

ДРЕЙФ ВКЛЮЧЕНИЙ В АКУСТИЧЕСКИХ ПОЛЯХ С УЧЕТОМ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИЛ

Д.А. Губайдуллин, П.П. Осипов
gubajdullin@mail.knc.ru, petro300@rambler.ru

Приводится краткий обзор теоретических работ по дрейфу включений в акустических полях с учетом сил Стокса, поправки типа Осеена, а также сил Архимеда, присоединенных масс и Бассэ-Буссинеска.

Введение

В акустических полях возникают силы, порождающие направленное движение дисперсной фазы [1-16]. Полное описание такого движения в рамках двухфазных сред дано в работах [1,2]. В случаях малых концентраций включений можно пренебречь их обратным воздействием на скорость несущей фазы. Для сжимаемых включений часто можно пренебречь силами Бьеркнеса, возникающими между пульсирующими включениями [17,18]. Поэтому можно рассматривать движение одиночного включения в безграничной несущей фазе. Уравнения движения одиночного включения рассмотрены в [1,2,19-22]. Математическая модель сводится к уравнению импульса включения с учетом сил Стокса (S), Бассэ-Буссинеска (B), Архимеда (A) и присоединенных масс (m) (таблица 1). Здесь r - радиус включения; ρ_1, μ - плотность и динамическая вязкость несущей фазы; v_1, v_2 - скорости несущей и дисперсной фаз; $\frac{d_1}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_1 \nabla$, $\frac{d_2}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_2 \nabla$ - субстанциальные производные [1]; $t_0 = -\infty$ для периодических процессов и $t_0 = 0$ - для переходных. Порядок амплитуды приведенных выше сил в однородном поле $v_1 = U_0 \sin(\omega t)$, действующих на неподвижное включение, приведен в последнем столбце таблицы 1. В силу линейности сил, действующих на неподвижное

включение, в однородном поле скоростей все амплитуды сил пропорциональны амплитуде U_0 .

Таблица 1. Основные гидродинамические силы

| Обознач. | Сила, F | Амплитуда сил, f |
|----------|---|--|
| S | $6\pi r\mu(v_1 - v_2)$ | $f_S = 6\pi r\mu U_0$ |
| B | $6r^2\sqrt{\pi\rho_1\mu} \int_{t_0}^t \left(\frac{d_2v_1}{d\theta} - \frac{d_2v_2}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}}$ | $f_B = 6r^2\sqrt{\pi\rho_1\mu\omega} U_0$ |
| A | $\frac{4}{3}\pi r^3\rho_1 \frac{d_1v_1}{dt}$ | $f_A = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_1\omega U_0$ |
| m | $\frac{2}{3}\pi r^3\rho_1 \left(\frac{d_1v_1}{dt} - \frac{d_2v_2}{dt} \right)$ | $f_m = \frac{2}{3}\pi r^3\rho_1\omega U_0$ |

Отнесем все амплитуды к амплитуде силы Стокса $f_A/f_S = 2/9 \tau_\mu \omega$, $f_m/f_S = 1/9 \tau_\mu \omega$, $f_B/f_S = 1/\sqrt{\pi} \sqrt{\tau_\mu \omega}$; здесь введено характерное время установления стоксовского режима обтекания $\tau_\mu = r^2/\nu$ ($\nu = \mu/\rho_1$ - кинематическая вязкость). Для сравнения различных сил вводится безразмерный комплекс $K = \omega \tau_\mu$. Относительные амплитуды сил пропорциональны величинам из таблицы 2.

Таблица 2. Порядок гидродинамических сил

| f/f_S | Радиус | Частота | Вязкость | Комплекс |
|-----------|--------|-----------------|----------------|-------------------------|
| f_S/f_S | 1 | 1 | 1 | 1 |
| f_B/f_S | r | $\sqrt{\omega}$ | $1/\sqrt{\nu}$ | $1/\sqrt{\pi} \sqrt{K}$ |
| f_A/f_S | r^2 | ω | $1/\nu$ | $2/9 K$ |
| f_m/f_S | r^2 | ω | $1/\nu$ | $1/9 K$ |

Эта таблица показывает, что для очень малых частиц, малых частот и больших вязкостей основной силой является сила Стокса. Для больших частиц, больших частот и малых вязкостей - сила Архимеда и

силы присоединенных масс. Сила Бассэ не может доминировать в предельных случаях больших или малых значений величин r , ω , ν . При этом, тот или иной параметр признается большим или малым в зависимости от того, какое из неравенств $K \gg 1$, $K \ll 1$ выполняется. В таблице 3 приведены основные частотные режимы, разграничивающие сферу влияния гидродинамических сил на неподвижное включение [1].

