

УДК 532.529:534.2

**ВЛИЯНИЕ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ  
НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН  
В ДВУХФРАКЦИОННЫХ ПУЗЫРЬКОВЫХ ЖИДКОСТЯХ  
С УЧЕТОМ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ В КАЖДОЙ  
ИЗ ФРАКЦИЙ**

Д.А. Губайдуллин, А.А. Никифоров, Р.Н. Гафиятов  
gubajdullin@mail.knc.ru, anikiforov1@mail.knc.ru, gafiyatov@mail.ru

Исследовано распространение акустических волн в двухфракционных смесях жидкости с парогазовыми пузырьками различных размеров и разного состава с фазовыми превращениями в каждой из фракций. Представлена система дифференциальных уравнений движения смеси, выведено дисперсионное соотношение. Для случая двухфракционной смеси воды с паровоздушными пузырьками и пузырьками гелия с водяным паром выявлено два локальных максимума в зависимости коэффициента затухания от частоты. Выполнены численные расчеты эволюции слабых импульсных возмущений давления в данной смеси. Установлено, что замена части парогазовых пузырьков в монодисперсной пузырьковой смеси с фазовыми переходами на пузырьки другого газа, в зависимости от сорта газа, может приводить как к уменьшению, так и к увеличению коэффициента затухания в низкочастотной области. Показано влияние фазовых превращений в каждой из фракции дисперсной фазы на эволюцию импульса давления малой амплитуды.

**Введение**

В настоящее время значительный интерес представляют исследования волновой динамики дисперсных сред. Значительное количество работ по акустике пузырьковых жидкостей посвящено теоретическому исследованию распространения гармонических возмущений в монодисперсных смесях. Различные проблемы акустики смесей жидкостей с пузырьками газа или пара рассмотрены в известных монографиях [1,2]. Работа [3] посвящена описанию основных особенностей двухфазных сред пузырьковой структуры. Приведен обзор работ по распространению волн в жидкостях с пузырьками постоянной массы и работ по волновой динамике

жидкостей, содержащих пузырьки пара или растворимого газа. В [4], для смеси жидкости с газовыми пузырьками, получена дисперсионная зависимость волнового числа от частоты колебаний и теплофизических свойств фаз в плоском случае, показана необходимость учета сжимаемости несущей фазы для задач акустики пузырьков жидкостей. Задача о распространении малых плоских возмущений в жидкости с пузырьками газа в полидисперсном случае рассмотрена в [5]. В работе [6] рассмотрены парогазовые пузырьки, совершающие малые радиальные колебания в жидкости под действием акустического поля. Показано, что капиллярные эффекты и фазовые переходы в совокупности приводят к новой резонансной частоте мелких паровых пузырьков, отличной от миннаэртвской. В работе [7] в рамках трехтемпературной модели исследуется распространение малых возмущений в двухкомпонентной двухфазной смеси. Показано, что дисперсия определяется неравновесностью тепломассопереноса, а не эффектами скольжения фаз. Модель распространения плоских волн давления малой амплитуды в смеси жидкости с пузырьками газа представлена в работе [8]. Показано, что модель работает хорошо при объемных содержаниях дисперсной фазы 1-2% и только для дорезонансных частот. В [9] получено дисперсионное соотношение, определяющее распространение гармонических возмущений в двухфазных смесях жидкости с пузырьками пара и газа для сферического и цилиндрического случая. Показано сильное влияние значения концентрации пара в пузырьках на затухание импульсных волн. В [10] изучена акустика двухфракционных смесей жидкости с пузырьками разных газов без учета фазовых превращений. В работе [11] исследовано распространение акустических волн в двухфракционных смесях жидкости с парогазовыми и газовыми пузырьками различных размеров и разного состава с фазовыми превращениями в одной из фракций. В настоящей работе впервые изучается динамика слабых возмущений в двухфракционных смесях жидкости с парогазовыми пузырьками различных размеров и разного состава с учетом фазовых превращений в обеих фракциях.

