

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КАТЕНОИДНОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ ИЗ ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

М.С. Ганеева, З.В. Скворцова
ganeeva@kfti.knc.ru, zara.skvortsova@mail.ru

Для катеноидной оболочки из ортотропного материала получено аналитическое безмоментное решение. Рассмотрено условие равнопрочности изотропной оболочки. Представлен приближенный расчет моментного состояния.

1. Рассматривается оболочка вращения, срединная поверхность которой представляет собой катеноид – поверхность, образуемую вращением цепной линии

$$r = a \operatorname{ch} \frac{x}{b}$$

вокруг оси x (рис. 1). Здесь r – радиус параллели, a – ось поверхности в направлении r , b – мнимая ось.

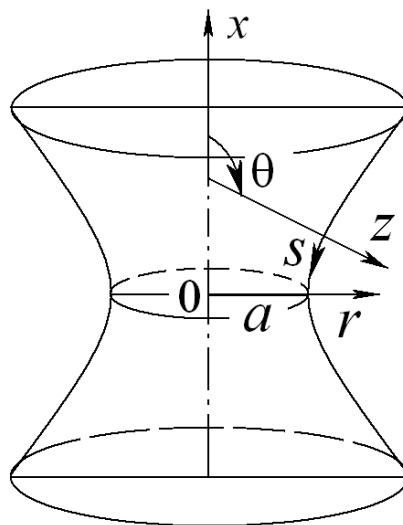


Рис. 1. Катеноидная оболочка вращения

Главные радиусы кривизны катеноида [1]:

$$R_1 = - \frac{\left(b^2 + a^2 \operatorname{sh}^2 \frac{x}{b}\right)^{3/2}}{br}, \quad R_2 = \frac{r \left(b^2 + a^2 \operatorname{sh}^2 \frac{x}{b}\right)^{1/2}}{b}.$$

Здесь R_1 – радиус кривизны меридионального сечения, R_2 – второй радиус кривизны, равный расстоянию по нормали z от точки меридиана до оси вращения x . При $b=a$ катеноид представляет собой минимальную поверхность, средняя кривизна которой равна нулю, гауссова кривизна отрицательна:

$$r = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, \quad R_1 = -a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}, \quad R_2 = a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}, \quad R_1 = -R_2, \quad R_1 + R_2 = 0. \quad (1)$$

Далее изучается напряженно-деформированное состояние (НДС) катеноидной оболочки (1) под действием равномерно распределенного давления P и равномерного нагрева от начальной температуры T_0 до текущей температуры T_c . Используются обозначения: s – дуга меридиана срединной поверхности (СП), z – координата в направлении внешней нормали, $s_0 \leq s \leq s_N$, $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$, $r = R_2 \sin \theta$ – радиус параллели, h – толщина оболочки, θ – угол между осью x и нормалью z , $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_N$, $T = T_c - T_0$; $k_1 = \frac{1}{R_1}$, $k_2 = \frac{1}{R_2}$ – главные кривизны СП. Соотношения Кодацци-Гаусса дают $\frac{dr}{ds} = \cos \theta$, $ds = R_1 d\theta$. В системе координат s, z главные радиусы кривизны и угол θ имеют выражения:

$$R_1 = - \frac{a}{\sin^2 \theta}, \quad R_2 = \frac{a}{\sin^2 \theta}; \quad (2)$$

$$\theta = \pi - \arcsin \left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x/a)} \right) \quad \text{при } x \geq 0,$$

$$\theta = \arcsin \left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x/a)} \right) \quad \text{при } x \leq 0.$$

В безмоментной постановке необходимые соотношения осесимметричной термосиловой задачи имеют следующий вид [1, 2]: уравнения равновесия:

$$\frac{d(rT_1)}{ds} - T_2 \cos \theta = 0, \quad k_1 T_1 + k_2 T_2 - P = 0; \quad (3)$$

выражения деформаций через перемещения:

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{ds} + k_1 w = k_1 \left(\frac{du}{d\theta} + w \right), \quad \varepsilon_2 = k_2 (u \operatorname{ctg} \theta + w); \quad (4)$$

