УДК 62-50

СИНТЕЗ РОБАСТНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПО ЭТАЛОННОЙ МОДЕЛИ С ПОМОЩЬЮ МАТРИЧНЫХ СИСТЕМ СРАВНЕНИЯ

А.Е. Евстифеев, А.И. Маликов
lod@pisem.net, malikov@au.kstu-kai.ru

В данной статье разработан метод синтеза робастного регулятора, обеспечивающий заданное расположение фазовых координат внутри желаемого множества в фазовом пространстве. Желаемые множества задаются в виде эллипсоидальной оценки эталонной систем, которые построены с помощью матричных систем сравнения. Управление строится из условия равенства правых частей матричных систем сравнения для рассматриваемой системы с регулятором и для эталонной системы. Основным преимуществом предлагаемого метода является простое задание ограниченных неопределенностей в системе, которые учитываются при синтезе управления, что позволяет получить управление робастное по отношению к этим возмущениям. В статье приведен алгоритм синтеза регулятора, который предоставляет более простой способ синтеза робастного регулятора подобного модальному, по сравнению с аналогичными методами. На основе компьютерного моделирования двухзвенного перевернутого маятника показано, что метод обеспечивает желаемое расположение фазовых координат при наличии внешних возмущений.

Введение

Методы синтеза модального управления получили широкое развитие. Неоспоримым преимуществом таких методов является возможность достаточно быстро изменять параметры качества переходного процесса в замкнутой системе. На текущем этапе развития теории управления уже достаточно легко преобразовать заданные параметры качества системы в требуемый вид матриц модели пространства состояний, а используя управление, обеспечивающее желаемое расположение корней, легко получить требуемое качество переходного процесса в реальной системе.

Несмотря на преимущества данных методов, в случае отличия реальной системы от модели точность расположения корней не высока, ошибку позиционирования корней в системе с неопределенностями определить достаточно сложно. В литературе показаны методы синтеза робастного модального управления [1], но такие методы не позволяют учесть ограниченные неопределенности в модели. Также существуют методы синтеза управления, в которых добиваются расположения корней внутри желаемой области на комплексной области, заданной при помощи линейных матричных неравенств [2]. Также с помощью ЛМН можно задать ограничения на неопределенности модели, которые учитываются при синтезе управления. Но данные методы синтеза достаточно трудны, так как число неравенств существенно возрастает.

В данной статье представлен метод синтеза управления подобный методу синтеза модального управления. Разработанный метод обеспечивает расположение фазовых координат внутри желаемого множества. Желаемое множество задается в виде эллипсоида. Синтез управления осуществляется с помощью матричных систем сравнения. Системы сравнения и способы построения множества значений были разработаны в [3]. Желаемое расположение фазовых координат достигается из условия равенства правых частей матричных систем сравнения. В статье предложен способ задание желаемого множества, метод синтеза управления, обеспечивающие расположение фазовых координат внутри желаемого множества, для метода разработан алгоритм синтеза.

Постановка задачи

Пусть задана система:

$$\dot{x} = Ax + Bu + w, \qquad (1)$$

где A - известная $n \times n$ матрица, B - известные n - векторы, w - вектор неопределенных возмущений, x - вектор состояния.

Требуется построить управление вида:

$$u = Kx, \qquad (2)$$

где K - матрица коэффициентов обратной связи, которое обеспечило бы расположение фазовых координат системы (1) внутри заданного множества, определенного в виде эллипсоида $E_c = \{x : x^T Q_c^{-1} x \le 1\}$, где Q_c - заданная симметрическая положительно определенная $n \times n$ матрица.

Предлагаемый метод синтеза управления основан на эллипсоидальном оценивании множества решений дифференциальных уравнений с помощью матричных систем сравнения. Способы построения эллипсоидальных оценок с помощью матричных систем сравнения для динамических систем с неопределенностями рассмотрены в [3]. В качестве матричных систем сравнения используются матричные дифференциальные уравнения с условием квазимонотонности правой части относительно конуса неотрицательно определенных симметрических матриц. Такие системы изучены в [4]. Алгоритм построения матричной системы сравнения для динамических систем предложен в [3]. В общем виде систему сравнения можно представить в виде:

$$\dot{Q} = F(t, Q), \qquad (3)$$

где F - квазимонотонная неубывающая матричная функция, Q - заданная симметрическая положительно определенная $n \times n$ матрица.

Так как задать желаемую область в пространстве состояний может быть затруднительным, то предлагается для задания матрицы Q_c также использовать эллипсоидальные оценки множества значений динамической системы с помощью матричных систем сравнения. Используя указанный метод, для построения желаемого множества в пространстве состояний E_c достаточно задать эталонную систему, оценка множества значений которой будет являться желаемым множеством. При использовании такого способа задания эталонной системы можно переформулировать поставленную задачу синтеза следующим образом: требуется найти управление вида (2), которое обеспечило бы эллипсоидальную оценку множества процессов системы (1) близкую к эллипсоидальной оценке эталонной системы.