## Слабые волны в двухфракционной смеси жидкости с парогазовыми пузырьками

Рассмотрим случай двухфракционной смеси жидкости с парогазовыми пузырьками различных размеров при наличии фазовых превращений. Линеаризованная система уравнений будет иметь вид аналогичный [9], но с учетом двухфракционности состава дисперсной фазы:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho'_1}{\partial t} + \rho_{10} \frac{\partial v'}{\partial x} &= -J', \quad J' = J'^I + J'^{II}, \\
 \frac{\partial \rho'_2}{\partial t} + \rho_{20}^I \frac{\partial v'}{\partial x} &= J'^I, \quad \frac{\partial \rho'_{V1}}{\partial t} + \rho_{V0}^I \frac{\partial v'}{\partial x} = J'^I, \\
 \frac{\partial \rho'_2}{\partial t} + \rho_{20}^{II} \frac{\partial v'}{\partial x} &= J'^{II}, \quad \frac{\partial \rho'_{V2}}{\partial t} + \rho_{V0}^{II} \frac{\partial v'}{\partial x} = J'^{II}, \\
 \frac{\partial n'^I}{\partial t} + n_0^I \frac{\partial v'}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial n'^{II}}{\partial t} + n_0^{II} \frac{\partial v'}{\partial x} = 0, \\
 \rho_{10} \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{\partial p'_1}{\partial x} &= 0, \quad \rho_{10} c_1 \frac{\partial T'_1}{\partial t} = n_0^I q_{1\Sigma}^I + n_0^{II} q_{1\Sigma}^{II}, \\
 \rho_{20}^I c_2 \frac{\partial T'_2}{\partial t} &= \alpha_{20}^I \frac{\partial p'_2}{\partial t} + n_0^I q_{2\Sigma}^I, \quad \rho_{20}^{II} c_2 \frac{\partial T'_2}{\partial t} = \alpha_{20}^{II} \frac{\partial p'_2}{\partial t} + n_0^{II} q_{2\Sigma}^{II}, \\
 n_0^I q_{1\Sigma}^I + n_0^I q_{2\Sigma}^I &= -l_0 J'^I, \quad n_0^{II} q_{1\Sigma}^{II} + n_0^{II} q_{2\Sigma}^{II} = -l_0 J'^{II}, \\
 \frac{\partial a'^I}{\partial t} &= w_A^I + w_R^I + \frac{J'^I}{4\pi(a_0^I)^2 n_0^I \rho_{10}^\circ}, \quad \frac{\partial a'^{II}}{\partial t} = w_A^{II} + w_R^{II} + \frac{J'^{II}}{4\pi(a_0^{II})^2 n_0^{II} \rho_{10}^\circ}, \\
 a_0^I \frac{\partial w_R^I}{\partial t} + \frac{4v_1}{a_0^I} w_R^I &= \frac{p'_2{}^I - p'_1}{\rho_{10}^\circ}, \quad a_0^{II} \frac{\partial w_R^{II}}{\partial t} + \frac{4v_1}{a_0^{II}} w_R^{II} = \frac{p'_2{}^{II} - p'_1}{\rho_{10}^\circ}, \\
 w_A^I &= \frac{p'_2{}^I - p'_1}{\rho_{10}^\circ C_1 (\alpha_{20}^I)^{1/3}}, \quad w_A^{II} = \frac{p'_2{}^{II} - p'_1}{\rho_{10}^\circ C_1 (\alpha_{20}^{II})^{1/3}}, \\
 p'_1 &= C_1^2 \rho_1^\circ, \\
 \frac{p'_2{}^I}{p_0} &= \frac{\rho_2^{\circ I}}{\rho_{20}^I} + \Delta R^I k_V^I + \frac{T_2^I}{T_0}, \quad \Delta R^I = \frac{R_{V0}^I - R_{G0}^I}{k_{G0}^I R_{G0}^I + k_{V0}^I R_{V0}^I},
 \end{aligned}$$

$$\frac{p_2^{\prime\Pi}}{p_0} = \frac{\rho_2^{\circ\Pi}}{\rho_{20}^{\circ\Pi}} + \Delta R^{\Pi} k_{V'}^{\Pi} + \frac{T_2^{\prime\Pi}}{T_0}, \quad \Delta R^{\Pi} = \frac{R_{V0}^{\Pi} - R_{G0}^{\Pi}}{k_{G0}^{\Pi} R_{G0}^{\Pi} + k_{V0}^{\Pi} R_{V0}^{\Pi}},$$

$$\frac{T_{\Sigma}^{\prime I}}{T_0} = E^I k_{V\Sigma}^{\prime I} + G^I \frac{p_2^{\prime I}}{p_0}, \quad E^I = \frac{R_{V0}^I}{R_{20}^I} \frac{p_0}{l_0 \rho_{V0}^{\circ I}} (1 - k_{V0}^I), \quad G^I = k_{V0}^I E^I,$$

$$\frac{T_{\Sigma}^{\prime\Pi}}{T_0} = E^{\Pi} k_{V\Sigma}^{\prime\Pi} + G^{\Pi} \frac{p_2^{\prime\Pi}}{p_0}, \quad E^{\Pi} = \frac{R_{V0}^{\Pi}}{R_{20}^{\Pi}} \frac{p_0}{l_0 \rho_{V0}^{\circ\Pi}} (1 - k_{V0}^{\Pi}), \quad G^{\Pi} = k_{V0}^{\Pi} E^{\Pi},$$

$$\alpha_1 + \alpha_2^I + \alpha_2^{\Pi} = 1, \quad \alpha_2^I = \frac{4}{3} \pi a_1^3 n^I, \quad \alpha_2^{\Pi} = \frac{4}{3} \pi a_2^3 n^{\Pi}.$$