Таблица 3. Пять частотных режимов

| Режим | Интервал | Соотношение сил |
|-------|-----------------------|----------------------------------|
| 1 | $\sqrt{K} < 0,1$ | $f_S \gg f_B \gg f_m \sim f_A$ |
| 2 | $0,1 < \sqrt{K} < 1$ | $f_S \geq f_B \gg f_m \sim f_A$ |
| 3 | $1 < \sqrt{K} < 10$ | $f_S \sim f_B \sim f_m \sim f_A$ |
| 4 | $10 < \sqrt{K} < 100$ | $f_S \ll f_B \sim f_m \sim f_A$ |
| 5 | $100 < \sqrt{K}$ | $f_S \ll f_B \ll f_m \sim f_A$ |

При числах Рейнольдса порядка единицы и более необходимо учитывать поправки типа Осеена для силы Стокса. Ниже приведены наиболее распространенные формулы для коэффициента сопротивления сферы:

[см. 1]:
$$C_x = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{1}{6} \sqrt{Re} + \frac{0,4}{24} Re \right) \quad 0 \leq Re \leq 2 \cdot 10^5;$$

(Стернин):
$$C_x = \frac{24}{Re} \left(1 + 0,25 \sqrt{Re} + 0,0117 Re \right) \quad 0 \leq Re \leq 1000,$$

$$C_x = 0,44 \quad 1000 \leq Re \leq 2 \cdot 10^5;$$

(Клячко):
$$C_x = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{1}{6} Re^{2/3} \right) \quad 0 \leq Re \leq 100;$$

(Massey):
$$C_x = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{3}{16} Re \right)^{1/2} \quad 0 \leq Re \leq 100.$$

В приведенных формулах берется относительное число Рейнольдса $Re = 2r/\nu_1 - \nu_2 / \nu$.

В общем случае, при исследовании одномерного дрейфа вдоль оси x одиночного включения без учета обратного влияния на несую-

шую фазу используется следующее уравнение движения включения

$$\left(1 + \frac{\tilde{\rho}}{2}\right) \frac{d v_2}{d t} = \frac{v_1 - v_2}{\tau_v} \frac{Re}{24} C_x + \frac{3}{2} \tilde{\rho} \frac{d_1 v_1}{d t} + \\ + \frac{\sqrt{\tau_\mu}}{\tau_v} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^t \left(\frac{d_2 v_1}{d \theta} - \frac{d v_2}{d \theta} \right) \frac{d \theta}{\sqrt{t - \theta}} + (\tilde{\rho} - 1) g,$$

где в дальнейшем x_2 , $\frac{d x_2}{d t} = v_2$ - положение и скорость центра включения;

$\tau_v = 2/9 r^2 \rho_2 / \mu = 2/9 \tau_\mu / \tilde{\rho}$ - время релаксации включения;

$\tilde{\rho} = \rho_1 / \rho_2$ - отношение плотностей несущей фазы и включения; g - ускорение свободного падения, направленное в сторону убывания x .

Величины $v_1 = v_1(x, t)$, $\rho_1 = \rho_1(x, t)$ вычисляются из решения независимой от динамики включения задачи колебаний несущей фазы.

Исследование дрейфа включений методами механики сплошных сред

В периодических полях, когда имеется основная гармоника частоты ω , можно получить приближенные решения уравнений движения включения и оценить силу, приводящую к дрейфу включения. Благодаря неоднородности поля скорости несущей фазы ускорение включения содержит целый спектр степеней основных гармоник $\cos^m(\omega t)$, $\sin^n(\omega t)$ и их произведений $\cos^m(\omega t) \cdot \sin^n(\omega t)$. Четные степени m, n и произведения четных степеней гармоник дают ненулевое среднее по периоду ускорение, т.е. вызывают дрейф частицы. Поскольку таких членов много, то не всегда легко определить, который из них является основным в том или ином режиме. В [1,6] приведен обзор известных формул для сил, вызывающих дрейф в одномерных стоячих и бегущих волнах. В [2] методом разложения по малому параметру и методом осреднения Н.Н. Боголюбова проведено систематическое исследование вибрационных сил, действующих на твердое включение/пузырек в волновых полях. Выделены и изучены вязкий режим $K \ll 1$ и режим присоединенных масс $K \gg 1$. Выявлено избирательное действие величины амплитуды скорости несущей фазы на дрейф включений. Установлено, что волновая сила зависит от положения включения в стоячей волне, от амплитуды колеба-

ний несущей среды, а также от плотности частиц. В вязком режиме она зависит также от значения комплекса K . Предложена технология разделения частиц по размерам. В [19] исследовано движение несжимаемых аэрозольных частиц в плоской стоячей волне для случая достаточно малых размеров частиц и относительно невысоких частот. Установлено, что такие частицы должны собираться вблизи узлов скорости в стоячей волне. Получена формула для ускорения дрейфа под действием силы Стокса. Учтено влияние силы Бассэ-Буссинеска на фоновое периодическое колебание частицы. Полный учет силы Бассэ-Буссинеска на дрейф произвести не удалось ввиду сложного характера влияния предыстории движения включения на его ускорение. Показано, что для аэрозолей при не слишком больших частотах рассмотренная сила на несколько порядков превосходит силу радиационного давления (формула Кинга). В [22] изучено движение частицы аэрозоля под действием ассиметричных сил в стоячей волне и получена формула для ускорения частицы. Проведены сравнения с известными формулами других авторов. В [23] приведен обзор по основным видам сил, действующих на включение. В [24] исследован дрейф частиц под действием сил радиации (т.е. сил из-за отражения и поглощения волн включением) и получена формула для средней по периоду силы, действующей на включение (Кинга). Формула Кинга, не учитывает вязкость среды. В [25-27] учтена вязкость несущей среды и показано, что вязкие силы в приближении Осеена в десятки раз превосходят силу радиационного давления. В [28] формула Кинга обобщена на случай сжимаемой сферы. Установлено, что если размер сферы меньше резонансного, она перемещается в узлы скорости, если больше - то в пучность скорости. Если размер сферы равен резонансному значению, то она находится в состоянии безразличного равновесия. Эти выводы были подтверждены в экспериментальной работе [29]. В [30] предложен оригинальный метод расчета силы, приводящей к дрейфу частицы. В рамках потенциального обтекания сферы идеальной жидкостью потенциал рассеянной волны разложен по мультиполям с коэффициентами, взятыми из задачи обтекания несжимаемой жидкостью. Полученные формулы подтверждают формулы Кинга. В [31] исследовано уравнение движения частицы аэрозоля в стоячей волне в приближении Стокса и Осеена. Оценена возможность упрощения уравнения движения с учетом дрейфа из-за радиа-