Пусть задана эталонная система:

$$\dot{x} = A_c x + w_c, \tag{4}$$

где A_c - известная $n \times n$, W_c - вектор неопределенных ограниченных возмущений.

Как показано в [3] для систем (1), (3) можно построить матричную систему сравнения. Очевидно, что если матричные системы сравнения для исходной с законом управления и эталонной системы будут равны, то и оценки множества значений, получаемые как решения соответствующей системы сравнения, будут равны. Таким образом, синтез закона управления будет производиться исходя из условия равенства правых частей матричных систем сравнения для исходной системы с регулятором и эталонной системы.

Построение матричной системы сравнения

Пусть задана система (1). Требуется построить управления вида (2). Следовательно систему с регулятором можно представить в виде:

$$\dot{x} = (A + BK)x + w. \tag{5}$$

Рассмотрим процесс построение матричной системы сравнения для системы (5).

Возьмем матричную функцию $V = xx^T$ и продифференцируем ее в силу системы (5).

$$\begin{aligned}\dot{V} = \dot{x}x^T + x\dot{x}^T &= [(A+BK)x + w]x^T + x[(A+BK)x + w]^T = \\ &= (A+BK)xx^T + xx^T(A+BK)^T + wx^T + xw^T.\end{aligned} \tag{6}$$

Используя матричное неравенство из [3]

$$xy^T + yx^T \le \frac{1}{q}xx^T + qyy^T, \tag{7}$$

где q - положительная переменная, получаем следующее матричное дифференциальное неравенство для $\dot{V}$

$$\dot{V} = (A+BK)V + V(A+BK)^T + \frac{1}{q}R + qV, \qquad (8)$$

где R - известная матрица $n \times n$, которая определяет верхнюю оценку неопределенных возмущений $w: ww^T \le R$.

Используя лемму 10 из [3] можно показать, что правая часть уравнения (8) удовлетворяет условию квазимонотонности относительно конуса неотрицательно определенных симметрических матриц размера $n \times n$. Поэтому уравнение

$$\dot{Q} = (A+BK)Q + Q(A+BK)^T + \frac{1}{q}R + qQ, \qquad (9)$$

будет являться матричной системой сравнения для системы (5).

Аналогичным образом можно произвести вывод матричной системы сравнения для эталонной системы вида (4):

$$\dot{Q}_c = A_c Q_c + Q_c A_c^T + \frac{1}{q_c} R_c + q_c Q_c. \qquad (10)$$

Из условия теоремы 8 из [4] следует, что для того чтобы матричная система сравнения (9) была асимптотически устойчива достаточно, чтобы алгебраическое матричное неравенство

$$(A+BK)Q + Q(A+BK)^T + \frac{1}{q}R + qQ \le 0$$

имело положительно определенное решение $Q > 0$. Это решение будет зависеть от выбора q и будет определять предельный инвариантный эллипсоид для решений исходной системы.

Сформулируем задачу выпуклой оптимизации, решение которой будет давать матрицу Q_c для эллипсоида верхней оценки E_c множества решений системы (4):

минимизировать $\quad Tr(Q_c)$

при ограничениях

$$Q_c > 0, \tag{11}$$

$$A_c Q_c + Q_c A_c^T + \frac{1}{q_c} R_c + q_c Q_c \le 0,$$

где $Tr(Q_c)$ - след матрицы Q_c.

Построение закона управления

Поиск закона управления осуществляется из условия, что правая часть матричной системы сравнения для системы (9) должна быть меньше или равна правой части матричной системы сравнения для эталонной системы (10).

$$(A + BK)Q + Q(A + BK)^T + \frac{1}{q} R + qQ \le A_c Q_c + Q_c A_c^T + \frac{1}{q_c} R_c + q_c Q_c. \tag{12}$$

Представим неравенство (12) в следующем виде:

$$BKQ + Q(BK)^T \le A_c Q_c + Q_c A_c^T - AQ - QA^T + \frac{1}{q_c} R_c + q_c Q_c - \frac{1}{q} R - qQ. \tag{13}$$

Выражение (13) содержит 3 неизвестные величины: K, Q, Q_c. Также следует отметить, что для синтеза управления по эталонной модели требуется решить 2 задачи оптимизации (минимизировать след матрицы Q_c и разницу между матрицами A_c эталонной системы и $A - BK$ системы с регулятором). Поэтому предлагается следующий способ разрешения неравенства.

Теорема 1: Пусть выполнены условия:

- Существует разложение для матрицы B вида:

$$B = \begin{bmatrix} U_0 & U_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{14}$$

где $U = \begin{bmatrix} U_0 & U_1 \end{bmatrix}$ - известная ортогональная матрица $n \times n$, U_0 - известная матрица $n \times m$, U_1 - известная матрица $n \times (n-m)$, Z - известная квадратная несингулярная матрица $m \times m$.

