

НЕЛИНЕЙНЫЙ ИЗГИБ ПЛОСКИХ ПРЕДОХРАНИТЕЛЬНЫХ МЕМБРАН

М.С. Ганеева, М.А. Ильгамов, В.Е. Моисеева
ganeeva@kfti.knc.ru

К средствам защиты различных аппаратов, в частности, реакторов в химической и нефтехимической промышленности относятся предохранительные мембраны [1]. Поскольку рабочие условия взрывоопасных аппаратов многообразны и изменчивы, остаются актуальными вопросы изучения напряженно-деформированного состояния и срабатывания предохранительных мембран с максимальным учетом их особенностей. В частности, необходим учет расстояния разрывающего штока от плоскости мембраны, ее нелинейных свойств, зависимости давления в полости от сжимаемости среды и деформации мембраны. Важно оптимальное распределение напряжений по радиусу мембраны для ее эффективного разрыва. В работе численно исследуется нелинейный осесимметричный изгиб круглых пластин под действием давления сжимаемой жидкости в полости с позиций применения их в качестве предохранительных мембран.

1. Постановка задачи и метод решения. Рассматривается нелинейный осесимметричный изгиб круглой пластины под действием

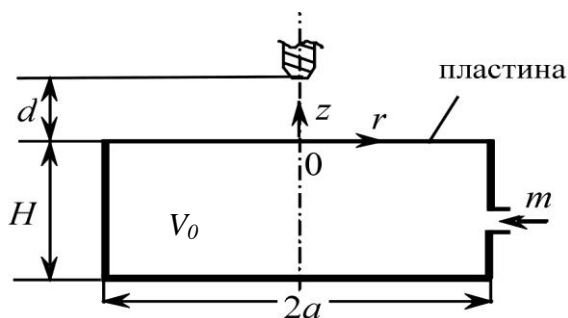


Рис.1

давления жидкости. Невесомая сжимаемая жидкость находится в герметически закрытой емкости с жесткими стенками. Давление в емкости создается медленной подачей жидкости. Пластина в процессе деформации может взаимодействовать с цилиндрическим штоком радиуса

r_0 , расположенным на высоте d над центром недеформированной пластины (рис.1). Характеристики жидкости: M_0, V_0, p_0 - масса, объем и давление при ненапряженном состоянии пластины; m, V, p - масса дополнительно поданной в емкость жидкости, соответствующее

изменение объема емкости и установившееся в ней давление. Принято, что давление p в емкости изменяется по адиабатическому закону [2]:

$$p = p_0((1 + m/M_0)/(1 + V/V_0))^\gamma, \quad (1)$$

где γ – коэффициент адиабаты. Таким образом, в данной задаче параметром нагружения будет служить масса подаваемой в емкость жидкости m .

Используются соотношения теории оболочек, описывающие осесимметричное, моментное, геометрически и физически нелинейное напряженно-деформированное состояние (НДС) пластины при умеренных поворотах [3] под действием давления на пластину $P = p - p_0$. Далее p_0 принимается равным атмосферному давлению. Напряжения через деформации представляются по теории малых упругопластических деформаций [4] для сжимаемого материала с диаграммой линейного упрочнения с коэффициентом упрочнения λ , модулем упругости E , коэффициентом Пуассона ν , пределом текучести σ_S .

Для вектора разрешающих функций [5]:

$$Y = (T_{11}^*, Q_1^*, M_{11}, P, u, w, \vartheta_1, B)',$$

где $B(r)$ – функция изменения объема из-за прогиба пластины $w(r)$:

$$B(r) = 2\pi \int_0^r wr dr, \quad B(0) = 0, \quad B(a) = V, \quad (2)$$

получена нелинейная разрешающая система уравнений:

$$dY/dr = A(r)Y + F(r, Y), \quad 0 \leq r \leq a. \quad (3)$$

Здесь $A(r)$ – матрица коэффициентов размерности 8×8 , $F(r, Y)$ – вектор геометрически и физически нелинейных членов 8×1 .

В случае, когда шток отсутствует или не достигнут пластиной, используются предельные уравнения в полюсе $r = 0$ [3] и граничные условия (ГУ):

$$Q_1^* = 0, \quad u = 0, \quad \vartheta_1 = 0, \quad B = 0 \quad \text{при} \quad r = 0. \quad (4)$$

При достижении пластиной штока на высоте d вместо (4) вводятся условия:

$$u = 0, \quad \vartheta_1 = 0, \quad B = 0, \quad w = d \quad \text{при} \quad r = r_0. \quad (5)$$

На краю пластины $r = a$ рассматриваются условия жесткой заделки

$$u = 0, w = 0, \vartheta_1 = 0 \quad (6)$$

и шарнирного закрепления

$$u = 0, w = 0, M_{11} = 0. \quad (7)$$

К условиям при $r = a$ добавляется нелинейная зависимость между неизвестными P и V , приближенно следующая из (1) с учетом (2):

$$P + p_0(1 + m/M_0)^\gamma \gamma V/V_0 = -p_0 + p_0(1 + m/M_0)^\gamma (1 + \gamma(\gamma + 1)(V/V_0)^2 / 2 - \gamma(\gamma + 1)(\gamma + 2)(V/V_0)^3 / 6). \quad (8)$$

В работе [5] предложен алгоритм численного решения нелинейной краевой задачи (3)-(8) на основе пошагового процесса по ведущему параметру $m_l/M_0, l = \overline{1, L}$.

