

УДК 532.546

# **ОРГАНИЗАЦИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ТЕНЗОРОВ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРОНИЦАЕМОСТЕЙ НЕОДНОРОДНОГО АНИЗОТРОПНОГО ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОГО ПЛАСТА**

**Р.В. Садовников**  
sadovnikov@mail.knc.ru

Рассматривается организация параллельных вычислений для реализации на многопроцессорном кластере с распределенной памятью метода идентификации тензоров коэффициентов проницаемостей трещин и блоков неоднородного анизотропного трещиновато-пористого пласта.

## **Введение**

Практика эксплуатации месторождений нефти и газа требует учета не только неоднородности коллекторских свойств пласта, но и тензорной природы коэффициента проницаемости. Традиционный учет анизотропии предполагает, что направления главных осей тензора коэффициентов проницаемости точно известны и совпадают с направлениями координатных осей. Для большинства реальных залежей указанные условия не выполняются. Таким образом, в общем случае такой подход к учету анизотропии коллекторских свойств в постановках задач теории фильтрации не пригоден для оценки продуктивных характеристик реальных пластов. Особенно это касается карбонатных коллекторов, отличающихся трещиновато-пористым строением [1]. Причем, тензорная природа коэффициентов проницаемости системы трещин и блоков породы может значительно отличаться, как коэффициентами, так и направлением главных осей. Такая «вложенная» анизотропия коэффициентов проницаемостей трещиновато-пористого пласта в настоящее время практически не исследована. Это объясняется тем, что значения компонент тензоров коэффициентов проницаемостей трещин и блоков не могут быть измерены непосредственно.

Для получения оценок тензора коэффициентов проницаемостей требуется решение обратной задачи, т.е. задачи идентификации параметров пласта на основе фактических данных эксплуатации скважин, которые несут в себе информацию о коллекторских свойствах пласта. Решение задачи идентификации сводится к минимизации функционала-невязки между наблюдаемыми и вычисленными давлениями на скважинах. Такие задачи, как известно, являются некорректными [2].

Сложность решения обратных задач идентификации фильтрационных параметров заключается в том, что для их решения требуется многократное решение прямых задач, описывающих процесс фильтрации, что для больших задач требует значительных вычислительных ресурсов. Повышенные требования к вычислительным ресурсам обусловлены нестационарностью, трехмерностью рассматриваемых процессов, неоднородностью физических характеристик пласта и др. Поэтому для решения этих задач за приемлемое время невозможно обойтись без методов параллельного программирования на многопроцессорных вычислительных системах, основанных на геометрической декомпозиции расчетной области на подобласти. В работе авторов [3] подробно обсуждаются вопросы применения параллельных вычислений для решения задачи фильтрации жидкости к скважинам со сложной траекторией ствола (вертикальным, наклонным, горизонтальным и др.) в трещиновато-пористом пласте произвольной конфигурации с «вложенной анизотропией» коэффициентов проницаемостей.

В настоящей работе обсуждается организация параллельных вычислений для метода идентификации тензоров коэффициентов проницаемости трещин и блоков неоднородного анизотропного трещиновато-пористого пласта на многопроцессорном кластере с распределенной памятью.

### **Постановка обратной задачи**

Обратная задача состоит в определении параметров пласта, при которых минимизируется следующий функционал:

$$\min_{\mathbf{b} \in D_b} E(\mathbf{b}), E(\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{N_w} \int_0^{T_i} (p_i^H(t) - p_i^G(\mathbf{b}, t))^2 dt, \quad (1)$$

где  $\mathbf{b} = \{b_i\}_{i=1}^N$  - вектор искоемых параметров,  $N$  - число определяемых параметров;  $D_b$  - множество допустимых значений параметров;  $N_w$  - количество скважин в пласте;  $T_i$  - общее время исследования скважины с номером  $i$ ;  $p_i^H$  - значение забойного давления, замеренное в результате промыслового эксперимента на момент времени  $t$  в скважине с номером  $i$ ;  $p_i^G$  - значение забойного давления, вычисленное на тот же момент времени в результате решения трехмерной задачи фильтрации в трещиновато-пористом пласте.