Здесь и далее  $t$  – время,  $x$  – координата,  $\rho^{\circ}$ ,  $\rho$  – истинная и средняя плотность смеси,  $v$  – скорость,  $p$  – давление,  $n$  – число пузырьков в единице объема,  $T$  – температура;  $a$  – радиус пузырька,  $w$  – скорость радиального движения пузырьков;  $q$  – интенсивность теплообмена,  $\alpha$  – объемное содержание,  $J$  – интенсивность фазовых переходов,  $l$  – удельная теплота парообразования,  $k_i$  – массовая концентрация  $i$ -го компонента дисперсной фазы,  $c$  – удельная теплоемкость,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $\nu_1$  – кинематическая вязкость жидкости,  $C_1$  – скорость звука в несущей фазе,  $R$  – газовая постоянная,  $Nu$  – число Нуссельта. Нижние индексы 1 и 2 относятся к параметрам жидкой и газовой фаз, индексы  $V$  и  $G$  – соответственно к паровому и газовому компонентам фракций, индекс  $\Sigma$  – к поверхности раздела фаз; штрихи обозначают возмущения параметров, индекс 0 – начальное невозмущенное состояние, верхний индекс I относится к параметрам пузырьков первой фракции, индекс II – к параметрам пузырьков второй фракции. Согласно уточнению, приведенному в [4], будем полагать, что возмущение радиальной скорости пузырьков  $w'$  состоит из двух слагаемых:  $w' = w'_R + w'_A$ . Слагаемое  $w'_R$  описывается уравнением Рэлея-Ламба,  $w'_A$  – акустическая добавка, определяемая из решения задачи о сферической разгрузке сферического пузырька в несущей жидкости в акустическом приближении.

Исследуем решения этой системы уравнений, имеющих вид прогрессивных волн [1] для возмущений  $\varphi'$ :

$$\varphi' = A_{\varphi} \exp[i(K_* x - \omega t)] = A_{\varphi} \exp(-K_{**} x) \exp[i(Kx - \omega t)],$$

$$K_* = K + iK_{**}, C_p = \omega / K.$$

Здесь  $i$  – мнимая единица,  $K_*$  – комплексное волновое число,  $K_{**}$  – линейный коэффициент затухания. Через  $C_p$  обозначена фазовая скорость,  $\omega$  – частота возмущений,  $A_\varphi$  – амплитуда возмущений.

Из условия существования у системы линейных уравнений нетривиального решения, было получено следующее дисперсионное соотношение:

$$\left(\frac{K_*}{\omega}\right)^2 = \frac{\alpha_{10}^2}{C_1^2} + \frac{\alpha_{20}^I \rho_{10}}{p_0 N_R^I} \left( 1 + \frac{H_1^I + H_1^{II} + H_2^{II} \left( \frac{M_4^{II}}{M_3^{II}} - \frac{b_1^{II} M_4^I}{b_1^I M_3^{II}} \right)}{\frac{M_3^I}{b_1^I} \left( \frac{H_2^I b_1^I}{M_3^I} + \frac{H_2^{II} b_1^{II}}{M_3^{II}} \right)} \right) +$$

$$+ \frac{\alpha_{20}^{II} \rho_{10}}{p_0 N_R^{II}} \left( 1 + \frac{H_1^I + H_1^{II} + H_2^I \left( \frac{M_4^I}{M_3^I} - \frac{b_1^I M_4^{II}}{b_1^{II} M_3^I} \right)}{\frac{M_3^{II}}{b_1^{II}} \left( \frac{H_2^I b_1^I}{M_3^I} + \frac{H_2^{II} b_1^{II}}{M_3^{II}} \right)} \right), \quad (1)$$

где обозначения расписываются следующим образом:

$$H_1^j = \frac{m^j}{b_1^j \tau_{T1}^j} (b_1^j M_2^j + N_1^j M_4^j), \quad H_2^j = \frac{m^j}{b_1^j \tau_{T1}^j} (b_1^j M_1^j - N_1^j M_3^j),$$

$$M_1^j = G^j - M_2^j - \frac{L_1^j N_3^j}{L_4^j - \frac{m^{0j} - 1}{1 - k_{V0}^j} N_2^j}, \quad M_2^j = \frac{N_2^j L_1^j}{N_R^j} \frac{1}{L_4^j - \frac{m^{0j} - 1}{1 - k_{V0}^j} N_2^j},$$

$$M_3^j = \frac{N_3^j \frac{m^{0j} - 1}{1 - k_{V0}^j} - L_2^j N_3^j}{L_4^j - \frac{m^{0j} - 1}{1 - k_{V0}^j} N_2^j} + L_3^j + M_4^j, \quad M_4^j = \frac{L_4^j - L_2^j N_2^j}{\left( L_4^j - \frac{m^{0j} - 1}{1 - k_{V0}^j} N_2^j \right) N_R^j},$$

