликов А.И.* Матричные системы сравнения в анализе динамики систем управления со структурными изменениями //Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. № 3. С. 11-21.
41. *Маликов А.И.* Эллипсоидальное оценивание решений дифференциальных уравнений с помощью матричных систем сравнения // Изв. вузов. Математика. 2002. №8. С. 30-42.
42. *Маликов А.И., Матросов В.М.* Вектор-функции Ляпунова в анализе динамических свойств систем со структурными изменениями // Известия РАН. Теория и системы управления. 1998. № 2. С.47-54.
43. *Мартынюк А.А.* Об устойчивости систем с развивающимися возмущениями // Докл. АН УССР, Сер.А. 1975. №7. С613-616.
44. *Мартынюк А.А.* Анализ устойчивости непрерывных систем со структурными возмущениями // Прикл. механика. – 2002. Т. 38. № 7. С. 25 – 52.

45. *Мартынюк А.А., Косолапов В.И.* Устойчивость механических систем при изменяющейся модели связей //Прикл. механика, 1978. Т.14. №12. С.125-128.
46. *Марченко В.М., Луазо Ж.Ж.* Об устойчивости гибридных дифференциально-разностных систем //Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 728-740.
47. *Матросов В.М.* О дифференциальных уравнениях и неравенствах с разрывными правыми частями. I, II //Диф. уравнения, 1967. Т.3. №3. С.395-409; №5. С.839-848.
48. *Матросов В.М., Анапольский Л.Ю., Васильев С.Н.* Метод сравнения в математической теории систем, Новосибирск: Наука. 1980.
49. *Матросов В.М., Васильев С.Н., Каратуев В.Г., Козлов Р.И.* и др. Алгоритмы вывода теорем метода векторных функций Ляпунова, Новосибирск: Наука,1981.
50. *Матросов В. М., Козлов Р. И., Матросова Н. И.* Теория устойчивости многокомпонентных нелинейных систем. М.: Физматлит, 2007. 184 с.
51. *Матросов В.М., Маликов А.И.* Развитие идей А.М. Ляпунова за 100 лет: 1892–1992 //Изв. вузов. Матем., 1993. № 4. С. 3–47.
52. Метод вектор-функций Ляпунова в теории устойчивости / Под ред. А.А.Воронова, В.М.Матросова. М.: Наука. 1987.
53. *Мильман В. Д., Мышкис А.Д.* Об устойчивости движения при наличии толчков //Сиб. матем. ж. 1960. Т. 1. № 2. С.233-267.
54. *Молчанов А.П., Пятницкий Е.С.* Функции Ляпунова, определяющие необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем управления. I, II, III // Автом. и телем., 1986. № 3. С. 63–73; № 4. С. 5–15; № 5. С. 38–49.
55. *Мышкис А.Д., Самойленко А.М.* Системы с толчками в заданные моменты времени // Матем. сб. 1967. Т. 74(116):2. С. 202-208
56. *Мышкис А.Д.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений при обобщенных импульсных возмущениях // Автом. и телемех. 2007. №10. С. 125-133.
57. *Неймарк Ю.И.* О скользящем режиме релейных систем автоматического регулирования // Автом. и телемех. 1957. Т.18. № 1. С. 27-33.
58. *Пакшин П.В.* Дискретные системы со случайными параметрами и структурой. М.: Физматлит, 1994. 304 с.

59. *Пакшин П.В., Поздяев В.В.* Условия разрешимости системы линейных матричных неравенств второго порядка // Известия РАН. Теория и системы управления. 2006. №5. С. 5-14.
60. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. Пер. с англ. М.: Мир, 1980.
61. *Сабаев Е.Ф.* Системы сравнения для нелинейных дифференциальных уравнений и их приложения в динамике реакторов. М.: Атомиздат, 1980. 192 с.
62. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев, Виша школа, 1987. 288 с.
63. *Филиппов А.Ф.* Условия устойчивости однородных систем с произвольными переключениями режимов // Автом. и телем. 1980. № 8. С.48-55.
64. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
65. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988.
66. *Шильяк Д.* Децентрализованное управление сложными системами. Пер. с англ. М.: Мир, 1994.
67. *Agrachev A.A. and Liberzon D.* Lie-algebraic stability criteria for switched systems //SIAM J. Control Optim. 2001. V. 40. P. 253-270.
68. *Ahmadi A.A., Parrilo P.A.* Non-monotonic Lyapunov Functions for Stability of Discrete Time Nonlinear and Switched Systems //Proceedings of 47th IEEE Conference on Decision and Control. 2008.
69. *Alur R., Courcoubetis C., Halbwachs N., Henzinger T.A. and Others*. The algorithmic analysis of hybrid systems. Theoretical Computer Science, 1995. V.138. P. 3-34.
70. *Angeli D.* On a note on stability of arbitrary switched homogeneous systems. Elsevier Preprint, 2002 (http://www.dsi.unifi.it/ angeli/).
71. *Asarin E., Maler O., and Pnueli A.* Reachability analysis of dynamical systems having piecewise-constant derivatives //Theoretical Computer Science, 1995. V.138. P. 35-65.
72. *Asarin E., Bournez O., Dang T. and Maler O*. Approximate reachability analysis of piecewise-linear dynamical systems //HSCC, 1790 in LNCS, 2000. P. 20-31.
73. *Asarin E., Bournez O., Dang T., Maler O., and Pnueli A.* Effective synthesis of switching controllers for linear systems //Proceedings of the

IEEE: Special issue on hybrid systems, P.J. Antsaklis, editor, IEEE Press, 2000. V. 88. P. 1011-1025.

74. *Bacciotti A, Mazzi L.* An invariace principle for nonlinear switched systems //Syst Control Lett. 2005. V.54. P. 1109-1119.
75. *Bauer P., Premaratne K., and Duran J.* A necessary and sufficient condition for robust asymptotic stability of time-variant discrete systems //IEEE Trans. Automat. Contr. 1993. V.38(9). P. 1427-1430.
76. *Bainov D.D., Lakshmikantham V, Simenov P.S.* Theory of impulsive differential equations.- Singapure: World Scientific, 1989.
77. *Bainov D.D., Simenov P.S.* Systems with impulse effect: Stability, theory and applications. - Chichester: Ellis Hoorwood; New York etc.: John Willey and Sons, 1989.
78. *Barabanov N.E.* A method for calculating the Lyapunov exponent of a differential inclusion //Autom. Remote Control. 1989. V.50. P. 475-479.
79. *Bemporad A., Ferrari-Trecate G., and Morari M.* Observability and controllability of piecewise affine and hybrid systems //IEEE Trans. Automat. Contr., 2000. V. 45(10). P. 1864-1876.
80. *Bemporad A. and Morari M.* Control of systems integrating logic, dynamics, and constraints //Automatica. 1999. V. 35(3). P. 407-427.
81. *Bhaya A. and Mota F.* Equivalence of stability concepts for discrete time-varying systems //Int. J. Robust and Nonlin. Contr. 1994. No 4. P. 725-740.
82. *Biswas P., Grieder P., Loefberg J., and Morari M.* A survey on stability analysis of discrete-time piecewise affine systems //In Proceedings of 16th IFAC World Congress, July. 2005.
83. *Blanchini F.* Nonquadratic Lyapunov functions for robust control //Automatica. 1995. V. 31(3). P. 451-461.
84. *Blanchini F.* Set invariance in control //Automatica. 1999. V. 35. P.1747-1767.
85. *Bo H., Xuping X., Michel, A.N., Antsaklis P.J.* Stability analysis for a class of nonlinear switched system// Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control. 1999. V.5. P. 4374-4379.
86. *Boscain U.* A review on stability of switched systems for arbitrary switchings //Proceedings of the conference "Geometric Control and Nonsmooth Analysis", Rome June 5 - 9, 2006, "Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences", Worldscientific, 2007. P. 100-119.