В данной работе использовалась модель фильтрации однофазной жидкости в упругом трещиновато-пористом пласте, основанная на концепции взаимопроникающих континуумов (система трещин и блоков) с учётом обмена жидкостью между ними, которая была предложена Г.И. Баренблаттом и др. [4]. При учёте анизотропии коэффициентов проницаемости системы трещин и блоков модель описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \beta_1^* \frac{\partial p_1}{\partial t} &= \nabla \left( \frac{\mathbf{k}_1}{\mu} \nabla p_1 \right) + \frac{\alpha}{\mu} (p_2 - p_1), \\ \beta_2^* \frac{\partial p_2}{\partial t} &= \nabla \left( \frac{\mathbf{k}_2}{\mu} \nabla p_2 \right) - \frac{\alpha}{\mu} (p_2 - p_1), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $(x, y, z) \in D$ ,  $0 < t \leq T$ ,  $t$  - время,  $T = \max_{1 \leq i \leq N_w} T_i$  - общее время

исследований,  $\beta_l^* = \beta_{ckl} + m_l \beta_{жс}$  - коэффициент упругоёмкости пласта,  $\beta_{ckl}$  - коэффициент сжимаемости скелета,  $m_l$  - коэффициент пористости,  $\beta_{жс}$  - коэффициент сжимаемости жидкости,  $p_l$  - давление жидкости,  $\mu$  - коэффициент динамической вязкости жидкости,  $\alpha$  - параметр перетока жидкости между трещинами и блоками,  $\mathbf{k}_l$  - тензор коэффициентов проницаемости. Индекс 1 относится к трещинам, 2 - к блокам матрицы породы. Область фильтрации представлена многосвязной областью фильтрации  $D$ , внутренние поверхности которой образованы скважинами,

представляющими собой цилиндрическую полость определенного радиуса и траектории. Рассматривались скважины с различной формой траектории ствола: вертикальные, наклонные, горизонтальные и др. На скважинах задавались граничные условия первого или второго рода:

$$p_1(x, y, z, t) = p_2(x, y, z, t) = p_{wi}(t), \quad (3)$$

$$0 \leq t \leq T, (x, y, z) \in \partial S_i^P, i = 1, 2, \dots, N_w^P,$$

$$\left( \frac{k_1}{\mu} \nabla p_1, \mathbf{n}_j \right) + \left( \frac{k_2}{\mu} \nabla p_2, \mathbf{n}_j \right) = q_j(x, y, z, t), \quad (4)$$

$$0 \leq t \leq T, (x, y, z) \in \partial S_j^q, j = 1, 2, \dots, N_w^q,$$

где  $p_{wi}(t)$  - давление на поверхности скважины  $\partial S_i^P$ ,  $N_w^P$  - количество таких скважин;  $q_j$  - объемный расход жидкости, приходящийся на единицу поверхности скважины  $\partial S_j^q$ ,  $\mathbf{n}_j$  - вектор внешней нормали,  $N_w^q$  - количество таких скважин. Граничные условия на внешней поверхности пласта также могут быть заданы условиями первого или второго рода:

$$p_1(x, y, z, t) = p_2(x, y, z, t) = p_{nлj}(x, y, z, t), \quad (5)$$

$$(x, y, z) \in \partial D_j^P, j = 1, 2, \dots, N^P,$$

$$\left( \frac{k_1}{\mu} \nabla p_1, \mathbf{n}_j \right) + \left( \frac{k_2}{\mu} \nabla p_2, \mathbf{n}_j \right) = q_j^*(x, y, z, t), \quad (6)$$

$$(x, y, z) \in \partial D_j^q, j = 1, 2, \dots, N^q,$$

где  $p_{nлj}$  - давление жидкости на части внешней поверхности пласта  $\partial D_j^P$ ;  $q_j^*$  - объемный расход жидкости, приходящийся на единицу внешней поверхности пласта  $\partial D_j^q$ ,  $\partial D = \partial D^P \cup \partial D^q$  - внешняя поверхность пласта,  $\partial D^P = \bigcup_{j=1}^{N^P} \partial D_j^P$ ,  $\partial D^q = \bigcup_{j=1}^{N^q} \partial D_j^q$ . Начальные условия имеют вид:

$$p_1(x, y, z, 0) = p_1(x, y, z), p_2(x, y, z, 0) = p_2(x, y, z), (x, y, z) \in D. \quad (7)$$

Объемный дебит скважины вычисляется по формуле:

$$\int_{\partial S_j^q} q_j(x, y, z, t) ds = Q_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, N_w^q. \quad (8)$$

Для получения значения забойного давления на скважине используются дополнительные условия: равенство давления в трещинах и блоках породы на поверхности скважины

$$p_1(x, y, z, t) = p_2(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in \partial S_j^q, \quad j = 1, 2, \dots, N_w^q. \quad (9)$$

и постоянство давления на поверхности скважины. Эти два условия в сочетании с формулой (8) позволяют записать для скважины, на которой задан объемный расход, дополнительное уравнение для определения забойного давления.

