

УДК 517.958:532.546

# ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ СКВАЖИН В ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТЫХ ПЛАСТАХ

М.Х. Хайруллин, А.И. Абдуллин, М.Н. Шамсиев, П.Е. Морозов  
khairullin@mail.knc.ru

На основе методов регуляризации разработан вычислительный алгоритм решения коэффициентных обратных задач, возникающих при интерпретации результатов нестационарных гидродинамических исследований горизонтальных скважин в деформируемых трещиновато-пористых пластах.

## Постановка задачи

Процесс разработки нефтегазовых месторождений практически всегда сопровождается изменением внутрискважинного давления пластового флюида и давления всестороннего сжатия горных пород. Это приводит к деформированию коллекторов. Промысловые и лабораторные исследования свидетельствуют о зависимости фильтрационных свойств карбонатных коллекторов от их напряженного состояния. Изучение деформации коллекторов имеет важное практическое значение, поскольку могут иметь место не только ухудшение продуктивных характеристик коллекторов, но и безвозвратные потери нефти при проявлении необратимых деформаций.

Для описания нестационарной фильтрации жидкости к горизонтальной скважине (ГС) в деформируемом трещиновато-пористом пласте (рис. 1) используется модель Г.И. Баренблатта, Ю.П.Желтова, И.Н. Кочиной. Предполагается, что движение жидкости происходит по трещинам, а пористые блоки непрерывно питают систему трещин в условиях квазистационарного течения.

Прямая задача состоит в нахождении функций давления  $p_i = p_i(x, y, z, t)$  ( $i = 1, 2$ ), удовлетворяющих системе нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \beta_1^* \frac{\partial p_1}{\partial t} = \nabla \left( \frac{k(p_1)}{\mu} \nabla p_1 \right) + \frac{\alpha}{\mu} (p_2 - p_1), \\ \beta_2^* \frac{\partial p_2}{\partial t} = -\frac{\alpha}{\mu} (p_2 - p_1), (x, y, z) \in V, 0 < t \leq T, \end{cases} \quad (1)$$

при следующих начальных

$$p_1(x, y, z, 0) = p_0, p_2(x, y, z, 0) = p_k \quad (2)$$

и граничных условиях

$$(\mathbf{w}, \mathbf{n})|_{\partial V_1} = 0, p_1|_{\partial V_2} = p_k, \quad (3)$$

$$(\mathbf{w}, \mathbf{n})|_{S_c} = q(x, y, z, t). \quad (4)$$

Здесь  $p_i$  – давление,  $\beta_i^*$  – коэффициент упругоэластичности (индекс 1 соответствует трещинам, 2 – блокам);  $k(p_1)$  – проницаемость трещин,

$\mu$  – вязкость,  $\mathbf{w} = -\frac{k(p_1)}{\mu} \nabla p_1$  – скорость фильтрации жидкости в трещинах,

$\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали,  $S_c$  – поверхность ГС;

$\partial V = \partial V_1 \cup \partial V_2$  – внешняя граница области фильтрации  $V$ ,

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$  – оператор градиента,  $q(x, y, z, t)$  – приток флюида,

приходящийся на единицу поверхности ствола ГС. Приток  $q(x, y, z, t)$  в условии (4) вычисляется из предположения, что давление по стволу горизонтальной скважины не меняется и

$$Q(t) = \int_S q(x, y, z, t) d\sigma + C \frac{\partial p_1}{\partial t}, \text{ где } Q(t) \text{ – дебит, } C \text{ – коэффициент}$$

влияния ствола скважины.

Для численного решения системы (1)-(4) используется метод конечных разностей. Пласт, представляющий собой двухсвязную область фильтрации, покрывается неравномерной сеткой узлов, сгущающейся к стволу ГС (рис.1).