2. Напряженно-деформированное состояние пластины в зависимости от граничных условий и переменности толщины.

Края мембраны должны быть закреплены герметично, что соответствует условиям жесткой заделки (6). При этом максимальное напряжение возникает на краю $r = a$. По условиям эксплуатации взрывоопасных аппаратов раскрытие мембран необходимо в их центре. Результаты вычислений приведены в табл.1 при $a = 25$ мм, $h_0 = 0,5$ мм, $a/h_0 = 50$, $H = 50$ мм, $\gamma = 7$; $\sigma_S/E = 5 \cdot 10^{-3}$, $\lambda = 0,9$, $\nu = 0,3$. Рассмотрены случаи пластины постоянной толщины:

$$h = h_0 = \text{const} \quad (9)$$

и переменной (с утонением в центре и утолщением у края):

$$h = \begin{cases} 0,2 \text{ мм}, & 0 \leq r \leq 12,5 \text{ мм}; \\ -1,0 \text{ мм} + 0,096 r, & 12,5 \text{ мм} \leq r \leq 18,75 \text{ мм}; \\ 0,8 \text{ мм}, & 18,75 \text{ мм} \leq r \leq 25 \text{ мм}. \end{cases} \quad (10)$$

Назовем $K = \frac{\text{концентрацией напряжений}}{\text{отношение}}$ $K = \sigma_i(r = a)/\sigma_i(r = 0)$, где $\sigma_i = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22}}$ – интенсивность напряжений, $[\sigma_i]$ – допускаемое значение σ_i . Как видно из табл. 1, с ростом прогибов в центре пластины, т.е. с нарастанием нелинейности, в случае постоянной толщины (9) с жестко заделанным краем (6) величина $K > 1$ и возрастает от 1,35 до 2,11. В случае пластины переменной толщины (10) с жестко заделанным краем и значительным

Таблица 1

$w/h_0, r=0$		0,5	1,0	1,5	2,0	3,0	3,5	4,0
толщина (9);	$10 \cdot m/M_0$	1,11	2,20	3,40	4,62	6,80	7,70	8,50
	$10^6 \cdot P/E$	0,53	1,46	3,22	6,26	16,7	23,8	32,1
ГУ (4); (6),(8)	$10^3 \cdot \sigma_i^+ / E, r=0$	0,64	1,37	2,15	3,04	5,02	5,23	5,52
	$10^3 \cdot \sigma_i^- / E, r=a$	0,87	2,11	3,95	5,25	8,20	9,93	11,6
толщина (10);	$10 \cdot m/M_0$	0,85	2,05	3,29	4,44	6,41	7,03	7,50
	$10^6 \cdot P/E$	0,38	1,32	3,05	5,78	14,4	18,6	22,2
ГУ (4); (6),(8)	$10^3 \cdot \sigma_i^+ / E, r=0$	0,71	1,39	2,18	3,20	5,16	5,53	5,92
	$10^3 \cdot \sigma_i^- / E, r=a$	0,32	1,04	2,23	3,86	5,81	6,68	7,52
толщина (9);	$10 \cdot m/M_0$	0,45	1,40	2,68	4,06	6,61	7,64	8,43
	$10^6 \cdot P/E$	0,17	0,71	2,01	4,57	15,2	23,0	30,8
ГУ (4); (7),(8)	$10^3 \cdot \sigma_i^+ / E, r=0$	0,43	1,01	1,73	2,64	5,02	5,27	5,59
	$10^3 \cdot \sigma_i^- / E, r=a$	0,18	0,44	0,83	1,36	2,87	3,72	4,45

утолщением у края $K < 1$ до $w/h_0 \leq 1$, при $w/h_0 \geq 1,5$ $K > 1$ и возрастает от 1,02 до 1,27. В пластине постоянной толщины с шарнирным закреплением края (7) $K < 1$ всегда. Таким образом, пластины, рассмотренные в табл.1, не отвечают требованиям предохранительных мембран.

3. Изгиб пластины с ограничением перемещения в ее центре.

Для круглых пластин постоянной толщины (9), с жестко заделанным краем (6),(8) при наличии штока радиуса r_0 на высоте d над центром пластины (ГУ (5) при $r = r_0$) на рис. 2-5 и в табл. 2 приведены результаты при $a = 25$ мм, $h = h_0 = 0,5$ мм, $r_0 = 0,25$ мм, $a/h_0 = 50$, $r_0/a = 0,01$; $\sigma_S/E = 5 \cdot 10^{-3}$, $\nu = 0,3$, $\lambda = 0,9$; $l = d/h_0 = 0 \div 2,3$; $H = 50$ мм, $\gamma = 7$. На рис. 2 показаны зависимости параметра нагрузки

P/E от максимального значения относительного прогиба w/h_0 . Сплошная линия соответствует НДС пластины без штока. От этой линии в точках касания штоков $l = 0 \div 2,3$ отходят штриховые, отражающие НДС пластины после встречи со штоками, при этом $\max_r w$ наблюдается на некотором удалении от штока (рис. 4, эпюры $w(r)$). На рис. 2 и далее значком \times показан момент появления в пластине $\max_{r,z} \sigma_i = \sigma_S$, значком \square – момент появления $\max_{r,z} \sigma_i = 1,2\sigma_S$. Видно, что с ростом l возрастает давление P , вызывающее рост НДС в предохранительной мембране.