Используя формулу трапеций, функционал (1) можно представить в виде:

$$E(\mathbf{b}) \cong \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_w} \mathbf{f}_i^T \mathbf{W}_i \mathbf{f}_i = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{T} \mathbf{F}, \quad (10)$$

где  $\mathbf{T} = \text{diag} \{ \mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_{N_w} \}$ ,  $\mathbf{W}_i = \text{diag} \{ \Delta t_{i1}, \Delta t_{i1} + \Delta t_{i2}, \dots, \Delta t_{iN_{T_i}} \}$  - диагональная матрица, элементы которой зависят от временных шагов;  $\mathbf{F} = \{ \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{N_w} \}^T$  - вектор невязок давлений на скважинах, где  $\mathbf{f}_i = \{ f_{i1}, f_{i2}, \dots, f_{iN_{T_i}} \}^T$  - изменение невязки давления с течением времени на скважине с номером  $i$ ,  $f_{il} = p_i^H(t_l) - p_i^e(\mathbf{b}, t_l)$  - невязка давления,  $N_{T_i}$  - количество замеров давления на скважине с номером  $i$ .

Искомыми коэффициентами, от которых зависит решение обратной задачи, являются компоненты тензоров коэффициентов проницаемостей трещин и блоков, то есть вектор искомых параметров имеет вид:

$$\mathbf{b} = \{ \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2 \} = \{ k_{1xx}, k_{1xy}, \dots, k_{1zz}; k_{2xx}, k_{2xy}, \dots, k_{2zz} \}.$$

Постановка и решение обратной задачи идентификации фильтрационных параметров в круговом трещиновато-пористом пласте с одиночной скважиной рассматривались в [5], но без учета анизотропии.

## Метод решения обратной задачи

Среди методов идентификации выделяют два основных класса: методы теории оптимального управления и методы, основанные на коэффициентах чувствительности [6]. В методах теории оптимального управления для поиска искомым параметров пласта используется градиент функционала, подсчет которого осуществляется на решении сопряженной системы уравнений. Коэффициенты чувствительности используются для приближенного подсчета матрицы вторых производных от функционала-невязки [6].

Для решения обратной задачи применяется метод Левенберга – Марквардта (Л.-М.), который является модификацией метода Гаусса - Ньютона [6]. В методе Л.-М. итерационная последовательность для уточнения вектора искомым параметров строится в виде:

$$\mathbf{b}_{n+1} = \mathbf{b}_n - \left( \mathbf{A}_n^T \mathbf{T} \mathbf{A}_n + \lambda \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{A}_n^T \mathbf{T} \mathbf{F}_n, \quad (11)$$

где  $\lambda$  - параметр Л.-М.,  $\mathbf{A}$  - матрица коэффициентов чувствительности, которая имеет следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial b_1} & \frac{\partial f_1}{\partial b_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial b_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial b_1} & \frac{\partial f_2}{\partial b_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial b_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{N_w}}{\partial b_1} & \frac{\partial f_{N_w}}{\partial b_2} & \cdots & \frac{\partial f_{N_w}}{\partial b_N} \end{bmatrix},$$

где  $\partial f_i / \partial b_j$  – коэффициенты чувствительности. Для вычисления коэффициентов чувствительности применяется метод непосредственного дифференцирования уравнений прямой задачи (2)-(7) по искомым параметрам. Поскольку уравнения для определения коэффициентов чувствительности идентичны уравнениям (2)-(7) прямой задачи, для их решения можно применить одну и ту же численную схему [6,7]. Решая численным методом задачу для коэффициентов чувствительности, можно получить все коэффициенты чувствительности и сформировать матрицу коэффициентов чувствительности  $\mathbf{A}$ .