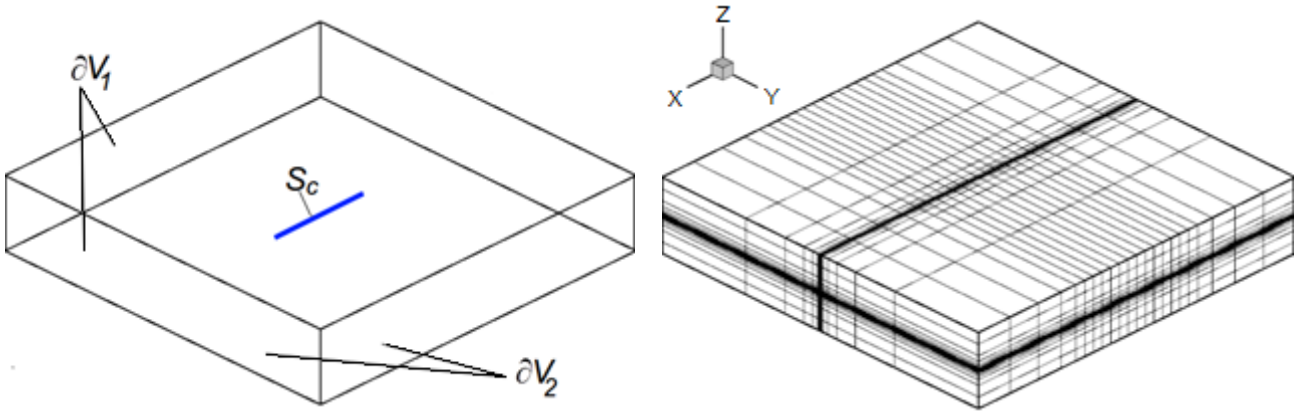


Рис. 1. Схема ГС и сеточная модель пласта.

### Разностная аппроксимация

Переходя к дискретному аналогу задачи (1)-(4), введем в области  $\overline{\Omega} = \{0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y, 0 \leq z \leq L_z; 0 \leq t \leq T\}$  сетки узлов

$$\overline{\omega}_h = \{x_i, y_j, z_k : h_{xi} = x_i - x_{i-1}, h_{yj} = y_j - y_{j-1}, h_{zk} = z_k - z_{k-1}\},$$

$$\overline{\omega}_\tau = \{t_n : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N_\tau} = T, t_n - t_{n-1} = \Delta t_n\},$$

где  $\{i = \overline{1, N_x}, j = \overline{1, N_y}, k = \overline{1, N_z}, n = \overline{0, N_\tau}\}$ ,  $N_x, N_y, N_z$  – количество разбиений вдоль осей  $OX, OY, OZ$  соответственно,  $T$  – время эксперимента,  $N_\tau$  – количество замеров. Положим  $p_{1,ijk}^n = p_1(x_i, y_j, z_k, t_n)$ ,  $p_{2,ijk}^n = p_2(x_i, y_j, z_k, t_n)$ .

Для того, чтобы при дискретизации уравнений учесть, каким образом меняется искомая функция за шаг по времени, можно при аппроксимации правой части использовать средние значения искомой величины за период:

$$P_i = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} P_i dt = \theta P_i^{n+1} + (1-\theta)P_i^n, \text{ здесь } 0 \leq \theta \leq 1.$$

В результате получается смешанная схема, включающая значения как на предыдущем временном слое, так и на новом:

$$\beta_1^* \frac{P_{1,ijk}^{n+1} - P_{1,ijk}^n}{\Delta t_n} = \theta \left\{ \frac{\alpha}{\mu} (P_{2,ijk}^{n+1} - P_{1,ijk}^{n+1}) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\mu \hbar_{xi}} \left[ a_{i+1/2,j,k} \frac{P_{1,i+1,jk}^{n+1} - P_{1,ijk}^{n+1}}{h_{xi}} - a_{i-1/2,j,k} \frac{P_{1,ijk}^{n+1} - P_{1,i-1,j,k}^{n+1}}{h_{xi-1}} \right] + \\
& \frac{1}{\mu \hbar_{yj}} \left[ a_{i,j+1/2,k} \frac{P_{1,ij+1k}^{n+1} - P_{1,ijk}^{n+1}}{h_{yj}} - a_{i,j-1/2,k} \frac{P_{1,ijk}^{n+1} - P_{1,ij-1k}^{n+1}}{h_{yj-1}} \right] + \\
& \left. \frac{1}{\mu \hbar_{zk}} \left[ a_{i,j,k+1/2} \frac{P_{1,ijk+1}^{n+1} - P_{1,ijk}^{n+1}}{h_{zk}} - a_{i,j,k-1/2} \frac{P_{1,ijk}^{n+1} - P_{1,ijk-1}^{n+1}}{h_{zk-1}} \right] \right\} + \\
& (1-\theta) \left\{ \frac{\alpha}{\mu} \left( P_{2,ijk}^n - P_{1,ijk}^n \right) \right\} + \tag{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\mu \hbar_{xi}} \left[ a_{i+1/2,j,k} \frac{P_{1,i+1,jk}^n - P_{1,ijk}^n}{h_{xi}} - a_{i-1/2,j,k} \frac{P_{1,ijk}^n - P_{1,i-1,jk}^n}{h_{xi-1}} \right] + \\
& \frac{1}{\mu \hbar_{yj}} \left[ a_{i,j+1/2,k} \frac{P_{1,ij+1k}^n - P_{1,ijk}^n}{h_{yj}} - a_{i,j-1/2,k} \frac{P_{1,ijk}^n - P_{1,ij-1k}^n}{h_{yj-1}} \right] + \\
& \left. \frac{1}{\mu \hbar_{zk}} \left[ a_{i,j,k+1/2} \frac{P_{1,ijk+1}^n - P_{1,ijk}^n}{h_{zk}} - a_{i,j,k-1/2} \frac{P_{1,ijk}^n - P_{1,ijk-1}^n}{h_{zk-1}} \right] \right\}, \\
\beta_2^* \frac{P_{2,ijk}^{n+1} - P_{2,ijk}^n}{\Delta t_n} &= \theta \left\{ -\frac{\alpha}{\mu} \left( P_{2,ijk}^{n+1} - P_{1,ijk}^{n+1} \right) \right\} + (1-\theta) \left\{ -\frac{\alpha}{\mu} \left( P_{2,ijk}^n - P_{1,ijk}^n \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Численная реализация проводится при  $\theta = \frac{1}{2}$ , и схема (5) при этом имеет второй порядок точности  $O(\Delta x^2) + O(\Delta t^2)$ .

Здесь 
$$a_{i\pm 1/2,j,k} = \frac{2k_{i\pm 1,j,k}k_{i,j,k}}{k_{i\pm 1,j,k} + k_{i,j,k}}, \quad a_{i,j\pm 1/2,k} = \frac{2k_{i,j\pm 1,k}k_{i,j,k}}{k_{i,j\pm 1,k} + k_{i,j,k}},$$

$$a_{i,j,k\pm 1/2} = \frac{2k_{i,j,k\pm 1}k_{i,j,k}}{k_{i,j,k\pm 1} + k_{i,j,k}}, \quad k_{ijk} = k(p_{1,ijk}), \quad \hbar_{xi} = 0.5(h_{xi} + h_{xi+1}),$$

$$\bar{h}_{yj} = 0.5(h_{yj} + h_{yj+1}), \quad \bar{h}_{zk} = 0.5(h_{zk} + h_{zk+1}), \quad i = \overline{2, N_x - 1}, \quad j = \overline{2, N_y - 1}, \\ k = \overline{1, N_z}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Дискретные аналоги начального (2) и граничных условий (3)-(4) имеют вид:

$$\text{при } n = 0, \quad p_{1,ijk}^0 = p_{2,ijk}^0 = f_{ijk}, \quad (i = \overline{1, N_x}, j = \overline{1, N_y}, k = \overline{1, N_z}); \quad (6)$$

$$\text{при } i = \overline{1, N_x}, \quad p_{1,1jk}^n = p_{1,N_xjk}^n = p_k, \quad p_{2,1jk}^n = p_{2,N_xjk}^n = p_k, \\ (j = \overline{1, N_y}, k = \overline{1, N_z}, n = 1, 2, \dots, N_t);$$

$$\text{при } j = \overline{1, N_y}, \quad p_{1,i1k}^n = p_{1,iN_yk}^n = p_k, \quad p_{2,i1k}^n = p_{2,iN_yk}^n = p_k, \quad (7) \\ (i = \overline{1, N_x}, k = \overline{1, N_z}, n = 1, 2, \dots, N_t);$$

$$\text{при } k = \overline{1, N_z}, \quad p_{1,ij0}^n = p_{1,ij2}^n, \quad p_{1,ijN_z+1}^n = p_{1,ijN_z-1}^n \\ (i = \overline{1, N_x}, j = \overline{1, N_y}, n = 1, 2, \dots, N_t).$$