ции, периодического изменения вязкости и асимметрии движения колеблющейся частицы в стоячей волне. Получена формула для ускорения дрейфа без учета инерции частицы. В [32] исследован дрейф малой частицы, взвешенной в акустическом поле. Показано, что дрейф возникает из-за неоднородности амплитуды несущего поля. В противоположность другим механизмам, объясняющим дрейф малых частиц, эффект проявляется даже при бесконечно малых амплитудах. Этот тип дрейфа, названный авторами асимметричным, исследуется для бегущей и стоячей волн, а также для сферической бегущей волны. Влияние ударных волн на движение частиц изучено в работе [33]. В [34] исследован дрейф включения в трубе-резонаторе при наличии периодической ударной волны. В [35] в предположении несжимаемости несущей фазы и включения получена формула для суммарной силы, действующей на сферическое включение с учетом нелинейных составляющих сил Архимеда и сил присоединенной массы в полях типа стоячей волны. Установлено существование характерной частоты, при переходе через которую суммарная сила меняет направление. Предложена диаграмма направления дрейфа. В [36] исследуется осаждение из состояния покоя тяжелых твердых сферических частиц в несжимаемой жидкости с большой вязкостью. С учетом силы Бассэ задача сводится к решению задачи Коши для линейного интегро-дифференциального уравнения. Получено точное решение этой задачи в виде функций действительного переменного и простые асимптотические формулы. Проведена экспериментальная проверка полученного закона осаждения. В [37] исследуется осаждение тяжелой твердой сферической частицы в несжимаемой вязкой жидкости, находящейся в сосуде с вибрирующим дном. Получено точное решение этой задачи и простые асимптотические формулы, проведен полный анализ влияния силы Бассэ на процессы колебания и осаждения частицы. Показано, что учет силы Бассэ дает значительную поправку к классической зависимости амплитуды от частоты, уменьшая ее величину, а также существенно замедляя выход амплитуды на постоянное значение. При отсутствии вибрации из решения задачи следует медленное установление предельной скорости (обратно пропорциональное корню квадратному из времени), что существенно отличается от случая осаждения частиц по закону Стокса (установление предельной скорости происходит по экспоненте). В [38] на примере за-

дачи о гравитационном оседании (всплытии) сферической частицы в гармоническом поле скорости вязкой несущей фазы исследовано влияние нестационарных и "наследственных" сил на характер движения частицы. Предложен алгоритм вычисления наследственной силы Бассэ-Буссинеска. Определен диапазон параметров, в котором корректное описание мезомасштабных движений в оседающей (всплывающей) суспензии невозможно без учета нестационарных и наследственных сил. В [39] предложена двухконтинуальная модель для описания гравитационной конвекции разреженной суспензии в широком диапазоне отношения плотностей фаз. Определены параметры подобия и рассмотрен предельный случай малоинерционных частиц, в котором постановки задач существенно упрощаются. Приведены примеры численных расчетов гравитационной конвекции при оседании тяжелых частиц в вязкой среде в наклонной двумерной прямоугольной области. Расчетами подтвержден известный экспериментальный факт увеличения эффективной скорости оседания дисперсной примеси при отклонении стенок сосуда от направления силы тяжести. В [40] дается последующее уточнение формулы для ускорения сферического включения и диаграммы с учетом сжимаемости несущей фазы и включения. Исследован дрейф сферического включения в волновых гидродинамических полях приближенными методами (Капицы, Боголюбова-Митропольского, Ван-Дер-Поля). Изучено влияния на дрейф основных нелинейных эффектов, вызванных силами Стокса, Архимеда и присоединенной массы, а также сжимаемостью несущей фазы и включения. Для поля скорости типа стоячей волны $v_1(x, t) = U(x) \sin(\omega t)$ амплитуда скорости несущей фазы аппроксимируется в окрестности включения линейной частью ряда Тейлора $U(x_2) = U(\xi) + U'(\xi)(x_2 - \xi)$, где $\xi = \bar{x}_2$ - среднее по периоду положение центра включения. Выделение фоновой однородной составляющей $U(\xi)$ позволяет оценить амплитуду и сдвиг фазы колебания включения. Неоднородная часть $U'(\xi)(x_2 - \xi)$ дает ненулевое среднее по периоду ускорение даже в случае учета только силы Стокса. Получена формула ускорения дрейфа