### **Метод решения прямой задачи**

Для решения задачи (2)-(7) использовался метод конечных элементов на неструктурированной сетке тетраэдров, удовлетворяющих критерию Делоне, и сгущающейся к скважинам из-за необходимости уменьшения размера элементов в окрестности скважин. Поскольку в каждой точке пласта имеется два давления, то каждый узел расчетной области имеет две степени свободы. Аппроксимация уравнений строилась методом взвешенных невязок в сочетании с методом Галеркина, а для аппроксимации производной по времени использовалась неявная схема [8].

После учета граничных условий матрица результирующей системы уравнений несимметрична и имеет разреженную структуру. Вместо хранения всех  $2 \times n$  ( $n$  - количество узлов расчетной области) элементов матрицы учитываются только ненулевые элементы. Однако при большом числе узлов сетки  $n$  требуются значительные ресурсы памяти и процессорного времени для ее использования. Эти требования могут быть критичны для расчетов на одном процессоре. Поэтому для решения таких систем уравнений за приемлемое время необходимо применение параллельных вычислений на многопроцессорных вычислительных системах.

### **Применение параллельных вычислений**

Сложность решения обратной задачи идентификации заключается в том, что на каждом шаге итерационного метода (11) для каждого из  $N$  идентифицируемых параметров требуется решить задачу для вычисления матрицы коэффициентов чувствительности и один раз решить прямую задачу (2)-(7) для получения нового значения функционала (10), то есть решить  $N + 1$  прямую задачу. Для решения этих задач за приемлемое время невозможно обойтись без методов параллельного программирования на многопроцессорных вычислительных системах, основанных на геометрической декомпозиции расчетной области на подобласти, число которых равно числу процессоров. В работе авторов [3] подробно обсуждаются вопросы применения параллельных вычислений для решения задачи фильтрации жидкости к скважинам со сложной траекторией ствола (вертикальным, наклонным, горизонтальным и

др.) в трещиновато-пористом пласте произвольной конфигурации с «вложенной анизотропией» коэффициентов проницаемостей. Рассмотрены этапы численного решения задачи на многопроцессорной вычислительной системе и способ учета скважин. Исследована производительность параллельных вычислений в зависимости от количества процессоров.

Особенности параллельной реализации алгоритма идентификации тензоров коэффициентов проницаемостей трещин и блоков неоднородного трещиновато-пористого пласта состоят в выборе модели вычислений для итерационной последовательности (11). Способ реализации зависит от архитектуры используемой вычислительной системы. Рассмотрим способ реализации алгоритма для кластера с распределенной памятью, который использовался в работе [7] и представляет набор из  $n_p$  вычислительных модулей, каждый из которых имеет центральный процессор со своей оперативной памятью. Обмен сообщениями между процессорами организуется с помощью технологии MPI.

Поскольку рассматриваемый пласт является неоднородным и анизотропным по структуре относительно тензоров коэффициентов проницаемостей трещин и блоков породы, то пласт разбивается на зоны в каждой из которых тензоры проницаемости трещин и блоков постоянны (зоны однородности). Границы областей могут выбираться на основании некоторой априорной информации, известной, например, из геологической модели пласта, а могут считаться неизвестными, определяемыми в ходе решения обратной задачи. В данной работе границы зон однородности считались известными.

Согласно методу декомпозиции, каждый процессор будет иметь доступ к своей части расчетной области. При этом разбиение области на подобласти происходит так, чтобы равномерно загрузить процессоры и минимизировать пересылки между процессорами при расчетах. Это достигается использованием специальных программ [9]. При этом границы зон однородности проницаемости естественно могут не совпадать с областями разбиения расчетной области.

При решении обратной задачи уточнение неизвестных значений коэффициентов проницаемостей определяется итерационной



последовательностью (11). Матрица коэффициентов чувствительности имеет размер  $N \times N$ , где  $N$  - общее количество идентифицируемых параметров. В задачах, в которых число параметров велико, требуется также распределить по процессорам матрицу коэффициентов чувствительности. Однако, поскольку современные центральные процессоры позволяют достаточно эффективно обрабатывать матрицы порядка нескольких десятков тысяч элементов, то в данной работе, не усложняя алгоритм, было решено хранить всю матрицу коэффициентов чувствительности на одном процессоре (например, на процессоре с индексом 0), а результаты уточнения параметров по формуле (11), т.е. новое приближение тензоров коэффициентов проницаемостей рассылать затем всем процессорам. После этого каждым процессором собираются матрицы коэффициентов задачи в разреженной форме. Реализация такой схемы была оформлена в виде класса на языке C++. В тех случаях, когда обращение матрицы коэффициентов чувствительности становится "узким местом" метода необходимо, как это уже упоминалось выше, распределить матрицу коэффициентов чувствительности по процессорам. Такая организация вычислений позволяет использовать несколько вычислительных узлов для реализации алгоритма идентификации на многопроцессорном кластере с распределенной памятью.