закон Гука для ортотропного материала в температурной задаче:

$$\sigma_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} (\varepsilon_1 + \nu_{12}\varepsilon_2) - \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} (\alpha_1 + \nu_{12}\alpha_2)T, \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad (5)$$

$$E_1 \nu_{12} = E_2 \nu_{21}, \quad E_2 = nE_1, \quad \nu_{12} = n\nu_{21};$$

выражения деформаций через напряжения:

$$\varepsilon_1 = (\sigma_{11} - \nu_{21}\sigma_{22})/E_1 + \alpha_1 T, \quad \varepsilon_2 = (\sigma_{22} - \nu_{12}\sigma_{11})/E_2 + \alpha_2 T. \quad (6)$$

В формулах (3)–(6) индекс 1 соответствует направлению меридиана s , индекс 2 – параллели перпендикулярно s ; обозначено: T_1, T_2 – усилия; $\sigma_{11} = T_1/h$, $\sigma_{22} = T_2/h$ – напряжения; u , w – касательное перемещение точки СП в направлении s и прогиб в направлении нормали z ; $E_1, E_2, \nu_{12}, \nu_{21}, \alpha_1, \alpha_2$ – модули упругости, коэффициенты Пуассона и коэффициенты линейного температурного расширения, соответственно. Характеристики материала полагаются не зависящими от температуры.

Из уравнений (3) при условии (1) следует:

$$\frac{dT_1}{ds} = P \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad T_1 - T_2 = PR_1$$

или

$$T_1 = \int_{s_0}^s P \frac{\cos \theta}{\sin \theta} ds + C = -Pa \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} d\theta + C, \quad T_1 - T_2 = PR_1. \quad (7)$$

С учетом (2) из (7) получается:

$$T_1 = \frac{P}{2}(R_2(\theta) - R_2(\theta_0)) + C,$$

$$T_2 = \frac{P}{2}(3R_2(\theta) - R_2(\theta_0)) + C.$$

Константа интегрирования C определяется из граничных условий в направлении оси x – днища закрыты крышками под давлением на них P :

$$T_1(\theta_0) = \frac{PR_2(\theta_0)}{2}. \quad (8)$$

Тогда

$$C = \frac{PR_2(\theta_0)}{2}, \quad T_1 = \frac{PR_2(\theta)}{2}, \quad T_2 = \frac{3}{2}PR_2(\theta). \quad (9)$$

Отметим, что выражения (9) для усилий T_1, T_2 совпадают с формулами для оболочки вращения без отверстия в полюсе [3].

Для определения перемещений получим с использованием соотношений (4)–(6) следующее уравнение:

$$\frac{du}{d\theta} = -\tilde{e}\tilde{q}a \frac{1}{\sin^4 \theta} - (\alpha_1 + \alpha_2)T \frac{a}{\sin^2 \theta} + u \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad (10)$$

где обозначено:

$$\tilde{e} = \frac{E_2 + 3E_1 - 4E_2\nu_{21}}{E_1E_2} = \frac{n + 3 - 4\nu_{12}}{E_2}, \quad \tilde{q} = \frac{Pa}{2h}.$$

После замены [1]:

$$u = g(\theta) \sin(\theta) \quad (11)$$

из (10) следует уравнение для функции $g(\theta)$:

$$\frac{dg}{d\theta} = -q \frac{1}{\sin^5 \theta} - \tilde{T} \frac{1}{\sin^3 \theta}, \quad (12)$$

где введены обозначения:

$$q = \frac{Pa^2}{2hE_2}(n + 3 - 4\nu_{12}), \quad \tilde{T} = a(\alpha_1 + \alpha_2)T.$$

Воспользуемся формулами для неопределенных интегралов [4]:

$$\int \frac{d\theta}{\sin^3 \theta} = -\frac{\cos \theta}{2\sin^2 \theta} + \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2},$$

$$\int \frac{d\theta}{\sin^5 \theta} = -\frac{\cos \theta}{4} \left(\frac{1}{\sin^4 \theta} + \frac{3}{2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) + \frac{3}{8} \operatorname{Intg} \frac{\theta}{2}$$