$$\begin{aligned}
b_1^j &= \frac{c_1 \tau_{T2}^j}{c_2^j \tau_{T1}^j}, \quad N_R^j = -\frac{\rho_{10}^\circ (i\omega) (a_0^j)^2 G_R^j}{p_0 3(G_R^j t_A^j + 1)}, \quad G_R^j = \frac{1}{t_R^j} - i\omega, \\
t_R^j &= \frac{(a_0^j)^2}{4\nu_1}, \quad t_A^j = \frac{a_0^j}{C_1 (\alpha_{20}^j)^{1/3}}, \quad \tau_{T1}^j = \frac{4c_1 \rho_{20}^{\circ j} (a_0^j)^2}{3Nu_1 \lambda_1}, \quad \tau_{T2}^j = \frac{4c_2^j \rho_{20}^{\circ j} (a_0^j)^2}{3Nu_2^j \lambda_2^j}, \\
N_1^j &= \frac{i\omega \tau_{T1}^j}{2m^j} - 1, \quad N_2^j = i\omega \tau_{T2}^j - 1, \quad N_3^j = k_2^j (c_2^j - R_{20}^j) - 1 + G^j, \\
L_1^j &= E^j (i\omega \tau_m^j - 1), \quad L_2^j = -\frac{l_0 k_2^j}{(1 - k_{V0}^j) T_0} + \Delta R^j - L_1^j (1 + b_1^j), \\
L_3^j &= 1 - G^j (1 + b_1^j), \quad L_4^j = L_1^j + \Delta R^j N_2^j, \quad k_2^j = \frac{i\omega \tau_{T2}^j}{c_2^j}, \quad G^j = k_{V0}^j E^j, \\
E^j &= \frac{p_0 R_{V0}^j}{l_0 \rho_{V0}^{\circ j} R_{20}^j} (1 - k_{V0}^j), \quad \Delta R^j = \frac{R_{V0}^j - R_{G0}^j}{R_{20}^j}, \quad R_{20}^j = k_{G0}^j R_{G0}^j + k_{V0}^j R_{V0}^j, \\
m^{0j} &= \frac{\rho_{20}^{\circ j}}{\rho_{10}^\circ}, \quad m^j = \frac{\rho_{20}^j}{\rho_{10}}, \quad j = \text{I, II}.
\end{aligned}$$

Дисперсионная зависимость (1) комплексного волнового числа  $K_*$  от частоты  $\omega$  определяет распространение акустических возмущений в двухфракционной смеси жидкости с пузырьками различных газов (разных начальных радиусов  $a_0^{\text{I}}$ ,  $a_0^{\text{II}}$  и начальных объемных содержаний  $\alpha_{20}^{\text{I}}$ ,  $\alpha_{20}^{\text{II}}$ ) с учетом межфазного диффузионного массообмена.

### Результаты расчетов

На рис. 1,2 показано сравнение зависимостей фазовой скорости и коэффициента затухания от частоты возмущений для двухфракционной смеси воды с паровоздушными пузырьками и пузырьками гелия с водяным паром (I), монодисперсных смесей воды с паровоздушными пузырьками (II) и пузырьками гелия с водяным паром (III). Расчетные зависимости построены с помощью дисперсионного соотношения (1).