### **Численные результаты**

Расчеты проводились на вычислительном кластере с параллельной архитектурой МКВС-Е112, установленном в Институте механики и машиностроения КазНЦ РАН. Кластер состоит из 4 модулей. Каждый модуль оснащен двумя процессорами AMD Opteron 246 2.0 ГГц и 2 Гб оперативной памяти. На модулях и основной управляющей ЭВМ, которая одновременно выполняет функции сервера доступа, установлена свободно распространяемая операционная система Linux Fedore Core 2.0. Выполнение параллельных задач обеспечивает система управления прохождением задач МВС-1000/7.

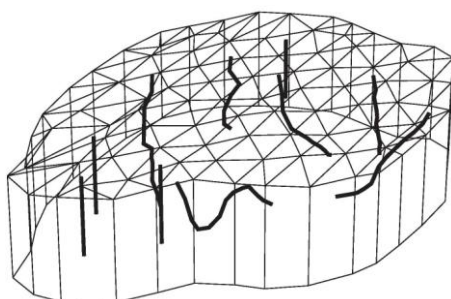


Рис. 1. Схема пласта и расположение скважин

Схема пласта и расположение скважин представлены на рис. 1. Для расчетов использовались следующие данные: размеры параллелепипеда, описанного вокруг пласта составляют  $2000 \text{ м} \times 1566 \text{ м} \times 500 \text{ м}$ ; на боковой поверхности пласта задавалось давление  $p_{nl} = 10,0 \text{ МПа}$ ; вязкость нефти  $\mu = 25 \text{ мПас}$ ; кровля и подошва пласта непроницаемые. Траектория каждой из скважин задавалась координатами точек ее оси. Радиусы всех скважин были одинаковы и равны  $0,1 \text{ м}$ . Время работы скважин до остановки  $T = 8,64 \cdot 10^5 \text{ с}$ . Объемные дебиты скважин варьировались от  $2,479 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{с}$  до  $6,216 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{с}$ .

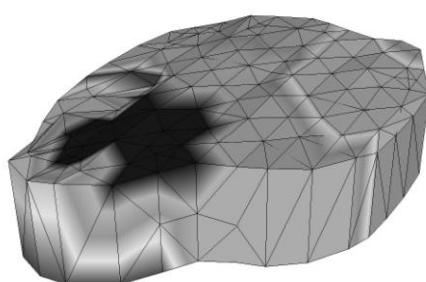


Рис. 2. Зоны однородности тензора коэффициентов проницаемости в пласте

Пласт разбивался на 8 зон однородности, в каждой из которых задавались следующие параметры: коэффициент перетока  $\alpha = 10^{-18}$ , коэффициент сжимаемости жидкости  $\beta_{жс} = 10^{-7} \text{ МПа}^{-1}$ , коэффициент сжимаемости трещин  $\beta_{ск1} = 10^{-4} \text{ МПа}^{-1}$ , коэффициент сжимаемости

блоков  $\beta_{ck1} = 10^{-6} \text{МПа}^{-1}$ ,  $m_1 = 0,01$ ,  $m_2 = 0,2$ . Компоненты тензора коэффициентов проницаемости системы трещин и блоков задавались в каждой из зон. На рис. 2 представлены зоны однородности для тензоров, а на рис. 3 значения тензоров коэффициентов проницаемостей трещин и блоков для каждой из зон однородности.