87. *Botchkarev O. and Tripakis S*. Verification of hybrid systems with linear differential inclusions using ellipsoidal approximations //HSCC, Springer-Verlag, 1790 in LNCS, 2000. P. 73-88.
88. *Boyd S., Ghaoui L., Feron E., and Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. SIAM, 1994.
89. *Branicky M.S.* Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems //IEEE Trans. Automat. Contr. 1998. V. 43(4). P. 475- 482.
90. *Brayton R. and Tong C.* Stability of dynamical systems: A constructive approach //IEEE Trans. Circuits and Systems. 1979. V. 26. P. 224-234.
91. *Brayton R. and Tong C.* Constructive stability and asymptotic stability of dynamical systems: A constructive approach //IEEE Trans. Circuits and Systems. 1980. V.27. P. 1121-1131.
92. *Cai C., Teel A.R., and Goebel R.* Smooth Lyapunov functions for hybrid systems part i: Existence is equivalent to robustness //IEEE Trans. Automat. Contr. 2007. V.52(7). P. 1264-1277.
93. *Cai C., Teel A.R., Goebel R.* Converse Lyapunov theorems and robust asymptotic stability for hybrid systems //2005 American Control Conference June 8-10, 2005. Portland, OR, USA, 2005. P. 12-17.
94. *Cassandras C.G., Pepyne D.L., and Wardi Y.* Optimal control of a class of hybrid systems //IEEE Trans. Automat. Contr. 2001. V. 46(3). P. 398-415.
95. *Cellier F.E., Elmqvist H., Otter, M. and Taylor J.H.* Guidelines for Modeling and Simulation of Hybrid Systems //Proc. IFAC World Congress, Sydney Australia, 18-23 July, 1993.
96. *Chahlaoui Y.* Model reduction of switched dynamical systems //4th Conference on Trends in Applied mathematics in Tunisia, Algeria and Morocco., Morocco, Kenitra, 2009.
97. *Cheng D., Guo L., Lin Y., and Wang Y.* Stabilization of switched linear systems //IEEE Trans. Automat. Contr. 2005. V.50(5). P. 661-666.
98. *Daafouz J., Bernussou J.* Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties //Systems & Control Letters. 2001. V. 43. P. 355-359.
99. *Daafouz J, Riedinger P. and Iung C*. Stability Analysis and Control Synthesis for Switched Systems: A switched Lyapunov function approach //IEEE transactions on automatic control. 2002. V.47. N 11. P.1883-1887.

100. *Davoren J. M. and Nerode A.* Logics for hybrid systems // Proceedings of the IEEE: Special issue on hybrid systems/ P.J.Antsaklis, editor, IEEE Press, 2000. V. 88. P. 985-1010.
101. *Davrazos G. and Koussoulas N. T.* A Review of Stability Results for Switched and Hybrid Systems //Mediterranean Conference on Control and Automatic, 2001.
102. *Dayawansa W. and Martin C.F.* A converse Lyapunov theorem for a class of dynamical systems which undergo switching //IEEE Trans. Automat. Contr. 1999. V. 44(4). P. 751-760.
103. *Decarlo R.A., Branicky M.S., Pettersson S., and Lennartson B.* Perspectives and results on the stability and Stabilizeability of hybrid systems //Proceedings of the IEEE: Special issue on hybrid systems/P.J. Antsaklis, editor, IEEE Press, 2000. V 88. P. 1069-1082.
104. *Drayton K. and Tong C.* Constructive stability and asymptotic stability of dynamical systems //IEEE Trans. Circuits and Systems, 1980. V CAS-27. P. 1121-1130.
105. *Egerstedt M. and Babaali M.* On observability and reachability in a class of discrete-time switched linear systems //Proc. 2005 American Control Conf. 2005. P. 1179-1180.
106. *Egerstedt M., Mishra B.* Hybrid systems. Computation and Control. Springer, 2008. 680 p.