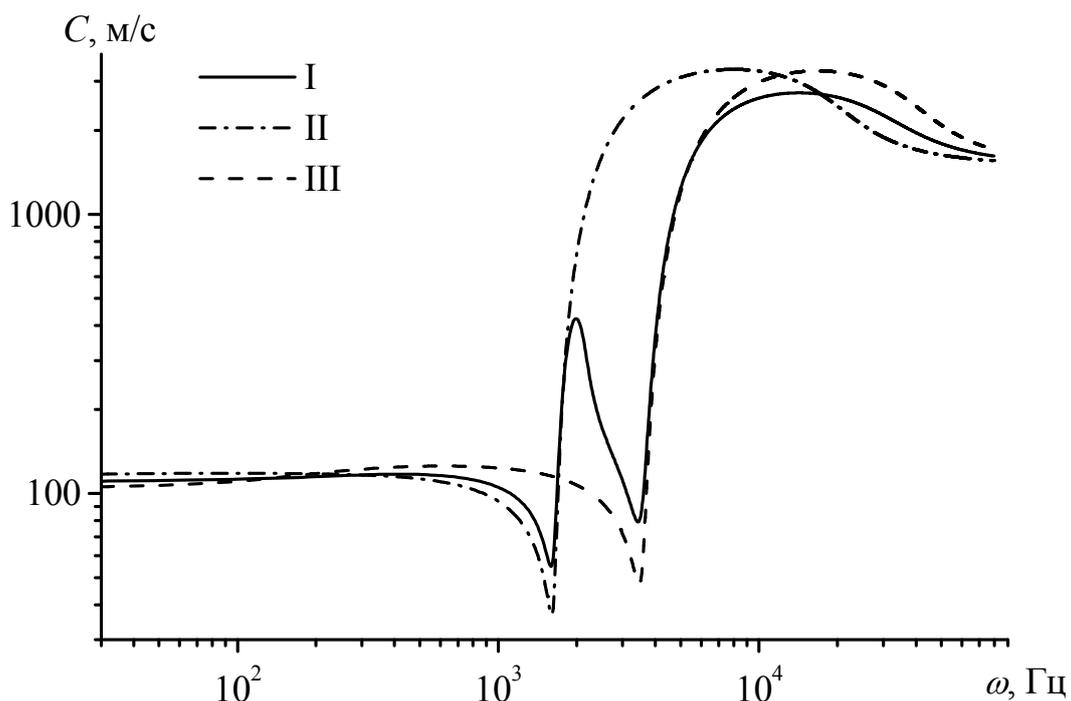


Рис. 1. Зависимость фазовой скорости от частоты для двухфракционной смеси воды с паровоздушными пузырьками и пузырьками гелия с водяным паром (I), монодисперсных смесей воды с паровоздушными пузырьками (II) и пузырьками гелия с водяным паром (III)

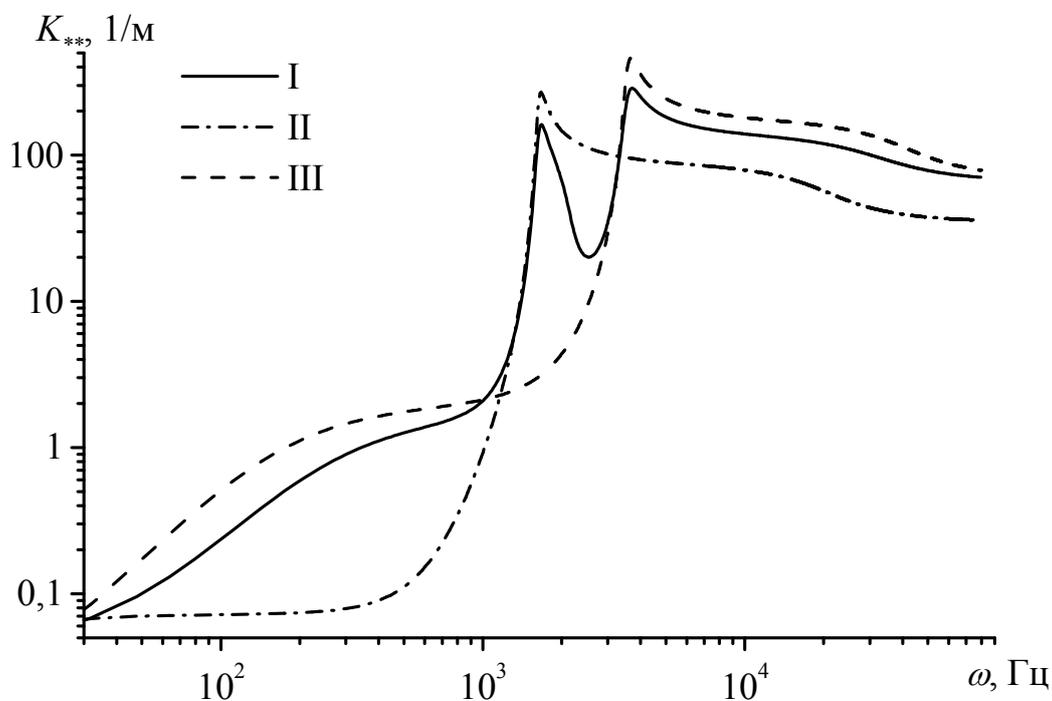


Рис. 2. Зависимость коэффициента затухания от частоты для двухфракционной смеси воды с паровоздушными пузырьками и пузырьками гелия с водяным паром (I), монодисперсных смесей воды с паровоздушными пузырьками (II) и пузырьками гелия с водяным паром (III)

Рис. 1,2 построены при следующих значениях параметров смеси:  $p_0 = 0,1$  МПа,  $T_0 = 327$  К, кривые I построены для значений  $\alpha_2^I = \alpha_2^{II} = 0,005$ ,  $a_0^I = 2 \cdot 10^{-3}$  м,  $a_0^{II} = 10^{-3}$  м, кривые II –  $\alpha_2 = 0,01$ ,  $a_0 = 2 \cdot 10^{-3}$  м, кривые III –  $\alpha_2 = 0,01$ ,  $a_0 = 10^{-3}$  м. Как видно из рис. 2, учет двух фракций различных начальных радиусов дисперсной фазы смеси приводит к возникновению двух локальных максимумов в зависимости коэффициента затухания от частоты (I), в отличие от случая монодисперсной смеси жидкости с пузырьками (кривые II и III). Это обусловлено различием значений резонансных частот собственных колебаний пузырьков каждой из фракций.

На рис. 3,4 показано сравнение зависимостей фазовой скорости и коэффициента затухания от частоты для монодисперсных смесей воды с паровоздушными пузырьками (I), с паровоздушными пузырьками и пузырьками гелия с водяным паром (II), с паровоздушными пузырьками и пузырьками углекислого газа с водяным паром (III).