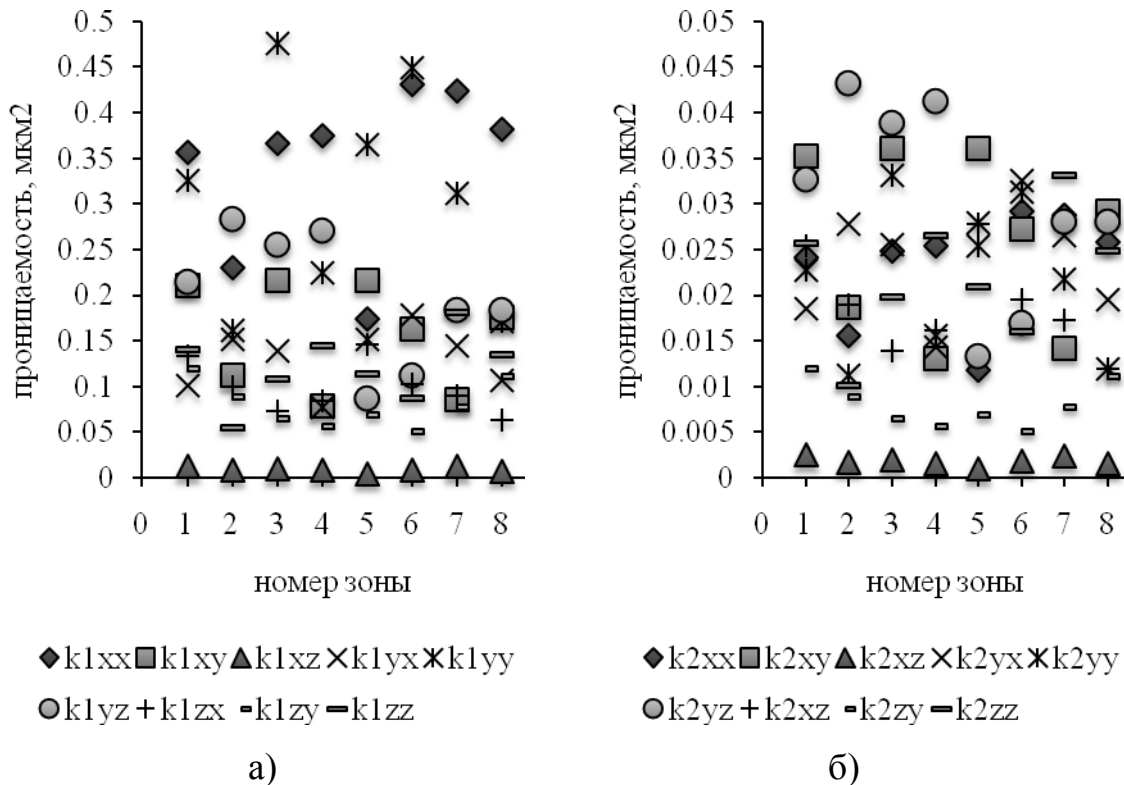


Рис. 3. Значения тензоров коэффициентов проницаемостей: а) трещин, б) блоков

Общее количество идентифицируемых значений тензоров коэффициентов проницаемости во всех 8 зонах однородности 144 (по 9 компонент у двух тензоров в каждой из 8 зон однородности). Количество скважин  $N_w = 10$ , количество замеров  $N_{T_i} = 10$ ,  $i = 1, \dots, N_w$ .

### ***Результаты решения прямой задачи***

Система алгебраических уравнений, которая получалась при численном решении прямой задачи и задачи для коэффициентов чувствительности, на каждом временном слое решалась методами

подпространств Крылова, реализованными в библиотеке Aztec [10], с полиномиальным предобуславливанием по методу наименьших квадратов и методу Неймана, а также масштабированием исходной матрицы системы. Все применяемые итерационные методы прерывались по достижению невязки заданного уровня точности  $10^{-6}$ . Общее время решения задачи складывалось из временных затрат на решение системы уравнений на каждом шаге по времени.