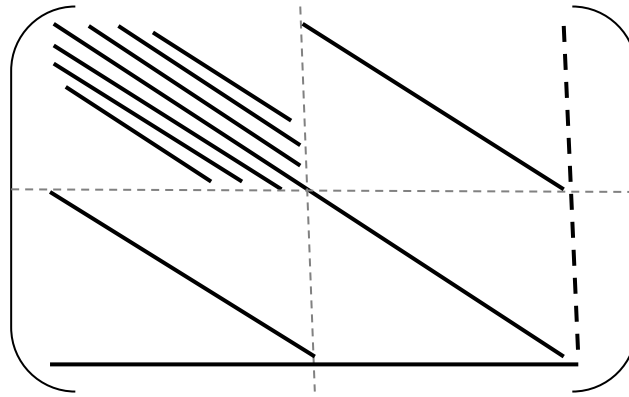


Рис. 2. Портрет матрицы  $A$ .

Решение конечно-разностной задачи на каждом временном слое сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений:

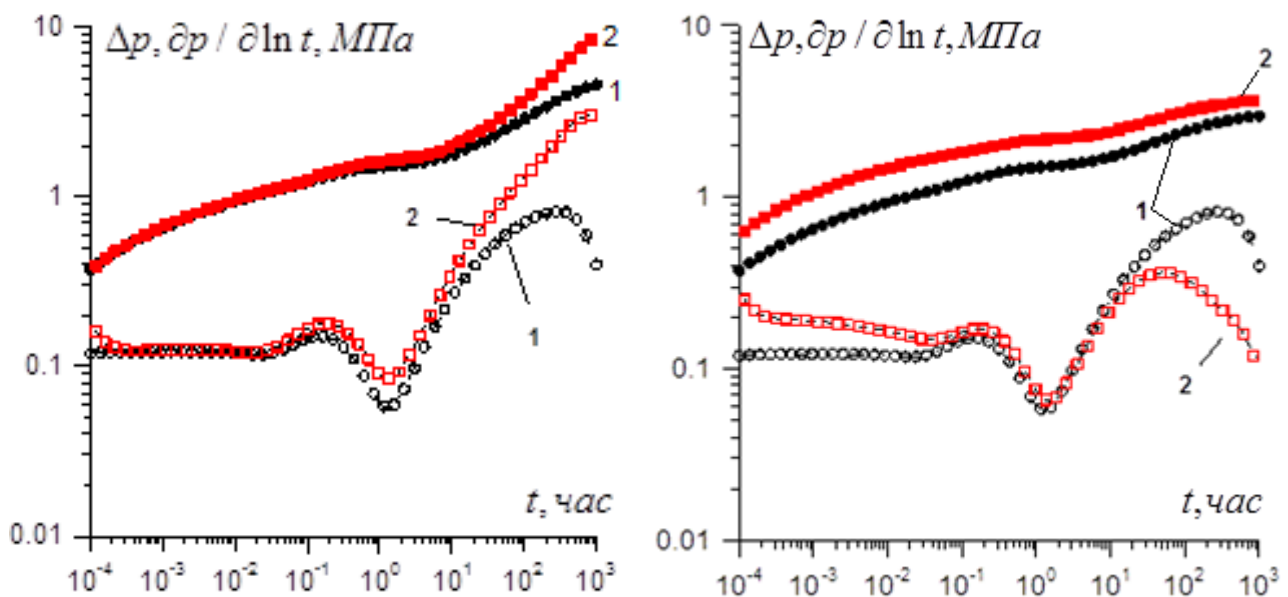
$$\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} = [b_1, \dots, b_{2N}, Q], \quad \mathbf{p} = [p_1^1, p_1^2, \dots, p_1^N, p_2^1, p_2^2, \dots, p_2^N, p_c]^T,$$

где  $\mathbf{A}$  – матрица коэффициентов системы (5)-(7),  $\mathbf{b}$  – вектор правой части,  $\mathbf{p}$  – вектор неизвестных. Для упаковки разреженной матрицы  $\mathbf{A}$  (рис.2) используется компактная схема хранения ненулевых элементов по строкам (CRS).