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\eta}{\tau_v} + \frac{U(\xi)U'(\xi)}{2} \left\{ (d_0^2 - 1) \left\{ \left[1 + \frac{\tilde{\beta} + (1 - \tilde{\beta})d_0^2}{3} \right] \mu_p^2 - d_0^2 \mu_g^2 \right\} + (1 - \tilde{\beta})d_0^2 \left(1 - \frac{d_0^2}{3} \right) \right\},$$

где $\eta = \frac{d\xi}{dt}$ - средняя по периоду скорость включения;

$$\tilde{\beta} = \frac{3\beta_1}{1 + \{2\sigma/(p_1^0 r_0) + 1\} (3\beta_2 - 1)}, \quad \beta_{1,2} - \text{ жесткости несущей фазы и}$$

включения; $d_{0}^2 = 3\tilde{\rho}_0 / (2 + \tilde{\rho}_0)$; $\tilde{\rho}_0 = \rho_1^0 / \rho_2^0$; $\mu_p^2 = 1/[1 + (\omega\tau_v)^2]$ и $\mu_g^2 = (\omega\tau_v)^2 \mu_p^2 = 1 - \mu_p^2$ суть безразмерные коэффициенты увлечения и обтекания включения; r_0 - невозмущенное значение радиуса включения, $\rho_{1,2}^0$ - невозмущенные плотности несущей фазы и включения, σ – поверхностное натяжение. Первый член в правой части есть среднее тормозящее ускорение от силы Стокса. Второй член дает вибрационную силу, вызывающую дрейф включения. Он состоит из двух составляющих. Первая исчезает только при равенстве плотностей включения и несущей фазы $\tilde{\rho}_0 = 1$. Вторая исчезает при $\tilde{\beta} = 1$, что происходит тогда, когда жесткости равны, а капиллярное число мало $2\sigma/(p_1^0 r_0) \ll 1$. Даже при одинаковых плотностях и коэффициентах жесткостей ускорение дрейфа становится существенным при не слишком малых капиллярных числах. На основе приведенной формулы для несжимаемого включения ($\tilde{\beta} = 0$) обнаружена характерная частота, при переходе через которую ускорение дрейфа меняет направление

$$(\omega_x \tau_v)^2 = (2/9/\tilde{\rho}_0 K)^2 = \frac{8}{3} \frac{1}{\tilde{\rho}_0(\tilde{\rho}_0 + 2)} \frac{\tilde{\rho}_0 - 0,5}{\tilde{\rho}_0 - 2}.$$

На основе этой формулы выделены пять режимов дрейфа (рис.1). Правая часть формулы зависит только от значения относительной невозмущенной плотности несущей фазы $\tilde{\rho}_0$. Она неотрицательна на двух интервалах, при $0 \leq \tilde{\rho}_0 \leq 0,5$ и $2 \leq \tilde{\rho}_0 < \infty$. В интервале $0 \leq \tilde{\rho}_0 \leq 0,5$ при частотах меньших характерной преобладает ускорение к узлам (режим 5); на характерной частоте ускорение дрейфа равно нулю; при частотах больших характерной преобладает ускорение к пучностям (режим 4). В интервале $2 \leq \tilde{\rho}_0 \leq \infty$ при частотах меньше характерной преобладает ускорение к пучностям (режим 2); на характерной частоте ускорение дрейфа равно нулю; при частотах

больших характерной преобладает ускорение к узлам (режим 1). В области $0,5 < \tilde{\rho}_0 < 2$ правая часть формулы отрицательна и поэтому характерная частота не существует. Здесь суммарное ускорение всегда направлено к пучностям (режим 3).