На рис. 3 изображены зависимости $\max_{r,z} \sigma_i$ от параметра нагрузки. При этом $\max_z \sigma_i$ наблюдается на внутренней поверхности пластины $z = -0,5h$. Местоположение $\max_r \sigma_i$ зависит от стадии деформирования: для пластины без штока $\max_r \sigma_i$ наблюдается у края $r = a$ (сплошная линия). От этого решения в точках $l = 0 \div 2,3$ отходят зависимости $\sigma_i(P)$ для случаев, когда при нагружении пластины происходит ее касание со штоком. Из рис. 3 видно, что в момент касания штока $\max_r \sigma_i$ наблюдается у края $r = a$. При этом при малых l $\max_r \sigma_i < \sigma_S$, с ростом l $\max_r \sigma_i \geq \sigma_S$. С ростом нагружения и развитием деформаций $\max_r \sigma_i$ перемещается к штоку: штриховые линии на рис. 3, которые быстро нарастают и могут превысить характеристики прочности материала. Однако, для высокого штока $l = 2,3$ $\max_r \sigma_i$ остается у края $r = a$ до $[\sigma_i] = 1,2\sigma_S$. На рис. 4 показаны эпюры прогиба по радиусу пластины для ряда значений нагрузки P/E под номерами 1 \div 5. Сплошными линиями изображены эпюры для пластины без штока, штриховыми – при наличии штоков с высотой $l = 0; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0$, для которых при указанных нагрузках наблюдается для НДС $\max_{r,z} \sigma_i = 1,2\sigma_S$. Видно, что чем выше положение штока, тем меньше его влияние на значения прогиба при указанных