Условие постоянства давления в скважине учитывается в результирующей системе в виде дополнительного уравнения, связывающего забойное давление, дебит и давление в «околоскважинных» узлах. Соответствующие строки матрицы необходимо преобразовать, чтобы учесть условие равенства давления в соответствующих узлах забойному давлению  $p_c$ . Необходимо отметить, что с введением дополнительного уравнения симметричность матрицы системы нарушается. Полученная система уравнений решается на основе комбинации метода *BiCGSTAB* и предобусловливателя *ILU(0)* с итерациями по нелинейности. Для выхода из внешних итераций требуется выполнение одного из двух условий: либо достигнута точность  $\varepsilon = 10^{-6}$  по норме  $\|p^{(\eta+1)} - p^{(\eta)}\| = \sqrt{\sum_i (p_i^{(\eta+1)} - p_i^{(\eta)})^2} \leq \varepsilon$  ( $\eta$  – номер итерации), либо превышено максимальное число внешних итераций  $\eta > N_{\max} = 20$ .

### Диагностические признаки нелинейно-упругого режима

На основе численного решения задачи (1)-(4) и анализа полученных результатов были установлены диагностические признаки нелинейно-упругого режима фильтрации жидкости к ГС в трещиновато-пористом пласте.



а) КПД

б) КВД

1- $k = const$ ; 2- $k = k(p)$ .

Рис. 3. Кривые изменения давления и их производные.

На рис.3 приводятся кривые восстановления (КВД) и падения давления (КПД) и их производные по времени при  $k = k(p)$  и  $k = const$ . На этих графиках в случае  $k = k(p)$  при пуске и остановке скважины наблюдается отклонение начальных и конечных участков кривых производных давления от соответствующих кривых при постоянной проницаемости.

Как и в случае вертикальной скважины[1], при возникновении деформации в пласте и как следствие ухудшении проницаемости, кривые изменения давления и их производные на диагностическом графике при пуске и остановке скважины не совпадают. Т.е. несимметричность процессов восстановления и падения давления можно отнести к диагностическим признакам нелинейно-упругого режима фильтрации.

### **Интерпретация результатов гидродинамических исследований горизонтальных скважин**

Обратная задача состоит в определении зависимости проницаемости трещин от давления, когда процесс фильтрации описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений (1)-(4). В качестве исходной информации для решения обратной задачи используются кривые изменения давления на скважине (КВД или КПД):

$$p^H(t) \Big|_{s_c} = \phi(t). \quad (8)$$

Численное решение обратной задачи оценки зависимости проницаемости трещин от давления строится на основе метода дескриптивной регуляризации [2]. Особенностью этого метода является учет априорной информации об искомой функции. Экспериментальные исследования по определению зависимости проницаемости пласта от давления показали, что она, как правило, хорошо аппроксимируется монотонными и выпуклыми функциями [3]. В данной работе при решении обратной задачи используется дополнительная информация о монотонности и выпуклости искомого решения. Решение обратной задачи (1)-(4),(8) с учетом ограничений на искомую функцию, определяется из минимума функционала невязки между наблюдаемыми и вычисленными значениями давления на скважине[4]:

$$\inf_{k \in D} J(k), J(k) = \int_0^T \left[ \phi(t) - p^B(t) \right]^2 dt,$$

где  $\phi(t)$  – наблюдаемые значения забойного давления,  $p^B(t) = p_1(x, y, z, t) \Big|_{S_c}$  – решение краевой задачи (1)-(4),  $D$  – множество допустимых функций, удовлетворяющих условиям:

$$0 < k_{\min} \leq k \leq k_{\max}, k'_p(p_1) \geq 0, k''_{pp}(p_1) \geq 0, p_1 \in [p_{\min}, p_{\max}], \quad (9)$$