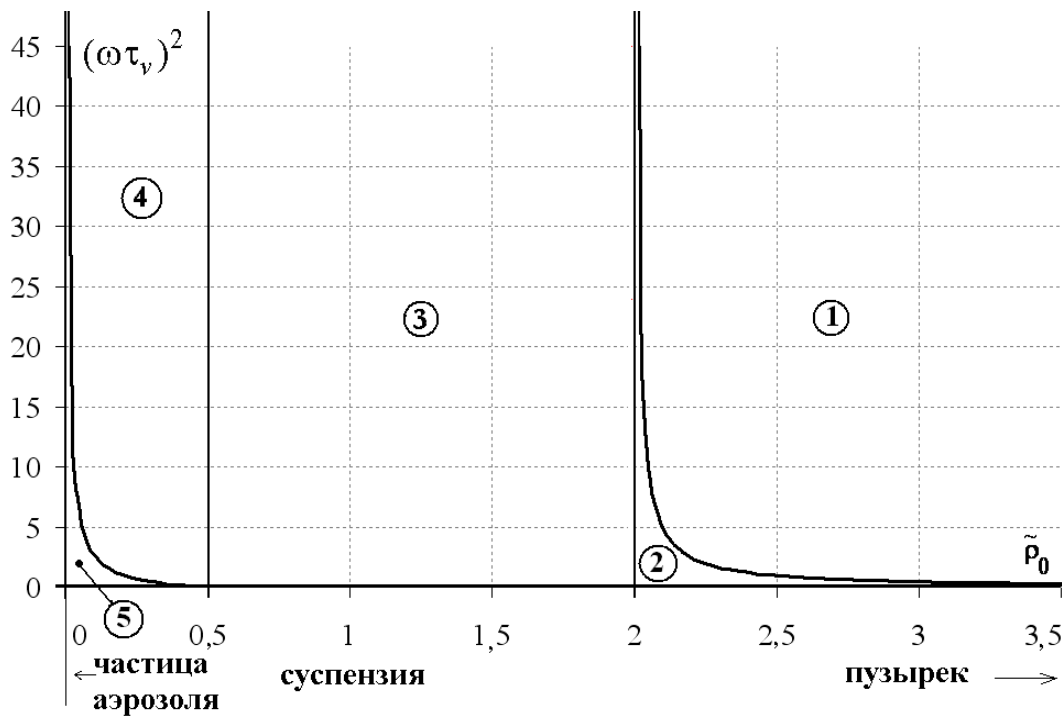


Рис.1. Пять режимов дрейфа в стоячей волне. В режимах 1, 5- ускорение дрейфа направлено к узлам скорости; в 2,3,4 - к пучностям.

В численных расчетах авторов настоящего обзора исследовалось влияние различных сил на направление и характер дрейфа в одномерном резонаторе при наличии периодической ударной волны для параметров $r = 0,75 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, $\rho_1^0 = 1,29 \text{ кг/м}^3$, $\rho_2 = 10 \text{ кг/м}^3$. Величины $v_1 = v_1(x, t)$, $\rho_1 = \rho_1(x, t)$ вычислялись из решения уравнений Эйлера и политропного закона. Амплитуда колебаний левой границы резонатора длиной $L = 4,7 \text{ м}$ равнялась $X_0 = 0,04 \text{ м}$. Результаты приведены на рис.2. Сила Стокса + поправка Клячко обозначены как V , T - период колебаний. Учет всех сил дает приближенное отсутствие дрейфа. Учет только силы V вызывает дрейф к правому концу резонатора. С другой стороны сила $A + t$ вызывает дрейф к центру. В последнем случае амплитуда блужданий частицы возле центра велика.

Борьба отмеченных сил и определяет направление дрейфа включения. Значение безразмерного комплекса равнялось $K \approx 864$.

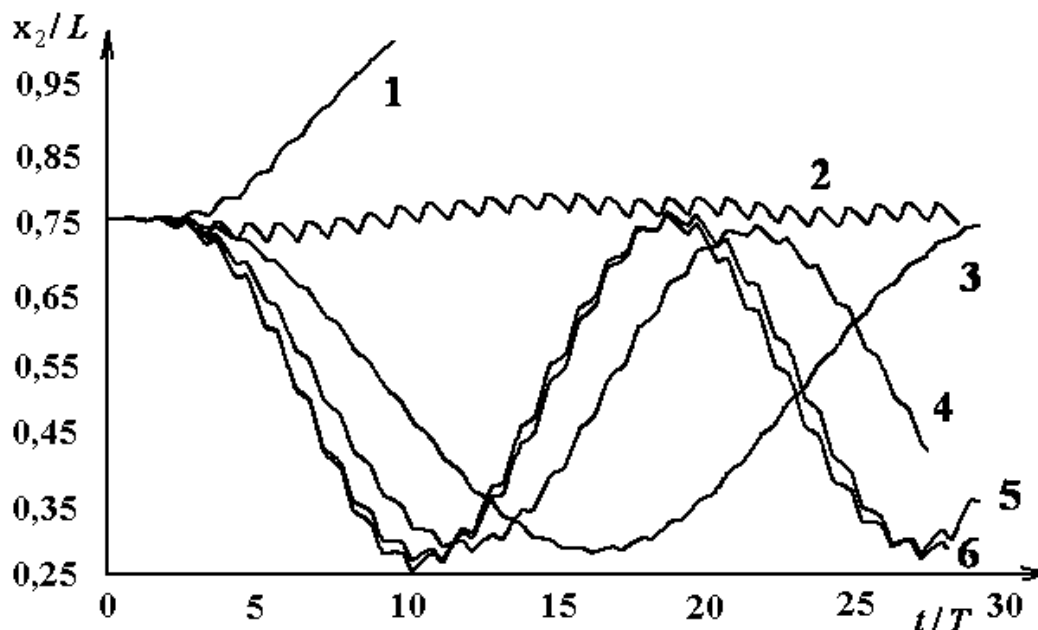


Рис. 2. Влияние различных сил на направление и характер дрейфа:
 1 - V , $A = m = B = 0$; 2 - $V + A + m + B$; 3 - m , $V = A = B = 0$;
 4 - A , $V = m = B = 0$; 5 - $A + m + B$, $V = 0$; 6 - $A + m$, $V = B = 0$.

В работах [41-43] численно исследуются двумерные задачи дрейфа множества включений. Используется явная консервативная схема Мак-Кормака с коррекцией потоков. Кроме этого в [41-42] учитывается теплопроводность несущей фазы и эффекты вязкого разогрева.