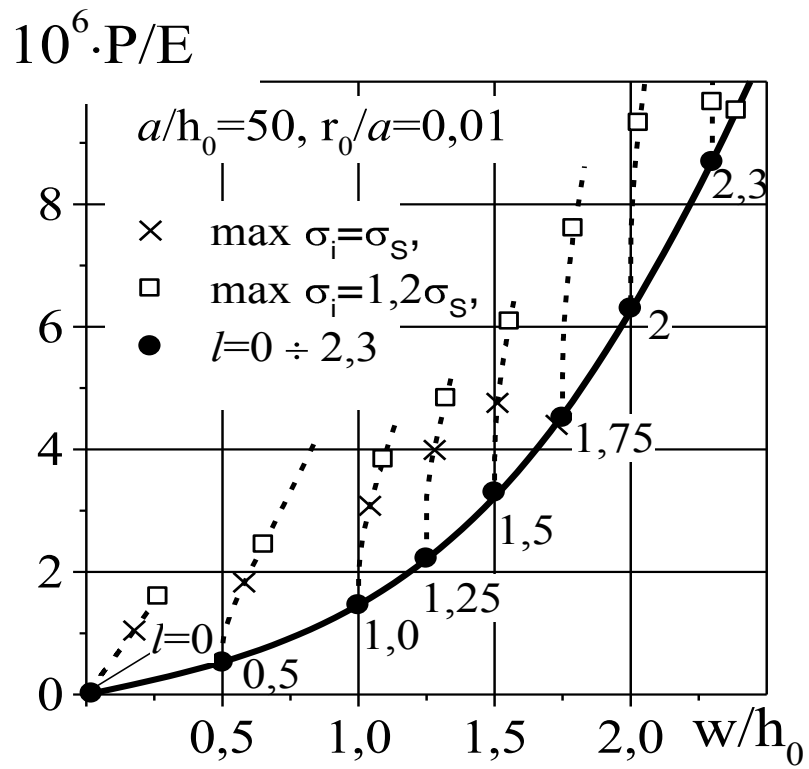


Рис. 2

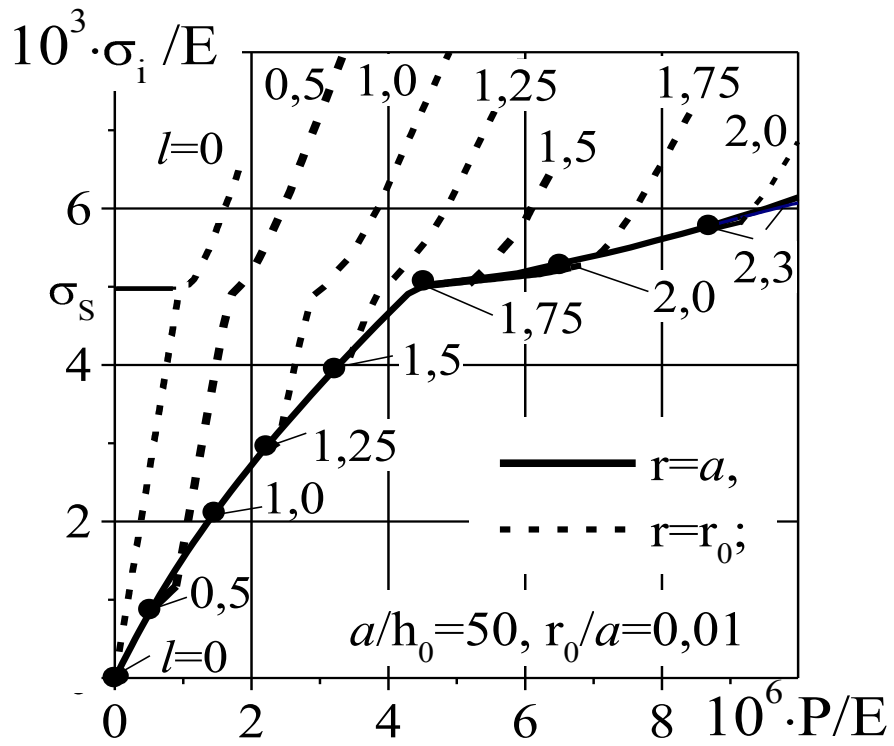


Рис.3

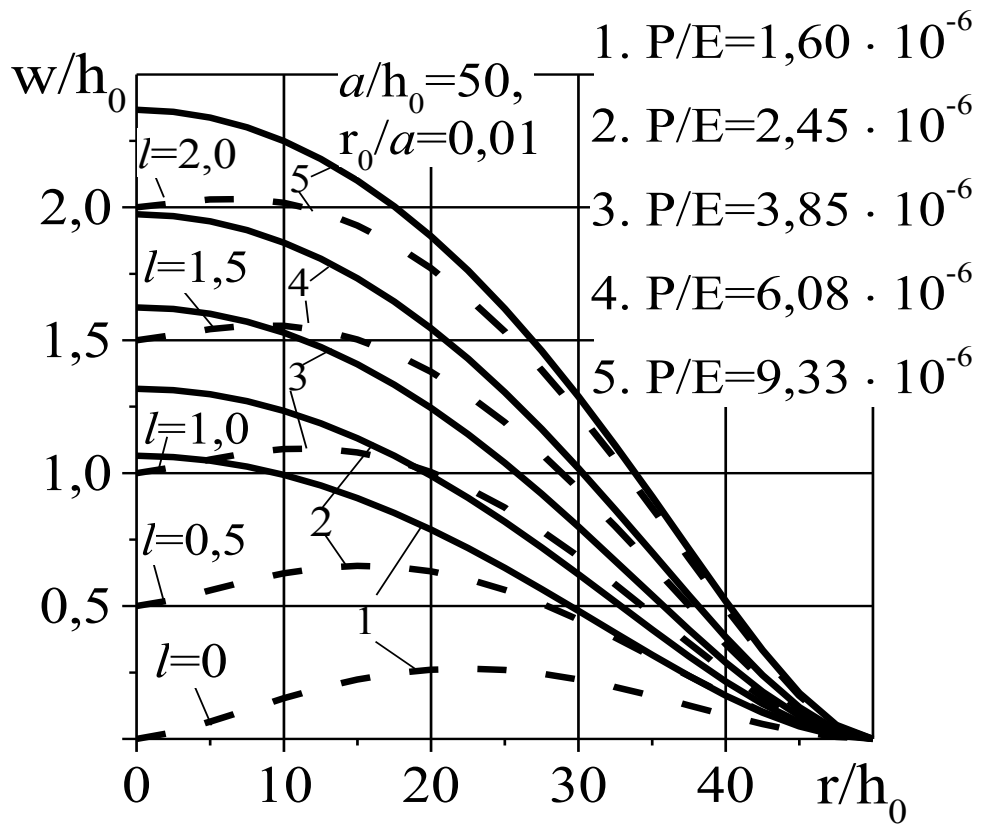


Рис.4

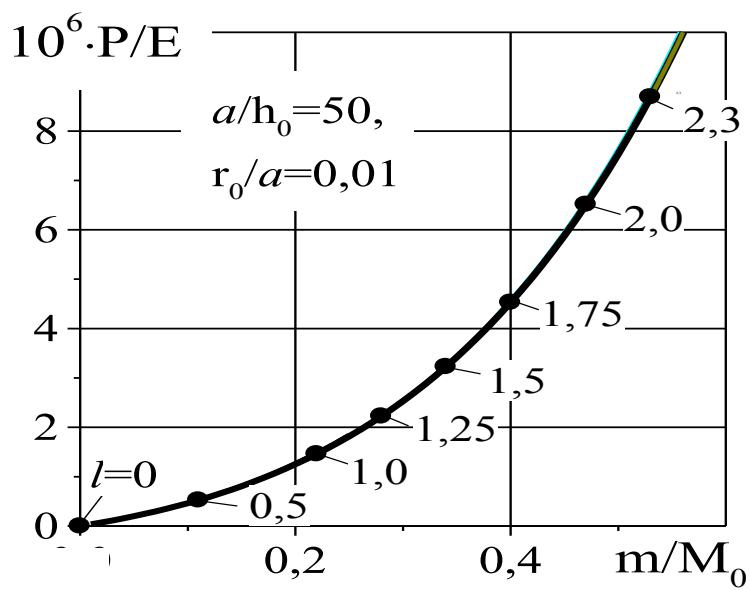


Рис. 5a

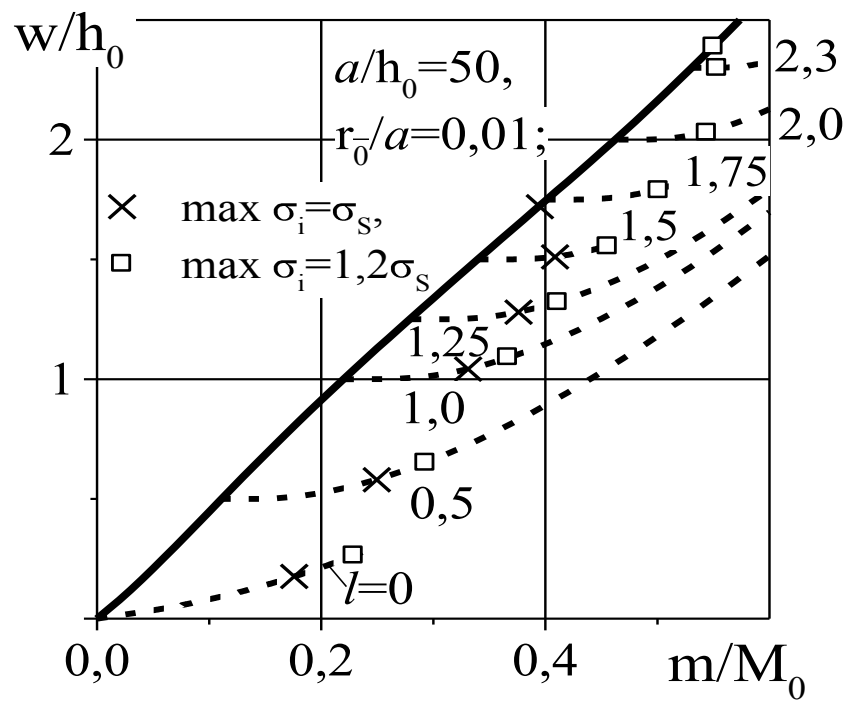


Рис. 5б

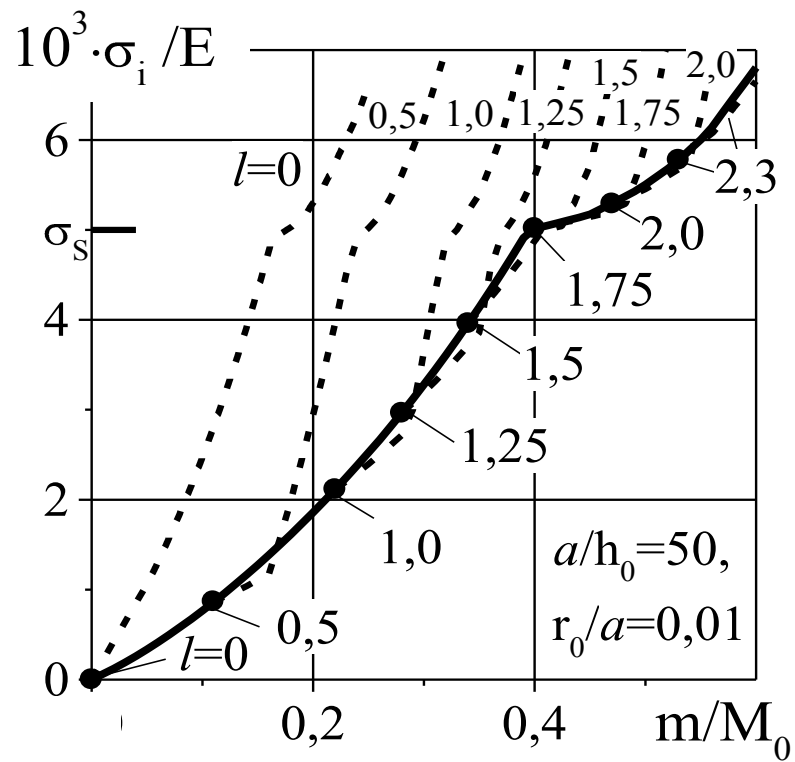


Рис. 5в

Таблица 2

Этапы деформирования		d/h_0						
		0	0,5	1,0	1,5	1,75	2,0	2,3
НДС в момент касания штока	$10 \cdot m/M_0$	0,50	1,10	2,20	3,40	4,00	4,70	5,30
	$10^6 \cdot P/E$	0,20	0,53	1,46	3,23	4,53	6,51	8,69
	$w/h_0, \max$	0,03	0,50	1,00	1,50	1,75	2,00	2,30
	$10^3 \cdot \sigma_i^+ / E, r=r_0$	1,06	0,92	1,88	2,95	3,66	3,49	5,00
	$10^3 \cdot \sigma_i^- / E, r=a$	0,17	0,87	2,11	3,96	5,02	5,29	5,78