$p_{\min}, p_{\max}, k_{\min}, k_{\max} = \text{const} > 0$ . Здесь  $[p_{\min}, p_{\max}]$  – интервал изменения забойного давления,  $[k_{\min}, k_{\max}]$  – интервал изменения проницаемости. Предполагается, что на сетке

$$\bar{\omega}_p = \left\{ p_m, \quad p_{\min} = p_0 < \dots < p_{N_m} = p_{\max}, \quad p_m - p_{m-1} = \Delta p_m \right\} \quad \text{для}$$

$$\tilde{p} \in [p_m, p_{m-1}): \quad k(\tilde{p}) = k_{m-1} + \frac{\tilde{p} - p_{m-1}}{\Delta p_m} (k_m - k_{m-1}), \quad m = \overline{1, N_m}.$$

Итерационный процесс минимизации проводится с помощью метода сопряженных градиентов с проекцией на множество монотонных и выпуклых функций. Выражение для вычисления градиента функционала-невязки имеет вид:

$$(\nabla J(k), \delta k) = \int_0^T \int_{0V} (\nabla p_1, \nabla \psi_1) \delta k dV dt,$$

где  $p_1$  – решение задачи (1)-(4),  $\psi_1$  – решение соответствующей сопряженной задачи:

$$\begin{cases} \beta_1^* \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \nabla(k(p_1) \nabla \psi_1) + \frac{1}{\mu} (\nabla p_1, k'_p \nabla \psi_1) + \frac{\alpha}{\mu} (\psi_1 - \psi_2) \\ \beta_2^* \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = -\frac{\alpha}{\mu} (\psi_1 - \psi_2), \quad (x, y, z) \in V, \quad 0 \leq t < T, \end{cases} \quad (10)$$

$$\psi_1(x, y, z, T) = 0, \quad \psi_2(x, y, z, T) = 0, \quad (11)$$

$$(k(p_1) \nabla \psi_1, \mathbf{n}) \Big|_{\partial V_2} = 0, \quad \psi_1 \Big|_{\partial V_1} = 0, \quad (12)$$

$$(k(p_1) \nabla \psi_1, \mathbf{n}) \Big|_{S_c} = q^*(x, y, z, t), \quad (13)$$

где величина  $q^*(x, y, z, t)$  удовлетворяет следующему условию:



$$\int_{S_c} q^*(x, y, z, t) d\sigma = -2 \left( \phi(t) - p_1(x, y, z, t) \Big|_{S_c} \right) + C \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \Big|_{S_c}.$$

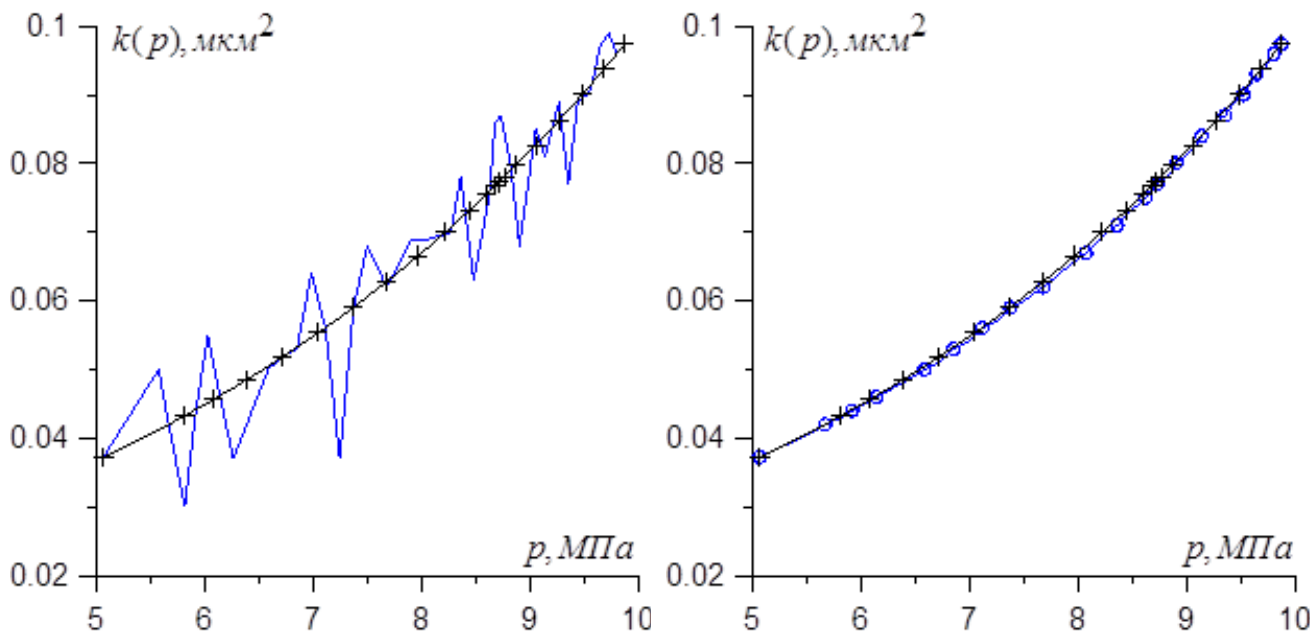
Решение сопряженной задачи проводится с помощью метода конечных разностей. Для дискретной аппроксимации краевой задачи (10)-(13) на сетках  $\bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$  используется разностная схема Кранка-Николсон. В результате получается система линейных алгебраических уравнений, т.к. значения  $p_{1,ijk}^n$  известны из решения прямой задачи. Матрица системы имеет ту же структуру (расположение ненулевых элементов), что и исходная матрица. Для решения СЛАУ используется метод *BiCGSTAB* с предобуславливателем *ILU(0)*.