Прямое моделирование дрейфа включения

Иной подход заключается в изучении двух и трехмерных задач движения одиночного включения или группы включений в волновых полях [44-46]. Динамика несущей фазы во многих случаях описывается уравнениями Навье-Стокса вместе с подходящим уравнением баротропии. В граничные условия на поверхности включения помимо кинематического условия прилипания несущей фазы входит ускорение включения. Интегрирование уравнений Навье-Стокса и движения включения ведется параллельно. С вычислительной точки зрения этот класс задач является весьма сложным, поскольку область несущей фазы имеет подвижную границу, совпадающую с границей включе-

ния. Прямое моделирование позволяет рассчитывать силы, действующие на включение, используя тензор напряжения. При этом без каких-либо гипотез учитывается отражение ударных волн от включения, обратное влияние динамики включения на несущую фазу, а также образование вихрей за включением, нелинейные эффекты и даже вторичные акустические течения [6]. Более того, появляется возможность учесть тонкие эффекты взаимодействия близких включений [18].

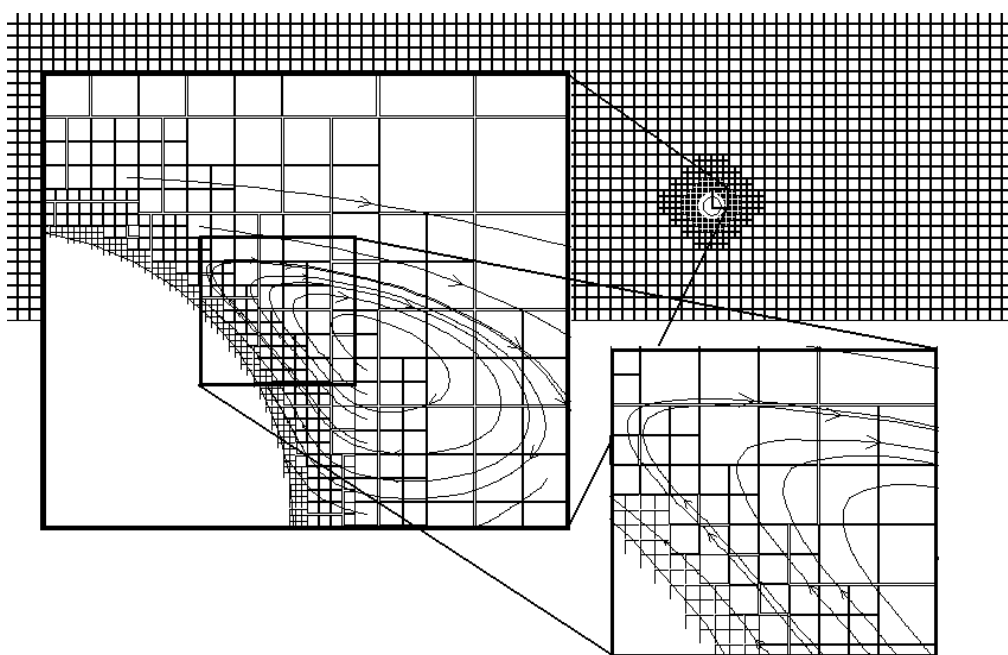


Рис.3. Шестиуровневая сетка

При малых радиусах включения удобно использовать многоуровневые сетки [47-54]. На рис.3 изображена шестиуровневая сетка с аспектным отношением 64. В тех случаях, когда прямое моделирование трудоемко, важно использовать распараллеливание вычислений. В последнее время появились многоядерные графические процессоры фирмы NVIDIA для PC и прилагаемая к ним архитектура параллельных вычислений CUDA. Многоуровневые сетки основаны на квадрато/окта-деревьях [55], что позволяет без больших вычислительных затрат автоматически распределять ячейки сетки между процессорами равномерно, независимо от величины аспектного отношения.

Заключение

При определении основных сил в полях малой интенсивности используются локальные производные по времени, т.е. конвективные производные игнорируются. В интенсивных волновых полях (ударные волны) конвективные члены становятся существенными. При осреднении по периоду конвективные члены, являясь нелинейными, дают ненулевые значения. Поэтому при исследовании дрейфа включений с позиции механики континуумов важную роль играет точное определение конвективных производных по времени. В литературе же при определении сил присоединенных масс нет единой точки зрения. Например, в [1,33] они определяются как в таблице 1. Однако в работе [39] эти силы определены иначе:
$$F_m = \frac{2}{3} \pi r^3 \rho_1 \left(\frac{d_2 v_1}{dt} - \frac{d_2 v_2}{dt} \right).$$

Также для силы Бассэ строгое обоснование существует только в линеаризованном виде для полей малой интенсивности.

Прямое моделирование дрейфа включения избавляет от перечисленных выше неопределенностей и поправок типа Осеена. Однако сквозным счетом пока не удастся точно вычислить силу вязкого трения для быстрых переходных процессов, связанных с установлением пограничных слоев при прохождении ударной волны. Аналогичный вопрос остается открытым при сквозном расчете вторичных течений (Релеевских вихрей) возникающих при наличии вихрей Шлихтинга в очень тонких пограничных слоях (< 150 микрон).