107. *Fang L., Lin H., and Antsaklis P.J.* Stabilization and performance analysis for a class of switched systems //Proc. 43rd IEEE Conf. Decision Control, 2004. P. 3265-3270.
108. *Feng G.* Stability analysis of piecewise discrete-time linear systems //IEEE Trans. Automat. Contr. 2002. V. 47(7). P.1108-1112.
109. *Feron E.* Quadratic Stabilizeability of switched systems via state and output feedback //Technical Report CICS-P-468, MIT, 1996.
110. *Filippov A. F.* Differential Equations with Discontinuous Right Hand Sides. Norwell, MA: Kluwer Academic, 1988.
111. *F1ugge-Lotz J.*, Discontinuons automatic control, Princeton, 1953 (перевод на русский язык в кн. Метод фазовой плоскости в теории релейных систем. М.: Физматгиз, 1959.
112. *Ferrari-Trecate G. Cuzzola F.A. Morari M.* Lagrange Stability and Performance Analysis of Discrete-Time Piecewise Affine Systems with Logic States //International Journal of Control. 2003. V.76(16). P. 1585-1598.

113. *Gao H., Lam J., Wang C.* Model simplification for switched hybrid systems //Systems & Control Letters, 2006. V.55, N 12. P. 1015-1021.
114. *Goebel R. and Teel A.R.* Solutions to hybrid inclusions via set and graphical convergence with stability theory applications //Automatica. 2006. V. 42(4). P. 573-587.
115. *Goncalves J.M., Megretski A., and Dahleh M.A.* Global analysis of piecewise linear systems using impact maps and surface Lyapunov functions //IEEE Trans. Automat. Contr. 2003. V. 48(12). P.2089-2106.
116. *Grujic L.T., Siljak D.D.* Stability of large-scale systems with stable and unstable subsystems //IACC conf., Paper 17-3, 1972. P.550-555.
117. *Gurvits L., Shorten R., and Mason O.* On the stability of switched positive linear systems //IEEE Trans. Automat. Contr. 2007. V. 52(6). P. 1099-1103.
118. *Haddad W.M. & Chellaboina V.S.* Nonlinear Dynamical Systems and Control. A Lyapunov-Based Approach. Princeton: Princeton University Press, 2008. 899 p.
119. *Haddad W.M., Chellaboina V.S., Nersesov S.G.* Impulsive and Hybrid Dynamical Systems: Stability, Dissipativity and Control. Princeton: Princeton University Press, 2006. 520 p.
120. *Hassibi A. and Boyd S.* Quadratic stabilization and control of piecewise-linear systems, in Proceedings of the American Control Conference, Philadelphia, 1998. P.3659–3664.
121. *Heemels W. P. M. H., De Schutter B., Lunze J. and Lazar M.* Stability analysis and controller synthesis for hybrid dynamical systems//Phil. Trans. R. Soc. A 13, 2010. V. 368. N 1930. P. 4937-4960
122. *Hespanha J.P.* Stabilization through hybrid control // Encyclopedia of Life Support Systems (EOLSS)/ H. Unbehauen, editor, vol. Control Systems, Robotics, and Automation. Oxford, UK, 2004.
123. *Hespanha J P.* Uniform stability of switched linear systems: Extensions of LaSalle's Invariance Principle //IEEE Trans Autom Control. 2004. V. 49(4). P. 470-482.
124. *Hespanha J.P., Liberzon D., Angeli E., et al.* Nonlinear observability notion and stability of switched systems //IEEE Trans Autom Control. 2005. V. 50(2). P. 154-168.

125. *Hespanha J. P. and Morse A.S.* Stability of switched systems with average dwell-time //Proc. 38th IEEE Conf. Decision Control. 1999. P. 2655-2660.
126. *Holcman D., Margaliot M.* Stability Analysis of Second-Order Switched Homogeneous Systems// SIAM Journal on Control and Optimization. 2003. V. 41. N 5. P. 1609-1625.