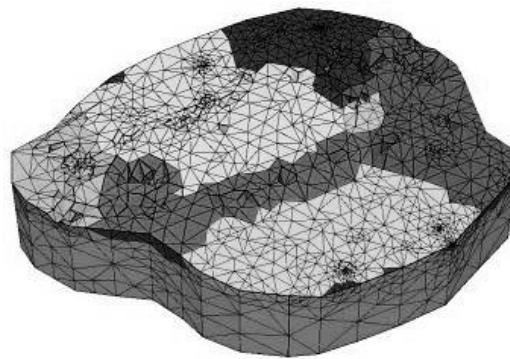


Рис. 4. Сетка расчетной области и ее разделение на подобласти

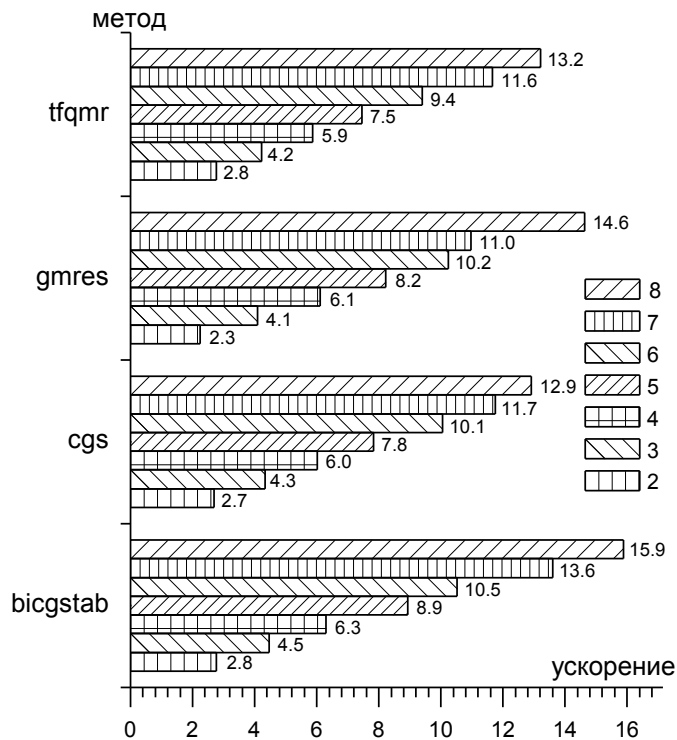


Рис. 5. Ускорение вычислений

Расчеты проводились на сетке с 761,730 тыс. узлами. Количество тетраэдров сетки составило 4263,344 тыс. элементов. Количество ненулевых элементов матрицы системы 46340,996 тыс. Поскольку каждый узел имеет две степени свободы (в каждом узле два давления жидкости), то количество неизвестных составляет 1523,460 тыс. Разделение расчетной сетки на подобласти (рис. 4) производилось с помощью многоуровневого метода рекурсивной бисекции [9].

На рис. 5 приведены ускорения параллельных вычислений итерационными методами с полиномиальным предобуславливанием рядами Неймана. Ускорение подсчитывалось делением времени решения на одном процессоре на время решения на  $n_p$  процессорах. Из представленных на рис. 5 результатов, видно, что применение параллельных вычислений на 8 процессорах позволяет ускорить вычисления почти в 13-16 раз (в зависимости от выбранного итерационного метода) по сравнению с последовательными вычислениями на одном процессоре.