и введем функцию:

$$f(\theta) = -q \left[-\frac{\cos \theta}{4} \left(\frac{1}{\sin^4 \theta} + \frac{3}{2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) + \frac{3}{8} \operatorname{Intg} \frac{\theta}{2} \right] - \tilde{T} \left(-\frac{\cos \theta}{2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{Intg} \frac{\theta}{2} \right). \quad (13)$$

Тогда после интегрирования уравнения (12) получим выражение функции $g(\theta)$:

$$g(\theta) = f(\theta) - f(\theta_0) + B, \quad (14)$$

где константа интегрирования B определяется из граничного условия на перемещение u . Рассмотрим некоторые случаи:

$$\text{при } u(\theta_0) = 0 \quad B = 0, \quad g(\theta) = f(\theta) - f(\theta_0); \quad (15)$$

$$\text{при } u(\pi/2) = 0 \quad B = f(\theta_0), \quad g(\theta) = f(\theta); \quad (16)$$

$$\text{при } u(\theta_N) = 0 \quad B = f(\theta_0) - f(\theta_N), \quad g(\theta) = f(\theta) - f(\theta_N). \quad (17)$$

Прогиб w определяется из формулы (4) с учетом (6):

$$w = \frac{Pa^2}{2h} \frac{3 - \nu_{12}}{E_2} \frac{1}{\sin^4 \theta} + \frac{a}{\sin^2 \theta} \alpha_2 T - g(\theta) \cos \theta. \quad (18)$$

На экваторе $\theta = \frac{\pi}{2}$ прогиб имеет выражение

$$w\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{Pa^2}{2h} \frac{3 - \nu_{12}}{E_2} + a\alpha_2 T$$

и не зависит от граничных условий (15)–(17) на перемещение u . Для закрытого цилиндра радиуса R [5]:

$$w = \frac{PR^2}{2h} \frac{2 - \nu_{12}}{E_2} + R\alpha_2 T,$$

$$T_1 = \frac{PR}{2}, \quad T_2 = PR.$$

2. Переменная толщина изотропной равнопрочной оболочки минимальной поверхности при безмоментном НДС.

Используем условие пластичности

$$\sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22}} = \sigma_s, \quad s_0 \leq s \leq s_N,$$

или через усилия:

$$\frac{1}{h} \sqrt{T_1^2 + T_2^2 - T_1 T_2} = \sigma_s.$$

Поскольку

$$\sqrt{T_1^2 + T_2^2 - T_1 T_2} = 1,323 P R_2 = 1,323 \frac{Pa}{\sin^2 \theta},$$

то после введения безразмерных величин

$$\bar{T}_1 = T_1 / \left(\frac{Pa}{2} \right), \quad \bar{T}_2 = T_2 / \left(\frac{Pa}{2} \right), \quad \bar{h} = h / \left(1,323 \frac{Pa}{\sigma_s} \right)$$

получим:

$$\bar{h} = \frac{1}{\sin^2 \theta}, \quad \bar{T}_1 = \frac{1}{\sin^2 \theta}, \quad \bar{T}_2 = \frac{3}{\sin^2 \theta}. \quad (19)$$

С учетом

$$\frac{r}{a} = \operatorname{ch} \frac{x}{a}, \quad \frac{r}{a} = \frac{R_2}{a} \sin \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

найдем:

$$\operatorname{ch} \frac{x}{a} = \frac{1}{\sin \theta}, \quad \bar{h} = \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}, \quad \text{или} \quad \bar{h} = \left(\frac{r}{a} \right)^2. \quad (20)$$

В табл. 1 приведены числовые данные о толщине равнопрочной оболочки. Видно, что толщина равнопрочной оболочки \bar{h} существенно переменная.