127. *Huang Z., Xiang C., Lin H., and Lee T.H.* A stability criterion for arbitrarily switched second-order LTI systems //Proc. 2007 IEEE 2007 IEEE Conf. Control and Automation. 2007. P. 951-956.
128. *Ji Z., Wang L., and Guo X.* Design of switching sequences for controllability realization of switched linear systems. //Automatica. 2007. V. 43(4). P. 662-668.
129. *Ji Z., Feng G., and Guo X.* A constructive approach to reachability realization of discrete-time switched linear systems //Syst. Contr. Lett. 2007. V. 56(11-12). P. 669-677.
130. *Johansson M.* Piecewise Linear Control Systems - A Computational Approach /Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer-Verlag, 2002. V. 284.
131. *Johansson M. and Rantzer A.* Computation of Piecewise Quadratic Lyapunov Functions for Hybrid Systems//IEEE Trans. on automatic control. 1998. V. 43. N 4. P. 555-559
132. *Kurzhanski A.B., Mitchell I.M., Varaiya P.* Ellipsoidal Techniques for Hybrid Dynamics: the Reachability Problem //J. of Optimization Theory and Applications. 2006. V.128 (3). P. 499-521.
133. *Kurzhanski A. B., Varaiya P.* Ellipsoid techniques for hybrid dynamics: the reachability problem //New Directions and Applications in Control Theory, Lecture Notes in Control and Information Sciences// W.P. Dayawansa, A. Lindquist, and Y. Zhou (Eds). Springer, 2005. V. 321. P. 193-205.
134. *Laffey T. and Smigoc H.* Tensor conditions for the existence of a common solution to the Lyapunov equation //Linear Algebra and its Applications. 2007. V. 420. P. 672-685.
135. *Lakshmikantham V., Leela S.* Cone Valued Lyapunov Functions and Large-Scale Systems //AACC Proc. Joint Autom. Control Conf. N.Y., 1979. P.113- 116.
136. *Lakshmikantham V., Leela S., Martynyuk A.A.* Stability Analysis of Nonlinear Systems. Marcel, New York and Basel: Dekker Inc, 1989.

137. *Lakshmikantham V., Matrosov V.M., Sivasundaram S*. Vector Lyapunov Functions and Stability Analysis of Nonlinear Systems. N.Y.: Kluver Acad. Publ., 1991.
138. *Lazar M., Heemels M., Weiland S., Bemporad A., and Pastravanu O.* Infinity norms as Lyapunov functions for model predictive control of constrained PWA systems //Hybrid Systems: Computation and Control, V. 3414 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, 2005. P. 417-432.
139. *Liberzon D.* Switching in systems and control. - Boston: Birkhäuser, 2003. 233 p.:
140. *Liberzon D., Hespanha J.P., and Morse A.S*. Stability of switched linear systems: A Lie-algebraic condition //Syst. Contr. Lett., 1999. V. 37(3). P. 117-122.
141. *Liberzon D. and Morse A.S*. Basic problems in stability and design of switched systems //IEEE Contr. Syst. Magazine. 1999. V. 19(5). P. 59-70.
142. *Liberzon D. and Tempo R*. Common Lyapunov functions and gradient algorithms //IEEE Trans. Automat. Contr. 2004. V. 49(6). P. 990-994.
143. *Lin H. and Antsaklis P.J.* Persistent disturbance attenuation properties for networked control systems //Proc. 43rd IEEE Conf. Decision Control. 2004. P. 953-958.
144. *Lin H., Antsaklis P.J.* Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: A Survey of Recent Results // IEEE Transactions on Automatic Control. 2009. V.54. N 2. P. 308-322.
145. *Lin H., Zhai G., and Antsaklis P.J.* Robust stability and disturbance attenuation analysis of a class of networked control systems //Proc. 42nd IEEE Conf. Decision Control. 2003. P. 1182-1187.