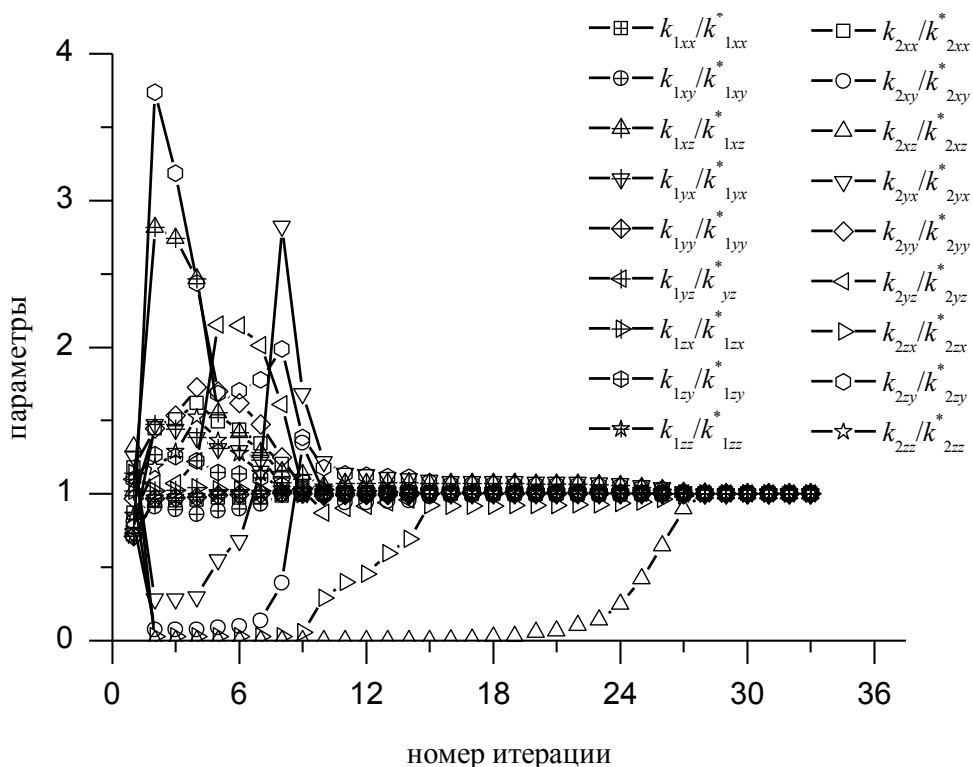


Рис. 6. Сходимость метода Л.-М. при начальной погрешности в параметрах  $1 \div 35\%$  ( $k_i^*$  - истинное,  $k_i$  - вычисленные значения проницаемости)

### ***Результаты решения обратной задачи***

Для тестирования описанного алгоритма решения обратной задачи были проведены численные эксперименты на модельных задачах. Для получения наблюдаемых значений давления на скважинах (кривых восстановления (падения) давления после пуска или остановки скважин, или изменения давления при работе скважин с заданным расходом) задавались истинные значения тензоров коэффициентов проницаемостей трещин и блоков в каждой из зон однородности (рис. 3), и решалась прямая задача (2)-(7). Затем истинные значения тензоров «забывались», т.е. задавались произвольные начальные значения тензоров (с помощью датчика случайных чисел) и решалась обратная задача.

Результаты оценки значений тензоров коэффициентов проницаемостей трещин и блоков для одной из зон однородности характеризуются представленным на рис. 6 изменением по итерациям отношения вычисленных значений искомых параметров к истинным значениям. Как видно, отношения параметров, стремятся к единице, а значит вычисленные оценки тензоров коэффициентов проницаемостей хорошо приближаются к истинным значениям.

### **Заключение**

В данной работе представлены результаты решения обратной задачи идентификации значений тензоров коэффициентов проницаемостей трещин и блоков породы неоднородного анизотропного трещиновато-пористого пласта. Рассмотрены этапы численного решения задачи идентификации фильтрационных параметров пласта на многопроцессорной вычислительной системе с распределенной памятью. Исследована производительность параллельных вычислений в зависимости от количества процессоров.

Применение данного подхода для идентификации тензоров коэффициентов проницаемостей на основе фактических данных эксплуатации системы скважин позволит определить главные значения и направления главных осей тензоров коэффициентов проницаемостей трещин и блоков.

Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН №14 «Интеллектуальные информационные технологии, математическое моделирование, системный анализ и автоматизация».

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Дмитриев Н. М., Максимов В. М.* Модели фильтрации в трещиновато-пористых анизотропных средах // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 6. С. 78-84.
2. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 285 с.
3. *Губайдуллин Д.А., Садовников Р.В.* Применение параллельных алгоритмов для решения задачи фильтрации жидкости в трещиновато-пористом пласте к скважинам со сложной траекторией // Вычислительные методы и программирование. 2007. 8, № 2. С. 95-102.
4. *Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.М.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // ПММ. 1960. Т.123, №3. С. 852-864.
5. *Садовников Р.В.* Идентификация фильтрационных и ёмкостных параметров трещиновато-пористого пласта // Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 15-летию ИММ КазНЦ РАН. Казань: КГУ, 2006. С.179-188.
6. *Sun N. Z.* Inverse problems in groundwater modeling. Norvell: Kluwer Acad., 1994. 337 p.
7. *Губайдуллин Д.А., Никифоров А.И., Садовников Р.В.* Параллельная реализация алгоритмов идентификации фильтрационных параметров трехмерного анизотропного трещиновато-пористого пласта // Пленарные и избранные доклады 4 Международной конференции «Параллельные вычисления и задачи управления» РАСО '2008. Москва, 27-29 октября 2008 г. Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2008. С. 28 - 33.
8. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The finite element method. Fifth Edition. Volume 1: The Basis. Butterworth – Heinemann, 2000.
9. METIS – Family of Multilevel Partitioning Algorithms. - [http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/ views/metis](http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/views/metis)
10. Aztec. A Massively Parallel Iterative Solver Library for Solving Sparse Linear Systems. – <http://www.cs.sandia.gov/CRF/aztec1.html>.