Аналитические исследования дрейфа включения в стоячей волне авторов настоящей статьи показали существование характерных частот, при переходе через которые направление ускорения дрейфа меняется. Численные расчеты одномерного дрейфа тяжелого несжимаемого включения в акустическом резонаторе при наличии периодической ударной волны также обнаруживают смену направления дрейфа при $K \sim 864$. Прямое моделирование осесимметричной задачи о дрейфе сферы в трубе-резонаторе также показывает смену направления дрейфа сферы при $K \sim 4850$ для плотностей включения $\rho_2 = 0,1 \div 1,0 \times 10^3 \text{ кг / м}^3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. М. Наука, 1987. часть 1, 2.
2. *Ганиев Р.Ф., Украинский Л.Е.* Нелинейная волновая механика и технология. М. Изд. R&C Dynamics, 2008, 712 с.
3. *Shih-Yi Tsai, Otterman B.* Particle collection by means of low frequency sound waves//Atmospheric Environment. Vol. 8, Issue 9, September 1974, pp. 873-884.
4. *Vainshtein P., Fichman M., Pnueli D.* On the drift of aerosol particles in sonic fields//J. Aerosol Sci. 1992, 23, pp. 631-637.
5. *Vainshtein P., Fichman M., Shuster K. and Gutfinger C.* The effect of centreline particle concentration in a wave tube//J. Fluid Mech. 1996. vol.306, pp. 31-42.
6. *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Введение в нелинейную акустику. М. Наука. 1966. 519 с.
7. *Григорян С.С., Якимов Ю.Л., Ашитейн Э.З.* Поведение пузырьков воздуха в жидкости при вибрации//Fluid dynamics transactions. v. 3. Warszawa, 1967. pp. 713-719.
8. *Crum L.A., Eller A.I.* Motion of bubbles in a stationary sound field//The Journal of the Acoustical Society of America. 1970. Vol. 48, № 1(2). pp. 181-189.
9. *Блехман И.И.* О движении частиц в полях стоячих и медленно бегущих волн//Вопросы математической физики и прикладной математики/Физ.-тех. ин-т им. А. Ф. Иоффе. СПб., 2007. С. 241-248.
10. *Buchanan R.H., Jameson G.J.* Cycling migration of bubbles in vertically vibrating liquid columns//Ind. Eng. Chem. Fundamen. 1962. 1(2). pp. 82-86.
11. *Houghton G.* The behavior of particles in a sinusoidal velocity field//Proc. of the Royal Society of London, series A. 1962. Vol. 272, 3. pp. 33-43.
12. *Sorokin V.S.* Motion of a deformable particle in an oscillating medium: continuous model//Proc. of the APM 2008. 2008. P. 621-629.
13. *Sorokin V.S., Blekhman I.I., Thomsen J.J.* Motions of elastic solids in fluids under vibration//Nonlinear Dynamics. 2010. Vol. 60, N 4. pp. 639-650.

14. *Блехман И.И., Сорокин В.С.* Движение частицы и пузырька газа в колеблющейся жидкости//Обогащ. руд. 2007. № 3. С. 20-23.
15. *Bleich H.H.* Effect of vibrations on the motion of small gas bubbles in a liquid//Jet Propulsion. Journal of the American Rocket Society. 1956. Vol. 26, 11. pp. 958-964.
16. *Бэтчелор Г.К.* Волны сжатия в суспензии газовых пузырьков в жидкости//Механика. 1968. № 3. С. 65-84.
17. *Bjerknes V.F.K.* Die Kraftfelder. Braunschweig. Germany. Vieweg und Sohn. 1909. 184 s.
18. *Doinikov A.* Viscous effect of force between two bubbles// J. Acoust. Soc. Am., vol. 111, № 4, April 2002. pp.1602-1609.
19. *Духин С.С.* Теория дрейфа аэрозольной частицы в стоячей звуковой волне//Коллоидный журнал. 1960. Т. 22, №1 С.128-130.
20. *Медников Е.П.* Акустическая коагуляция и осаждение аэрозолей. М.: Изд. АНССР, 1963.
21. *Фукс Н.А.* Механика аэрозолей. М.: Изд. АН СССР. 1955, 159 с.
22. *Czyz H.* On the concentration of aerosol particles by means of drift forces in a standing wave field//Acustica. 1990. vol.70, pp.23-28.
23. *Каневский И.Н.* Постоянные силы, возникающие в звуковом поле //Акустический журнал. 1961, т. 7, Вып.1., С. 3-17.
24. *King L.* On the acoustic radiation pressure on spheres//Proc.Roy. Soc. A, 1934, 147, 861, pp.212-240.
25. *Westervelt P.J.* The mean pressure and velocity in a plane acoustic wave in a gas//J. Acoust. Soc. Am. 1950. Vol. 22, N3, pp.319-327.
26. *Westervelt P.J.* The theory of steady forces caused by sound waves//J. Acoust. Soc.Am. 1951. vol.23, N4, pp.312-315.
27. *Westervelt P.J.* Acoustic radiation pressure//J. Acoust. Soc.Am. 1957. 29, 1, pp.26-29.
28. *Yosioka K., Kawasima G.* Acoustic radiation pressure on compressible spheres//Acustica. 1955, v.5, pp. 167-173.
29. *Yosioka K., Kawasima G. and Hirano H.* Acoustic radiation pressure on bubbles and their logarithmic decrement//Acustica. 1955, v.5, pp.173-178.
30. *Горьков Л.П.* О силах, действующих на малую частицу в акустическом поле в идеальной жидкости//Доклады АНССР. 1961. 140, 1, С.88-91.