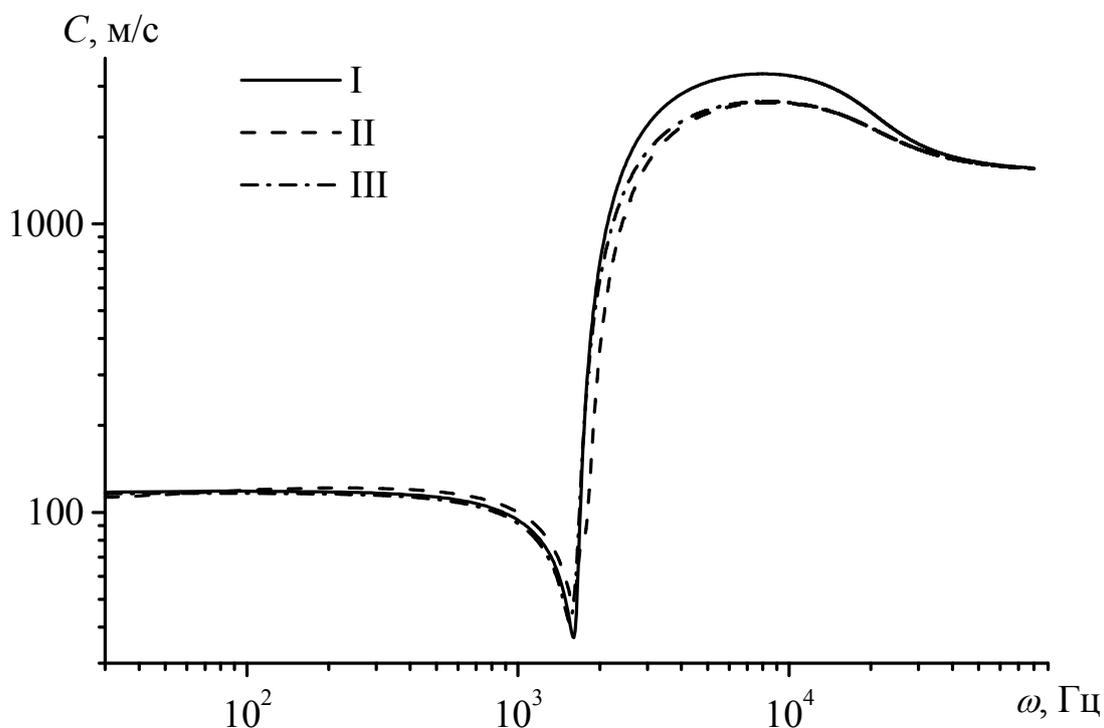


Рис. 3. Зависимость фазовой скорости от частоты для монодисперсных смесей воды с паровоздушными пузырьками (I), с паровоздушными пузырьками и пузырьками гелия с водяным паром (II), с паровоздушными пузырьками и пузырьками углекислого газа с водяным паром(III)