НДС при $\max \sigma_i =$ r,z $= \sigma_S$	$10 \cdot m/M_0$	1,76	2,49	3,31	4,08	4,00	4,70	5,30
	$10^6 \cdot P/E$	1,04	1,83	3,08	4,76	4,53	6,51	8,69
	$w/h_0, \max$	0,18	0,58	1,04	1,51	1,75	2,00	2,30
	$10^3 \cdot \sigma_i^+ / E, r=r_0$	5,00	5,00	5,00	4,53	3,66	3,49	5,00
	$10^3 \cdot \sigma_i^- / E, r=a$	0,88	1,95	3,36	5,00	5,02	5,29	5,78
НДС при $\max \sigma_i =$ r,z $= 1,2\sigma_S$	$10 \cdot m/M_0$	2,29	2,93	3,68	4,55	5,01	5,44	5,53
	$10^6 \cdot P/E$	1,60	2,45	3,84	6,09	7,61	9,33	9,67
	$w/h_0, \max$	0,26	0,65	1,09	1,56	1,79	2,03	2,30
	$10^3 \cdot \sigma_i^+ / E, r=r_0$	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	3,00
	$10^3 \cdot \sigma_i^- / E, r=a$	1,34	2,45	3,92	5,13	5,40	5,82	6,00

условиях.