31. *Czyz H.* The aerosol particle drift in a standing wave field//Arch. Acoust. 1987 . 12, 3-4, Pp. 199-214.
32. *Czyz H., Snakowski J.K.* Influence of acoustical field on small particles //Le Journal de physique. 1994. v.4, pp.861-864.
33. *Kutushev A.G.* Non-stationary shock waves in two-phase gas-particle or gas-droplet mixtures. Saint-Petersburg: Nedra. 2003. 115 p.
34. *Goldshtein A., Shuster K., Vainshtein P., Fichman M., Gutfinger C.* Particle motion in resonance tubes//J. Fluid Mechanics. 1998. v.360, pp.1-20.
35. *Губайдуллин Д.А., Осипов П.П.* Влияние гидродинамических сил на дрейф включений в волновых полях//Казань: Изв. высш. уч. з. Проблемы энергетики. 2010. № 1-2, С. 3-13.
36. *Водопьянов И.С., Петров А.Г., Шундерюк М.М.* О нестационарном осаждении сферической твердой частицы в вязкой жидкости. Изв. Рос.Акад. Наук. МЖГ. 2010, №2. С.97-106.
37. *Висицкий Е.В., Петров А.Г., Шундерюк М.М.* Движение частицы в вязкой жидкости под действием силы тяжести и вибрации при наличии силы Бассе//ПММ. 2009. Т.73. № 5. С.763-775.
38. *Невский Ю.А., Осипцов А.Н.* О роли нестационарных и «наследственных» сил в задачах гравитационной конвекции суспензий//Вест. москов. унив. Серия 1: Математика. Механика. 2008. №4. С.37-44.
39. *Невский Ю.А., Осипцов А.Н.* Моделирование гравитационной конвекции суспензий//Письма в ЖТФ. 2009. т.35, в.7, С.98-106.
40. *Губайдуллин Д.А., Осипов П.П.* О некоторых режимах дрейфа включений в акустических полях//ИФЖ. 2011. Т.84, №2. С. 255-262.
41. *Тукмаков А.Л.* Распределение твердых частиц в акустическом поле резонансной трубы при различных режимах возбуждения колебаний//Теплофизика и аэромеханика. 2005, т.12, №2, С.219-227.
42. *Тукмаков А.Л., Губайдуллин Д.А.* Численное моделирование движения твердых частиц в нелинейном волновом поле акустического резонатора //Изв. вуз. Пробл. энерг. 2008. № 3-4. С.3-13.
43. *Dain Y., Vainshtein P., Fichman M., Gutfinger C.* Side drift in twodimensional slowly oscillating sonic field//Elsevier. Aerosol Science and Technology. 1994. v. 21, pp.149-156.

44. *Zhe Cui, Li Yang, Fan L.S.* Bubble modulation using acoustic standing waves in a bubbling system. Elsevier//Chemical Engineering Sciences. 2005. v.60. pp.5971-5981.
45. *Murman S.M., Aftosmis M.J., Berger M.J.* Implicit approaches for moving boundaries in a 3-D Cartesian method//AIAA Journal. 2003. pp.1119-1130.
46. *Gilmanov A., Sotiropoulos F.* A hybrid Cartesian/immersed boundary method for simulating flows with 3D, geometrically complex, moving bodies// Journal of Computational Physics. 2005. v.207 N2, pp.457-492.
47. *Simpson R.B.* Automatic local refinement for irregular rectangular meshes//Int. J. Num.Meth. Eng, 1979, vol.14, pp.1665-1678.
48. *Berger M.J., Oliger J.* Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations//Journal of computational physics. 1984. v.53, pp. 484-512.
49. *Berger M.J., Colella P.* Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics. Journal of computational physics № 82, 64-84, 1989.
50. *Sussman M., Smereka P., Osher S.* A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow//Journal of Computational Physics. 1994. v.114, pp.114-146.
51. *Arienti M., Hung P., Morano E., Shepherd J.E.* A level set approach to Eulerian-Lagrangian coupling//Journal of Computational Physics. 2003. v.185 №.1, pp.213-251.
52. *Aftosmis M.J., Berger M.J. and Melton J.E.* Robust and Efficient Cartesian Mesh Generation for Component-Based Geometry//AIAA Journal. 1998. v.36(6). pp.952-960.
53. *Ossipov P.* Heuristic algorithm for generating multilevel Cartesian meshes in multidimensional regions with moving boundaries//Applied Mathematics and Computation. 2010. v.215, pp.3684-3695.
54. *Осипов П.П.* Моделирование аэродинамики жилой группы//Изв. КазГАСУ. 2009. №21(12) С.70-75.
55. *Yerry M., Shephard M.* Automatic three dimensional mesh generation by the modified octtree technique//Int. J. Numer. Methods Eng. 1984. v.20, pp.1965-1990.