### Результаты расчетов

В этом пункте проводится тестирование предложенного вычислительного алгоритма. Рассматривается модельный пласт со следующими параметрами:  $L_x = L_y = 500\text{ м}$ ,  $L_z = 10\text{ м}$ ,  $r_c = 0,1\text{ м}$ ,  $p_k = 10\text{ МПа}$ ,  $\beta_1^* = 10^{-5}\text{ МПа}^{-1}$ ,  $\beta_2^* = 10^{-4}\text{ МПа}^{-1}$ ,  $\mu = 25\text{ МПа}\cdot\text{с}$ ,  $T = 30\text{ сут}$ ,  $Q_0 = 30\text{ м}^3/\text{сут}$ ,  $C = 0\text{ МПа}/\text{м}^3$ . В качестве точного решения обратной задачи была взята экспоненциальная зависимость  $k(p) = k_0 \exp(-\lambda(p_0 - p))$ , где  $k_0 = 0,1\text{ мкм}^2$ ,  $\lambda = 0,1\text{ МПа}^{-1}$ . В качестве начального приближения на сетке  $\bar{\omega}_p$  с шагом  $\Delta p_m = (p_{\max} - p_{\min}) / N_m$  был взят вектор  $k^0$  с компонентами  $k_m^0 = k_{\min} + m(k_{\max} - k_{\min}) / N_m$ ,  $N_m = 22$ ,  $k_{\min} = 0,037$ ,  $k_{\max} = 0,1$ .

На рис.4 приводятся графики зависимости проницаемости  $k = k(p)$  без учета и с учетом условий на монотонность и выпуклость. Как видно на рис.4, учет априорной информации о структуре искомого коэффициента позволяет получить более точные и качественные приближенные решения. Для исследования сходимости вычислительного алгоритма проводилась серия численных экспериментов при различном выборе начального приближения  $k^0$  и при различном разбиении  $\bar{\omega}_p$ . Для проверки устойчивости предложенного алгоритма в исходные данные  $\phi(t)$  вводились случайным образом погрешности в пределах  $\delta = 0.05\text{ МПа}$ . Анализ результатов расчетов на модельных и

реальных данных показал, что разработанный алгоритм сходится, устойчив относительно возмущения входной информации.



а) приближенное решение  
без учета условий (9)

б)  $\circ$  - приближенное решение  
с учетом условий (9)

(+) точное решение.

Рис. 4. Тестирование вычислительного алгоритма.

Далее приводятся результаты интерпретации гидродинамических исследований горизонтальной скважины № 19875Г (ОАО «Татнефть»). Исходные данные по пласту и скважине: мощность пласта  $L_z = 17$  м; дебит скважины  $Q = 12$  м<sup>3</sup>/сут; длина горизонтального ствола ГС  $L = 97$  м; радиус скважины  $r_c = 0,1$  м.

На рис.5а приводятся реальная и вычисленная КВД в полулогарифмических координатах, на рис.5б – вычисленная зависимость  $s(p) = k(p) / \mu$ . Неизвестные значения  $k_{\min}, k_{\max}$  ищутся на основе безградиентного метода.