На рис. 5 показано влияние поступления массы жидкости m/M_0 в емкость на НДС пластины. На рис. 5а сплошная линия соответствует НДС пластины без штока при ГУ (4); (6),(8). На ней в точках $l = 0 \div 2,3$ начинаются зависимости $P(m)$ для ГУ (5); (6),(8). Далее эти линии ложатся на линию (4); (6),(8). Но они будут ограничены условиями прочности материала (рис.5в). Таким образом, с началом деформирования пластины при наличии штока давление P определяет-

Таблица 3

Этапы деформирования		d/h_0	0	2	4	6	8	9	10
НДС в момент касания штока	$10 \cdot m/M_0$	0,10	0,15	0,60	1,38	2,37	2,89	3,42	
	$10^7 \cdot P/E$	0,22	0,25	1,64	5,17	12,0	16,9	23,0	
	$w/h_0, \max$	0,73	2,00	4,00	6,00	8,00	9,00	10,0	
	$10^3 \cdot \sigma_i^+ / E, r=r_0$	1,73	0,24	0,66	1,50	2,55	3,17	3,73	
	$10^3 \cdot \sigma_i^- / E, r=a$	0,27	0,41	1,58	3,52	5,19	5,64	6,35	
НДС при $\max_{r,z} \sigma_i \geq \sigma_s$	$10 \cdot m/M_0$	0,29	0,57	1,06	1,77	2,37	2,89	3,42	
	$10^7 \cdot P/E$	0,78	1,63	3,61	7,57	12,0	16,9	23,0	
	$w/h_0, \max$	1,50	2,88	4,46	6,23	8,01	9,00	10,0	
	$10^3 \cdot \sigma_i / E, r=r_0$	5,00	5,00	5,00	5,00	2,55	3,17	3,73	
	$10^3 \cdot \sigma_i^- / E, r=a$	0,74	1,44	2,64	4,49	5,19	5,64	6,35	
НДС при $\max_{r,z} \sigma_i = 1,2\sigma_s$	$10 \cdot m/M_0$	0,52	0,87	1,39	2,08	2,88	3,24	3,42	
	$10^7 \cdot P/E$	1,59	2,84	5,34	9,77	16,9	20,8	23,0	
	$w/h_0, \max$	2,06	3,39	4,90	6,54	8,31	9,16	10,0	
	$10^3 \cdot \sigma_i / E, r=r_0$	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	5,58	3,73	
	$10^3 \cdot \sigma_i^- / E, r=a$	1,26	2,10	3,42	5,04	5,61	6,00	6,35	

ся только через поступление массы жидкости m/M_0 , что объясняется малостью в условии (8) членов, зависящих от изменения объема V , по сравнению с остальными. На рис. 5б, 5в сплошная линия соответствует НДС пластины при ГУ (4); (6),(8), штриховые – при наличии штоков $l = 0 \div 2,3$. Видна нелинейная зависимость прогиба w/h_0 и интенсивности напряжений σ_i/E от массы поступления жидкости m/M_0 для пластины, упирающейся в шток при разной высоте l .