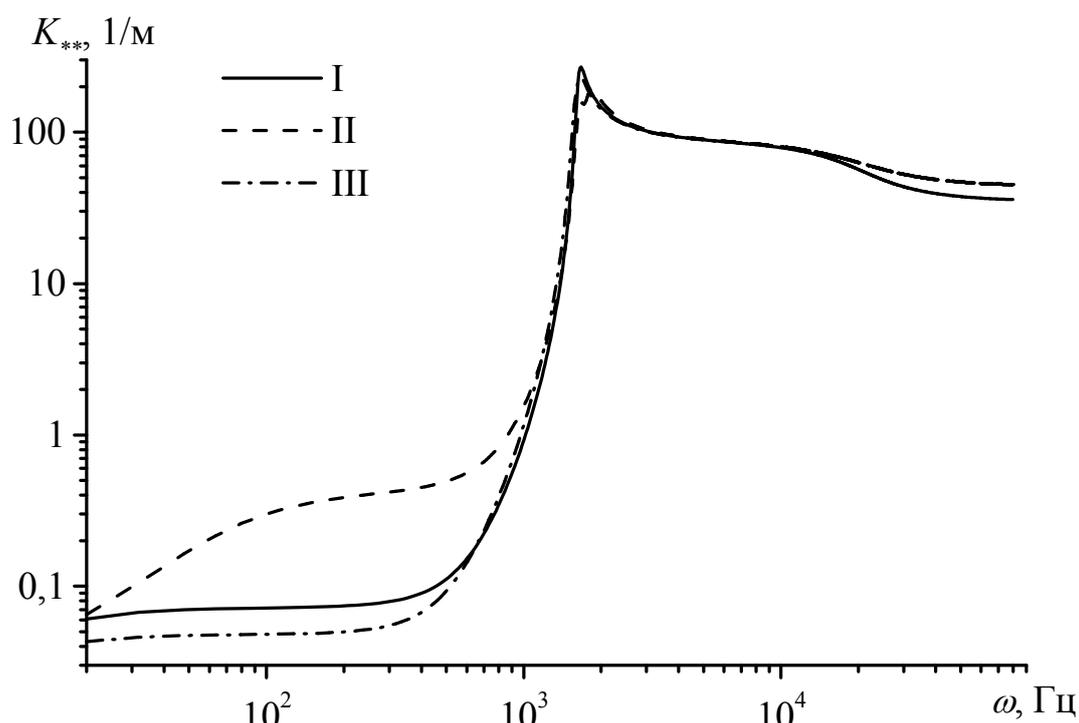


Рис. 4. Зависимость коэффициента затухания от частоты для монодисперсных смесей воды с паровоздушными пузырьками (I), с паровоздушными пузырьками и пузырьками гелия с водяным паром (II), с паровоздушными пузырьками и пузырьками углекислого газа с водяным паром(III)

Кривые I построены при значениях  $\alpha_2 = 0,01$ ,  $a_0 = 2 \cdot 10^{-3}$  м, кривые II и III –  $\alpha_2^I = \alpha_2^{II} = 0,005$ ,  $a_0^I = a_0^{II} = 2 \cdot 10^{-3}$  м, значения коэффициента температуропроводности для углекислого газа с водяным паром –  $\kappa = 2,6 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с, для воздуха с паром –  $\kappa = 4 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с, для гелия с водяным паром –  $\kappa = 19,8 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с. Как видно из рис. 4, замена части паровоздушных пузырьков в монодисперсной пузырьковой смеси на пузырьки углекислого газа приводит к уменьшению коэффициента затухания в низкочастотной области. Однако, замена части паровоздушных пузырьков на пузырьки гелия приводит к увеличению коэффициента затухания в низкочастотной области. Это связано с более высоким значением коэффициента температуропроводности гелия по сравнению с углекислым газом и воздухом.

Рассмотрим теперь эволюцию импульсов давления типа гауссовой кривой, создаваемых на границе пузырьковой среды, когда начальная форма импульсов описывается функцией вида:

$$p(0, t) = \exp[-((t - t_*) / N)^2]$$

где  $t_*$  – половина длительности импульса,  $N$  – параметр, определяющий ширину пика импульса. Расчеты проводились с помощью дисперсионного соотношения (1), при использовании подпрограмм быстрого преобразования Фурье [12], по методике, изложенной в [13].

На рис. 5 показано сравнение эволюции импульса давления для двухфракционной смеси воды с паровоздушными пузырьками воздуха и пузырьками гелия с водяным паром (I), монодисперсных смесей воды с паровоздушными пузырьками (II) и пузырьками гелия с водяным паром (III).

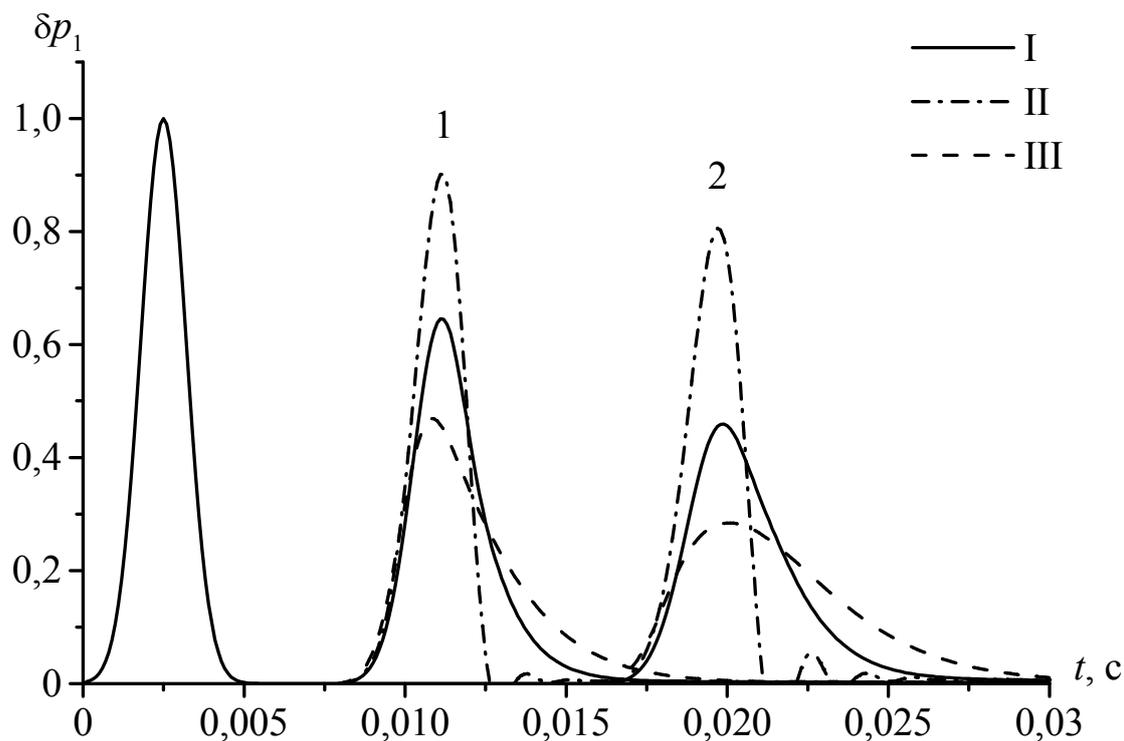


Рис. 5. Эволюция импульсного возмущения давления в двухфракционной смеси воды с паровоздушными пузырьками и пузырьками гелия с водяным паром (I), монодисперсных смесей воды с паровоздушными пузырьками (II) и пузырьками гелия с водяным паром (III)