146. *Malikov A.I.* Vector Lyapunov Functions in the Problems of Reliability and Vitality of Dynamic Systems // The Lyapunov Function Method and Applications/ Eds. P.Borne, V.Matrosov. IMACS. 1990. P.141-145.
147. *Mancilla-Aguilar J. L. and Garc´ıa R.A.* A converse Lyapunov theorem for nonlinear switched systems //Syst. Control Lett. 2000. V. 41(1). P. 67-71.
148. *Mancilla-Aguilar J L, Garcia R A.* An extension of LaSalle's invariance principle for switched systems //Syst. Control Lett. 2006. V.55. P. 376-384.

149. *Margaliot M.* Stability analysis of switched systems using variational principles: An introduction //Automatica 2006. V. 42(12). P. 2059-2077.
150. *Margaliot M. and Langholz G.* Necessary and sufficient conditions for absolute stability: the case of second-order systems //IEEE Trans. Circuits Syst. 2003. V. 50(2). P. 227-234.
151. *Margaliot M. and Liberzon D.* Lie-algebraic stability conditions for nonlinear switched systems and differential inclusions //Syst. Control Lett. 2006. V.5(1) P.8-16.
152. *Mason P., Sigalotti M. and Daafouz J.* On stability analysis of linear discrete-time switched systems using quadratic Lyapunov functions //IEEE Transactions on Circuits and Systems. Part I, Regular Papers. 2008. V.55. N 6. P. 1695-1703
153. *Mazzi E., Vincentelli A. S., Balluchi A., and Bicchi A.* Hybrid system model reduction //IEEE Int. Conf. on Decision and Control. 2008.
154. *Michel A. N.* Recent trends in the stability analysis of hybrid dynamical systems //IEEE Trans. Circuits Syst. 1999. V. 46(1). P. 120-134,
155. *Michel A.N., Wang K., Hu B.* Qualitative Theory of Dynamical Systems. The Role of Stability-Preserving Mappings. N.Y., 2000.
156. *Mitra S., Liberzon D., and Lynch N.* Verifying average dwell time of hybrid systems //ACM Transactions in Embedded Computing Systems. 2006.
157. Molchanov A.P. and Pyatnitskii E.S. Lyapunov functions that specify necessary and sufficient conditions of absolute stability of nonlinear non stationary control systems. III //Autom. Remote Control. 1986. V.47. P. 620-630.
158. *Molchanov A. P., Pyatnitskiy E.* Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory //Systems and Control Letters. 1989. V.13. P. 59-64.
159. *Morse A.S.* Supervisory control of families of linear set-point controllers - part 1: Exact matching //IEEE Trans. Automat. Contr. 1996. V. 41(10). P. 1413-1431.
160. *Narendra K. S. and Balakrishnan J.* A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting A-matrices //IEEE Trans. Automat. Contr. 1994. V. 39(12) P. 2469-2471.
161. *Papachristodoulou A. and Prajna S.* A tutorial on sum of squares techniques for systems analysis //Proc. 2005 American Control Conf. 2005.

162. *Perron O.,* Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen //Math. Zeitschrift. 1930. V. 32. N5. P. 703- 728.
163. *Pettersson S*. Synthesis of switched linear systems //Proc. 42nd IEEE Conf. Decision Control. 2003. P. 5283-5288.
164. *Pettersson S. and Lennartson B*. Stabilization of hybrid systems using a min-projection strategy //Proc. 2001 American Contr. Conf. 2001. P. 223-228.
165. *Pettersson S. and Lennartson B*. Hybrid system stability and robustness verification using linear matrix inequalities //Inter. J. Contr. 2002. V. 75(16-17). P. 1335-1355.
166. *Platzer A*. Logical Analysis of Hybrid Systems: Proving Theorems for Complex Dynamics. Springer, 2010. 426 p.
167. *Polan′ski A*. On absolute stability analysis by polyhedral Lyapunov functions //Automatica. 2000. V. 36(4). P. 573-578.
168. *Prajna S. and Papachristodoulou A*. Analysis of switched and hybrid systems - beyond piecewise quadratic methods //In Proc. 42nd IEEE Conf. Decision Control. 2003. P. 2779-2784.