В табл.2 представлены данные для трех этапов деформирования

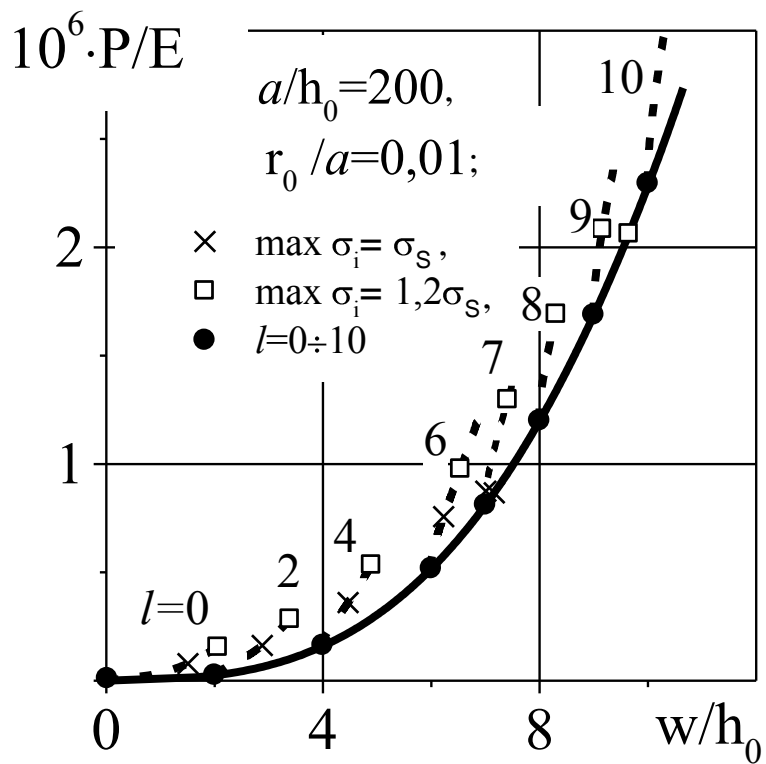


Рис. 6

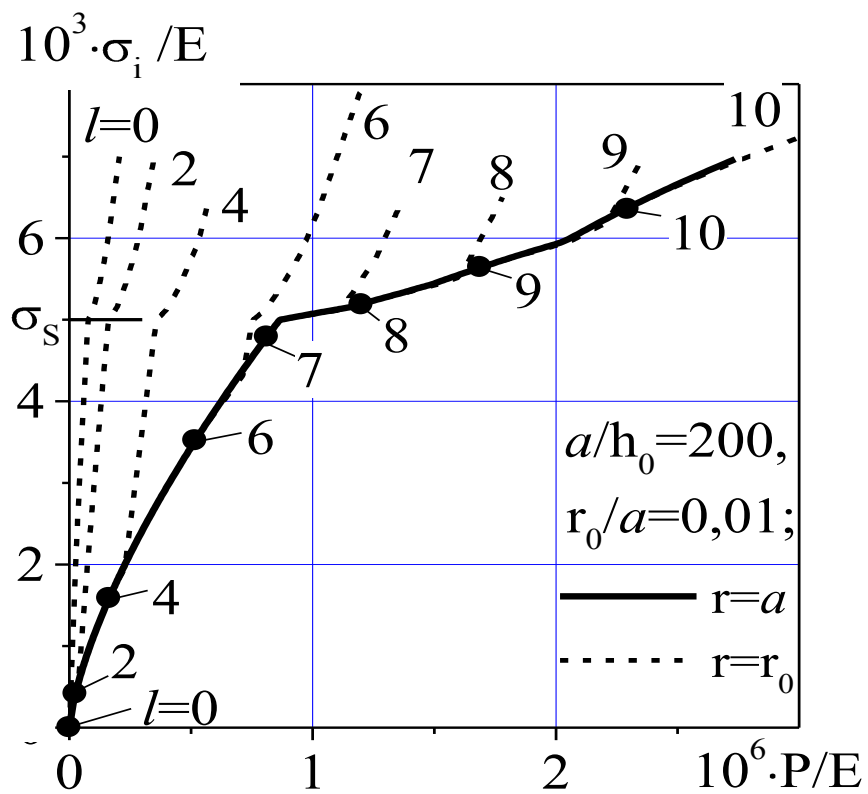


Рис. 7

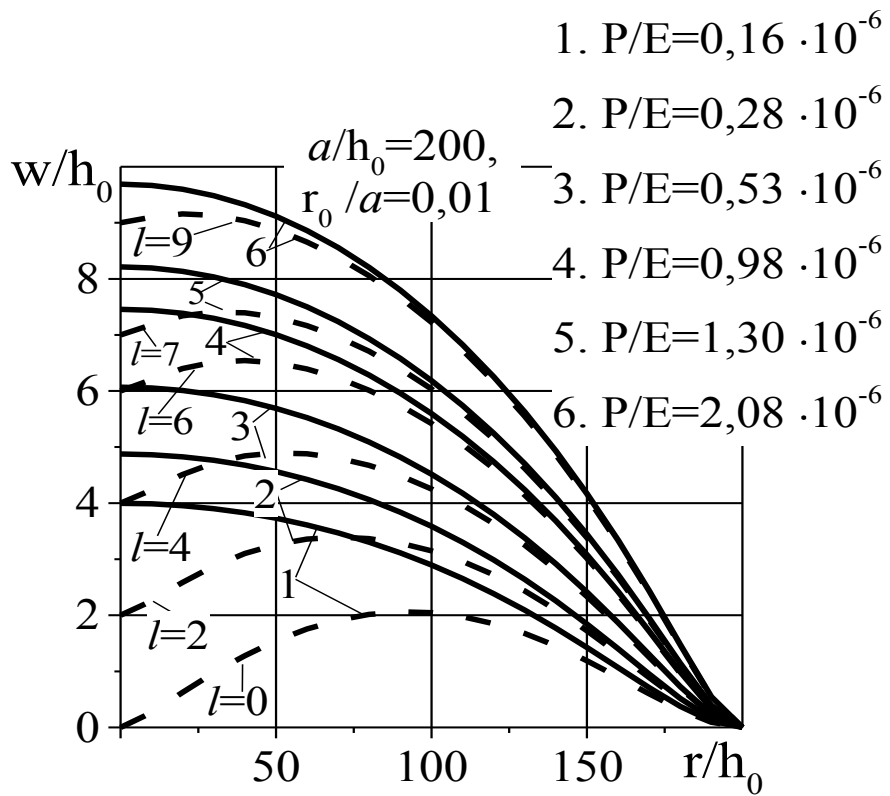


Рис. 8

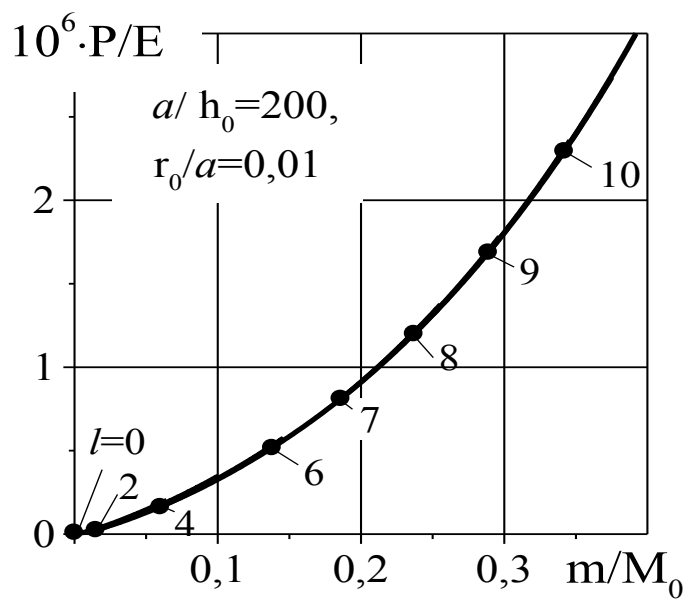


Рис. 9a

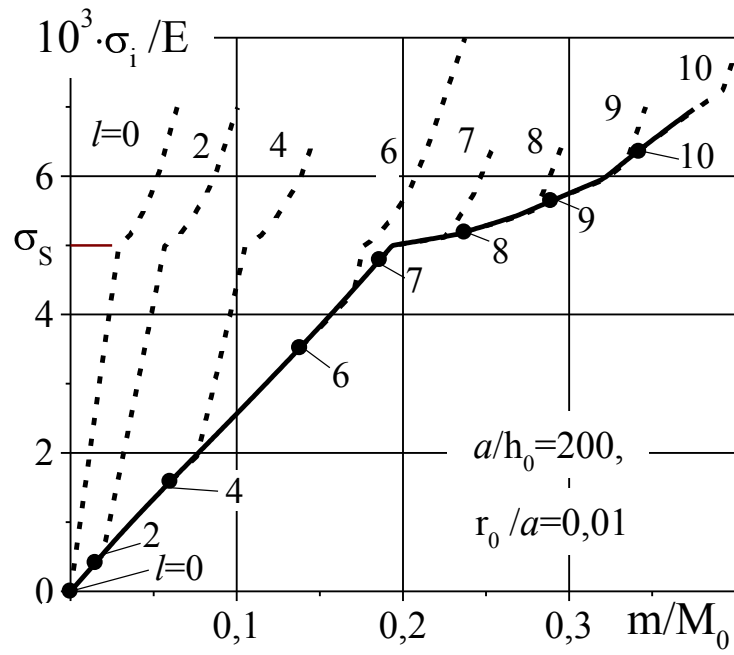


Рис. 9б

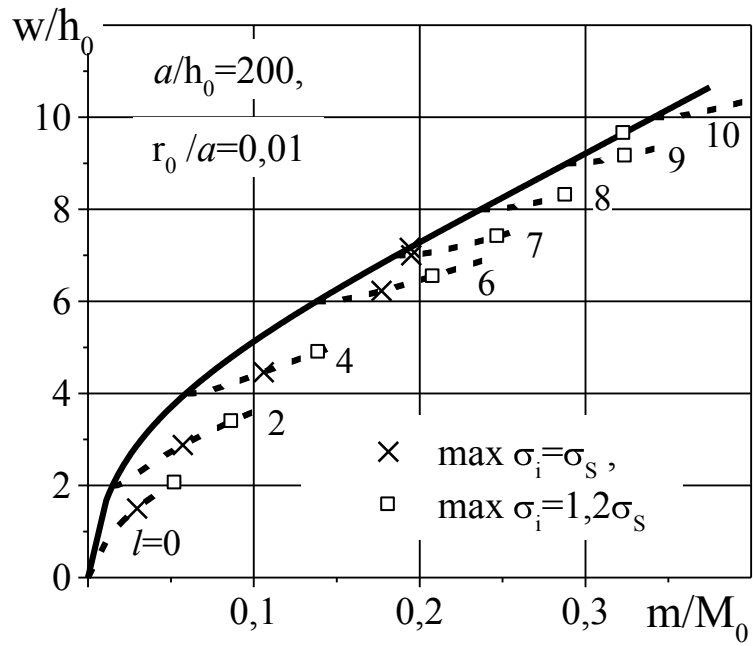


Рис. 9в

пластины при нарастании подачи жидкости в емкость: в момент касания штока; при $[\sigma_i] = \sigma_S$; при $[\sigma_i] = 1,2\sigma_S$.

В табл.3 и на рис. 6-9 приведены результаты для меньшей относительной толщины пластины: $a = 100$ мм, $h = h_0 = 0,5$ мм, $r_0 = 1$ мм, $H = 50$ мм, $\gamma = 7$, $a/h_0 = 200$, $r_0/a = 0,01$; $\sigma_S/E = 5 \cdot 10^{-3}$, $\nu = 0,3$, $\lambda = 0,9$; $l = d/h_0 = 0 \div 10$. Качественно картина НДС не изменяется по сравнению со случаем большей относительной толщины $a/h_0 = 50$. При этом роль нелинейностей возрастает.

Таким образом, НДС круглой пластины с жестко заделанным краем с препятствием в центральной точке имеет сложную картину, изменяющуюся в процессе деформации. При заданных характеристиках предохранительной мембраны в виде круглой пластины и условиях ее раскрытия в экстремальной ситуации требуется предварительное тщательное изучение НДС для подходящего выбора высоты штока над центром пластины.

Работа выполнена по программе Президиума РАН №23 "Фундаментальные проблемы механики взаимодействий в технических и природных системах".

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ольховский Н.Е.* Предохранительные мембраны. М.: Химия, 1976. 149с.
2. *Ильгамов М.А.* Статические задачи гидроупругости. Казань: Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, 1994. 208с.
3. *Ганеева М.С.* Прочность и устойчивость оболочек вращения. М.: Наука, 1992. 161с.
4. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Ч.1. Упругопластические деформации. М.-Л.: Гостехтеориздат, 1948. 376с.
5. *Ганеева М.С., Ильгамов М.А., Моисеева В.Е.* Устойчивость сферического сегмента, нагруженного давлением сжимаемой жидкости // Проблемы прочности и пластичности. Межвузовский сборник. / Н.Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 2009. Вып. 71. С. 71-76.