Кривые I построены при значениях  $\alpha_2^I = \alpha_2^{\text{II}} = 0,005$ ,  $a_0^I = 10^{-3}$  м,  $a_0^{\text{II}} = 2 \cdot 10^{-3}$  м, кривые II –  $\alpha_2 = 0,01$ ,  $a_0 = 10^{-3}$  м, кривые III –  $\alpha_2 = 0,01$ ,  $a_0 = 2 \cdot 10^{-3}$  м. Расчетные профили построены на расстоянии 1 м и 2 м от места инициирования импульса соответственно. Видно, что затухание импульсов давления для двухфракционного случая больше по сравнению с монодисперсными смесями воды с паровоздушными пузырьками, и меньше – с пузырьками гелия с водяным паром. Это соответствует характеру коэффициента затухания в низкочастотной области на рис. 2.

### **Заключение**

Изучено распространение акустических волн в двухфракционных смесях жидкости с парогазовыми пузырьками различных размеров с учетом фазовых превращений в каждой из фракций. Учет двухфракционности состава дисперсной фазы смеси жидкости с парогазовыми пузырьками разных размеров приводит к появлению двух локальных максимумов в зависимости коэффициента затухания от частоты в области значений резонансных частот парогазовых пузырьков. Установлено, что замена части паровоздушных пузырьков в монодисперсной смеси воды на пузырьки гелия приводит к увеличению коэффициента затухания, а при замене на пузырьки углекислого газа – к уменьшению коэффициента затухания в низкочастотной области. С помощью метода быстрого преобразования Фурье выполнены расчеты по распространению импульсных возмущений давления малой амплитуды в двухфракционных смесях жидкости с парогазовыми пузырьками.

### **ЛИТЕРАТУРА**

1. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч.1,2. М.: Наука, 1987.
2. *Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р.* Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990. 246 с.

3. *Губайдуллин А.А., Ивандаев А.И., Нигматуллин Р.И., Хабеев Н.С.* Волны в жидкостях с пузырьками // В сб.: Итоги науки и техники, сер. МЖГ. ВИНТИ. 1982. Т. 17. С. 160–249.
4. *Нигматуллин Р.И., Шагапов В.Ш., Вахитова Н.К.* Проявление сжимаемости несущей жидкости при распространении волн в пузырьковой среде // Докл. АН СССР. 1989. Т.304. № 5. С. 1077-1081.
5. *Шагапов В.Ш.* Распространение малых возмущений в жидкости с пузырьками // Прикладная механика и техническая физика. 1977. № 1. С. 91.
6. *Nigmatulin R.I., Khabeev N.S., Nagiev F.B.* Dynamics, Heat and Mass Transfer of Vapour-gas Bubbles in a Liquid // Int. J. Heat and Mass Transfer. 1981. V. 24. № 6. P.1033.
7. *Азаматов А.Ш., Шагапов В.Ш.* Распространение малых возмущений в парогазожидкостной среде // Акустический журнал. 1981. Т. 27. № 2. С. 161-169.
8. *Kerry W. Commander, Andrea Prosperetti.* Linear pressure waves in bubbly liquids: Comparison between theory and experiments // J. of the Acoustical Society of America. 1989. V. 85. № 2. P.732.
9. *Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А.* Акустические возмущения в смеси жидкости с пузырьками пара и газа // Теплофизика высоких температур. 2010. Т. 48. № 2. С. 188-192.
10. *Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А. Гафиятов Р.Н.* Акустические волны в двухфракционной смеси жидкости с пузырьками разных газов и различного начального радиуса // Известия ВУЗов. Проблемы энергетики. 2009. Т. 3-4. С. 3-9.
11. *Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А. Гафиятов Р.Н.* Акустические волны в двухфракционных пузырьковых жидкостях с фазовыми превращениями // Теплофизика высоких температур. 2011. Т. 49. № 6. (В печати)
12. *Гапонов В.А.* Пакет программ быстрого преобразования Фурье с приложениями к моделированию случайных процессов. Препр. АН СССР, Сиб. Отделение: ИТФ, 1976. Т. 5. 19 с.
13. *Губайдуллин Д.А.* Динамика двухфазных парогазокапельных сред. Изд-во Казанского математического общества, 1998. 153 с.