169. *Pyatnitskiy E. S. and Rapoport L. B*. Criteria of asymptotic stability of differential inclusions and periodic motions of time-varying nonlinear control systems //IEEE Trans. Circuits Syst. 1996. V. 43(3). P. 219-229.
170. *Rantzer A. and Johansson M*. Computation of piecewise quadratic Lyapunov functions for hybrid systems //IEEE Trans. Automat. Contr. 1998. V. 43(4). P. 555-559.
171. *Rantzer A. and Johansson M*. Piecewise linear quadratic optimal control //IEEE Trans. Automat. Contr. 2000. V. 45(4). P. 629-637.
172. *Reza H. Jonathan H.* How P. Stability Analysis for Class of Switched Nonlinear Systems //American Control Conference (ACC). 2010. P. 2517-2520.
173. *Rosier L*. Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector fields //Systems Control Lett. 1992. V. 19(6). P 467-473.
174. *Santos I.L.D., Silva G.N.* Some Results in Stability Analysis of Hybrid Dynamical Systems //Tend. Mat. Apl. Comput. 2007. V.8, N 3. P. 453-462.
175. *Savkin A. V. and Evans R.J.* Hybrid dynamical systems: controller and sensor switching problems. Birkhauser, Boston, 2002.

176. *Sell G. R.* Stability theory and Lyapunov’s second method //Arch. Rational Mech. Anal. 1963, V. 14, P. 108-126.
177. *Siljak D.D.* Stability of Large-Scale Systems under Structural Perturbations //IEEE Trans. Syst. Man. and Cybern. 1972. V.2, N 2. P. 657-663.
178. *Siljak D.D.* Stability of large-scale systems under structural perturbations //IEEE Tranc. Syst. Man and Cibern. 1973. - V.3, N 4.- C.415-417.
179. *Siljak, D.D.* Large-Scale Dynamic Systems: Stability and Structure. New York: North-Holland, 1978. - 416 p.
180. *Shorten R., Mason O., Cairbre F.O. and Curran P. A* unifying framework for the SISO circle criterion and other quadratic stability criteria. //Inter. J. Contr. 2004. V.77(1). P.1-8.
181. *Shorten R. and Narendra K.* Necessary and sufficient conditions for the existence of a common quadratic Lyapunov function for two stable second order linear time-invariant systems //In Proc. 1999 American Contr. Conf. 1999. P. 1410-1414.
182. *Shorten R. and Narendra K.* Necessary and sufficient conditions for the existence of a CQLF for a finite number of stable LTI systems. //International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. 2002. V. 16(10) P.709-728.
183. *Shorten R., Narendra K., and Mason O.* A result on common quadratic Lyapunov functions //IEEE Trans. Automat. Contr. 2003. V. 48(1). P. 110 - 113.
184. *Shorten R. ,Wirth F., Mason O., Wulff K., King C.* Stability Criteria for Switched and Hybrid Systems. SIAM Review //The Flagship Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. 2007. V.49(4). P. 545-592.
185. *Skafidas E., Evans R.J., Savkin A.V., and Petersen I.R.* Stability results for switched controller systems //Automatica. 1999. V. 35(4). P. 553-564.
186. *Sun Z.* Stabilizeability and insensitivity of switched linear systems. //IEEE Trans. Automat. Contr. 2004. V. 49(7). P. 1133-1137.
187. *Sun Z. and Ge S.* Analysis and synthesis of switched linear control systems //Automatica. 2005. V. 41(2). P. 181-195.
188. *Sun Z. and Ge S.* Switched linear systems: Control and design. Springer-Verlag, 2005.

189. *Sun Z., Ge S., and Lee T.H.* Controllability and reachability criteria for switched linear systems //Automatica. 2002. V. 38(5). P. 775-786.
190. *Tabuada P.* Verification and Control of Hybrid Systems. A Symbolic Approach. Dordrecht Heidelberg London New York: Springer, 2009. 202 p.