Для сравнения данная КВД была обработана в предположении, что проницаемость не зависит от давления, и оценка для  $s = k / \mu$  составила  $0,0209$  мкм<sup>2</sup>/мПа·с, что хорошо согласуется с результатами интерпретации при  $k = k(p)$  (рис.5б).

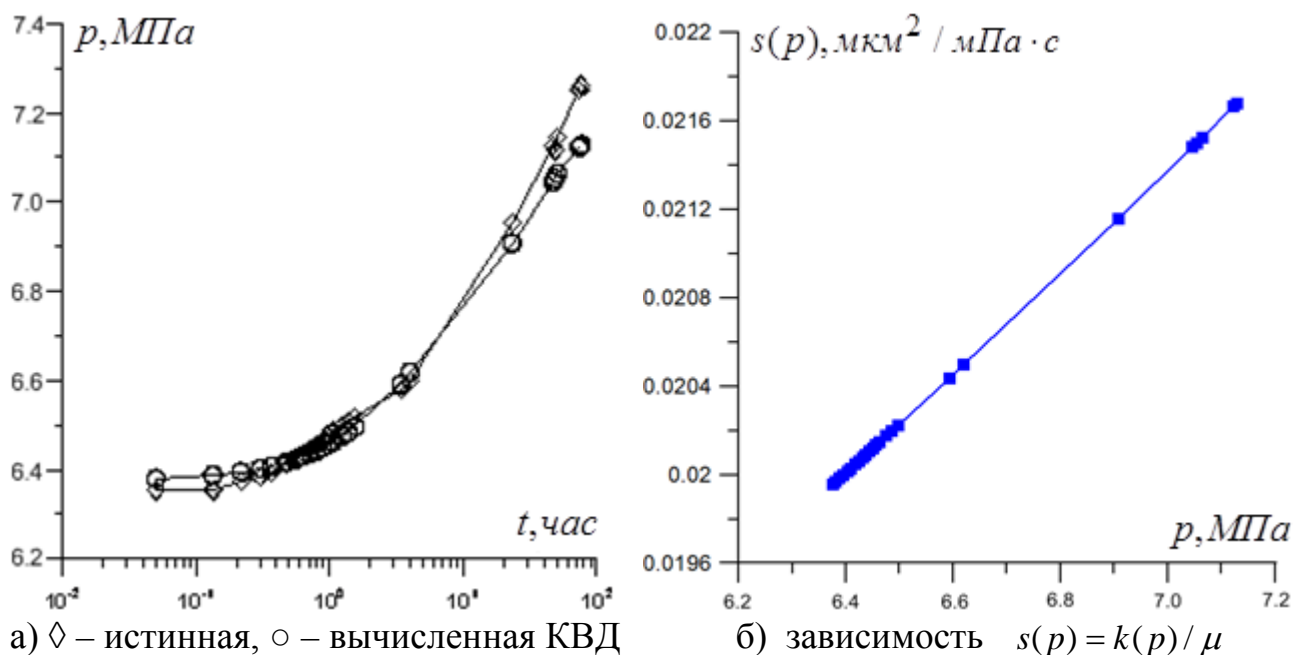


Рис. 5. Результаты интерпретации ГС №19875.

Предложенный вычислительный алгоритм интерпретации гидродинамических исследований горизонтальных скважин позволяет восстанавливать зависимость фильтрационных параметров пористых и трещиновато-пористых пластов от давления.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Хайруллин М.Х., Абдуллин А.И., Морозов П.Е., Шамсиев М.Н. Численное решение коэффициентной обратной задачи для деформируемого трещиновато-пористого пласта // Математическое моделирование. 2008. Том 20, № 11. С.35-40.
2. Морозов В.А., Гольдман Н.Л., Малышев В.А. Метод дескриптивной регуляризации в обратных задачах // ИФЖ. 1993. Т.65. №6. С. 695–702.
3. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А. Механика насыщенных пористых сред. – М.: Недра, 1970.
4. Хайруллин М.Х., Хисамов Р.С., Шамсиев М.Н., Фархуллин Р.Г. Интерпретация результатов гидродинамических исследований скважин методами регуляризации. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006. 172 с.