Таблица 1. Толщина равнопрочной оболочки

| | | | | | | | |
|-----------|---|------|------|------|------|------|------|
| x/a | 0 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,2 | 1,4 |
| r/a | 1 | 1,08 | 1,19 | 1,34 | 1,54 | 1,81 | 2,15 |
| \bar{h} | 1 | 1,17 | 1,42 | 1,80 | 2,37 | 3,28 | 4,62 |

3. Для приближенного расчета моментного состояния примем, что результаты, полученные выше, относятся к срединной поверхности нетонкой оболочки, находящейся под действием только давления P на одной из лицевых поверхностей $z = h_f$. При этом для оболочки минимальной поверхности давление, приведенное к срединной поверхности, будет:

$$X_3 = P(1 + k_1 h_f)(1 + k_2 h_f) \approx P(1 + h_f(k_1 + k_2)) = P.$$

Характеристики моментного НДС записываются в виде [2]:
перемещения и повороты

$$u^z = u + z\vartheta_1, \quad w^z \approx w; \quad \vartheta_1 = -\frac{dw}{ds} + k_1 u, \quad \vartheta_2 = 0;$$

изменения кривизн

$$\kappa_{11} = \frac{d\vartheta_1}{ds}, \quad \kappa_{22} = \frac{\cos \theta}{r} \vartheta_1;$$

деформации на уровне z :

$$\varepsilon_{11}^z = \frac{\varepsilon_1 + z\kappa_{11}}{1 + k_1 z}, \quad \varepsilon_{22}^z = \frac{\varepsilon_2 + z\kappa_{22}}{1 + k_2 z};$$

напряжения через деформации

$$\sigma_{11}^z = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} (\varepsilon_{11}^z + \nu_{12}\varepsilon_{22}^z), \quad \sigma_{22}^z = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} (\varepsilon_{22}^z + \nu_{21}\varepsilon_{11}^z); \quad (21)$$

обратные соотношения

$$\varepsilon_{11}^z = \frac{\sigma_{11}^z - \nu_{21}\sigma_{22}^z}{E_1}, \quad \varepsilon_{22}^z = \frac{\sigma_{22}^z - \nu_{12}\sigma_{11}^z}{E_2}.$$

Далее используются соотношения из п. 1 при граничных условиях (8), (16). Получим:

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= \frac{Pa}{2hE_2} \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} (n-9), \\ \kappa_{11} &= \frac{P}{2hE_2} (n-9) \frac{1 + 2\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}, \quad \kappa_{22} = \frac{P}{2hE_2} (n-9) \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}, \\ 1 + k_1 z &= 1 - \frac{z}{a} \sin^2 \theta, \quad 1 + k_2 z = 1 + \frac{z}{a} \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{Pa}{2hE_2} \frac{1}{\sin^2 \theta} n(1-3\nu_{21}), \quad \varepsilon_2 = \frac{Pa}{2hE_2} \frac{1}{\sin^2 \theta} (3-\nu_{12}), \quad (22)$$

$$\varepsilon_{11}^z = \frac{P}{2E_2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[\frac{a}{h} n(1-3\nu_{21}) + \frac{z}{h} (n-9)(1+2\cos^2 \theta) \right] / (1+k_1z),$$

$$\varepsilon_{22}^z = \frac{P}{2E_2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[\frac{a}{h} (3-\nu_{12}) + \frac{z}{h} (n-9)\cos^2 \theta \right] / (1+k_2z).$$

Напряжения $\sigma_{11}^z, \sigma_{22}^z$ определяются по формулам (21), из которых видно, что в случае изотропного материала ($E_1 = E_2 = E$, $n = 1$, $\nu_{12} = \nu_{21} = \nu$) напряжения зависят только от коэффициента Пуассона ν и не зависят от модуля упругости E .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 432 с.
2. *Ганеева М.С.* Термосиловая задача в геометрически и физически нелинейной теории нетонких и тонких оболочек / КФТИ КФАН СССР, 1985. 126 с. Деп. в ВИНТИ 24.06.85, № 4459-85Деп.
3. *Геккелер И.В.* Статика упругого тела. Пер. с нем. М.-Л.: ОНТИ, Гостехтеориздат, 1934. 287 с.
4. *Рыжик И.М., Градштейн И.С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Л.: Гостехтеориздат, 1951. 464 с.
5. *Ганеева М.С., Скворцова З.В.* Напряженно-деформированное состояние ортотропных оболочек вращения при термосиловом нагружении // Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 10-летию ИММ КазНЦ РАН. Казань: ИММ КазНЦ РАН, 2001. С. 128 - 136.