191. *Tavernini L.* Differential automata and their discrete simulators. Nonlinear analysis, Theory, Methods and Applications. 1987. V. 11(6). P. 665-683.
192. *Teel A.R.* Robust hybrid control systems: an overview of some recent results //Advances in Control Theory and Applications / Bonivento, C.; Isidori, A.; Marconi, L.; Rossi, C. (Eds.). Springer, 2007. V. 353. P. 279-302.
193. *Tolstonogov A.A.* Differential inclusions in a Banach space. Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publisher, 2000. 302 p.
194. *Tomlin C. J., Mitchell I. M., Bayen A. M. and Oishi M.* Computational techniques for the verification of hybrid systems //Proceedings of the IEEE. 2003. V. 91(7). P. 986-1001.
195. *Vassilyev S.N.* Homomorphisms of Impulsive Differential Equations with Impulses at Unfixed Times and Comparison Method //Intern. J. of Hybrid Systems, 2002. V.2. № 3. P. 289-296.
196. *Vassilyev S.N., Kozlov R.I., Sivasundaram S.* Toward a qualitative theory of systems with discrete-continuous time and impulsive effects // Proc. of ICNPAA-2000. V. 2. Europ. Conf. Publishers. Cambridge, UK, 2001. P. 667–680.
197. *Vassilyev S.N., Sivasundaram S.* Stability and Attractivity of Solutions of Differential Equations with Impulses at Fixed Times //J. of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. 2000. V. 13. № 1. P. 77-84.
198. *Van Der Schaft A., Schumacher H.* An Introduction to Hybrid Dynamical Systems Springer. 2000. 190 p.
199. *Volkman P.* Gewohnliche Differential ungleichungen mit Quasimonoton Wachsenden Funktionen in Topologischen Vektorraumen// Math. Z. 1972. V.127. P. 127-157.
200. *Wang J., Cheng D.* Stability of Switched Nonlinear Systems via extension of LaSalle's Invariance Principle// Sci China SerF-Inf Sci. 2009. V.52. N 1. P. 84-90.

201. *Witsenhausen H.S.* A class of hybrid-state continuous time dynamic systems //IEEE Transactions on Automatic Control. 1966. V.11(2). P.161-167.
202. *Wulff K., Shorten R. and Curran P*. On the 45 degree region and the uniform asymptotic stability of classes of second order parameter varying and switched systems //Internat. J. Control. 2002. V. 75. P. 812-823.
203. *Xu X. and Antsaklis P.J.* Optimal control of switched systems based on parameterization of the switching instants //IEEE Trans. Automat. Contr. 2004. V. 49(1). P. 2-16.
204. *Ye H., Michel A. N., and Hou L.* Stability theory for hybrid dynamical systems //IEEE Trans. Automat. Contr. 1998. V. 43(4). P. 461-474.
205. *Yfoulis C. and Shorten R.* A numerical technique for stability analysis of linear switched systems //Inter. J. Contr. 2004. V. 77(11). P. 1019-1039.
206. *Zhai G., Hu B., Yasuda K., and Michel A. N.* Disturbance attenuation properties of time-controlled switched systems //J. Franklin Inst. 2001. V.338. P. 765-779.
207. *Zhai G., Hu B., Yasuda K., and Michel A. N.* Qualitative analysis of discrete-time switched systems //In Proc. 2002 American Contr. Conf. 2002. V. 3. P. 1880-1885.
208. *Zhai G. and Lin H.* Controller failure time analysis for symmetric $H\infty$ control systems //Inter. J. Contr. 2004. V. 77(6). P. 598-605.
209. *Zhai G., Xu X., Lin H., and Michel A. N*. Analysis and design of switched normal systems //Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. 2006. V. 65(12). P. 2248-2259.
210. *Zhang L., Liu S. and Lan H.* On stability of switched homogeneous nonlinear systems// Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2007. V. 334. N 1. P. 414-430.