• Существуют матрицы Q, Q_c, удовлетворяющие матричному неравенству

$$U_1^T (A_c Q_c + Q_c A_c^T - AQ - QA^T + \frac{1}{q_c} R_c + q_c Q_c - \frac{1}{q} R - qQ) U_1 \geq 0. \tag{15}$$

Тогда матрицу коэффициентов обратных связей K находится как решение системы линейных матричных неравенств:

$$\begin{aligned} &ZKQU_0 + U_0^T QK^T Z^T \leq U_0^T \Delta AQU_0, \\ &ZKQU_1 \leq U_0^T \Delta AQU_1, \\ &U_1^T QK^T Z^T \leq U_1^T \Delta AQU_0, \end{aligned} \tag{16}$$

где $\Delta AQ = A_c Q_c + Q_c A_c^T - AQ - QA^T + \frac{1}{q_c} R_c + q_c Q_c - \frac{1}{q} R - qQ$.

(17)

Доказательство: Пусть существует разложение (14), тогда (13) можно представить в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} U_0 & U_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ 0 \end{bmatrix} KQ + QK^T \begin{bmatrix} Z^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0^T \\ U_1^T \end{bmatrix} \leq \Delta AQ. \tag{18}$$

Умножим выражение (18) на U^T слева и на U справа и произведем элементарные операции:

$$\begin{bmatrix} ZKQU_0 + U_0^T QK^T Z^T & ZKQU_1 \\ U_1^T QK^T Z^T & 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} U_0^T \Delta AQU_0 & U_0^T \Delta AQU_1 \\ U_1^T \Delta AQU_0 & U_1^T \Delta AQU_1 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Из неравенства (19) следует, что теорема верна.

Разложение матрицы B вида (14) рассмотрено в литературе и может быть получено в виде сингулярного разложения или QR -разложения. Поиск разложения матрицы B в виде сингулярного или QR разложение обеспечивает выполнения условия ортогональности матрицы U .

Из теоремы 1 следует, что матрицы Q, Q_c можно найти из неравенства (15). Поиск матриц Q, Q_c необходимо производить из условия их положительной определенности, минимума следа матрицы Q_c и желаемой близости оценок эталонной системы и системы с регулятором. С учетом задачи оптимизации (11), можно сформулировать следующую задачу выпуклой оптимизации:

$$\begin{aligned}
&\text{минимизировать} \quad Tr(Q_c) \\
&\text{приограничениях} \\
&\qquad Q > 0, \\
&\qquad Q_c > 0, \\
&\qquad \|Q - Q_c\| \le \gamma, \\
&\qquad A_c Q_c + Q_c A_c^T + \frac{1}{q_c} R_c + q_c Q_c \le 0, \\
&U_1^T (A_c Q_c + Q_c A_c^T \quad - AQ - QA^T + \frac{1}{q_c} R_c + q_c Q_c - \frac{1}{q} R - qQ) U_1 \ge 0,
\end{aligned} \tag{20}$$

где $\|Q - Q_c\|$ - норма Фробениуса разницы матриц Q и Q_c, γ - известная величина.

Задача (20) дает только условия разрешимости матричного неравенства (13), но не дает информации о существовании решения задачи синтеза. Так как задача является частным случаем модального управления, то на задачу синтеза можно распространить условия теоремы из [15] о существовании модального управления вида (2). Согласно данной теореме, задача синтеза модального управления вида (2) разрешима только, если неустойчивые моды рассматриваемой системы являются управляемыми.

Если рассматриваемая система управляема и существует матрица Q, удовлетворяющая (20), то можно найти матрицу коэффициентов обратных связей K из системы линейных матричных неравенств (16)-(17). Поиск матрицы K необходимо производить из условия близости матрицы A эталонной системы к матрице $A+BK$ системы с регулятором. Так как, получаемое управление может оказаться не реализуемым, то необходимо наложить ограничения на матрицу K. Зададим ограничение следующим образом:

$$\|Kx\| \le u_{max}, \tag{21}$$

где u_{max} - известная величина. Используя очевидное неравенство $\|x^2\| \le Tr(Q)$, запишем задачу оптимизации для поиска матрицы K (21) следующим образом:

минимизировать $\|A+BK-A_c\|$

приограничениях

$$\begin{gathered}\|K\|\sqrt{Tr(Q)} \le u_{max} \\ ZKQU_0 + U_0^T QK^T Z^T \le U_0^T \Delta AQU_0, \\ ZKQU_1 \le U_0^T \Delta AQU_1, \\ U_1^T QK^T Z^T \le U_1^T \Delta AQU_0,\end{gathered} \tag{22}$$

где $\|A+BK-A_c\|$ - норма Фробениуса матрицы $A+BK-A_c$.

Очевидно, что учет неопределенных ограниченных возмущений в процессе синтеза позволяет добиться робастности регулятора по отношению к этим возмущениям. Можно ввести величину, определяющую меру робастности синтезируемого регулятора:

$$\gamma = \left\| \frac{1}{q_c} R_c - \frac{1}{q} R \right\|. \tag{23}$$

Величина γ показывает близость оценки рассматриваемой системы к оценке эталонной системы при заданных ограниченных неопределенностях в исходной и эталонной системе. Очевидно, что при $\gamma = 0$ можно искать управление, которое позволит получить оценку рассматриваемой системы, равную оценке эталонной системы. В случае равенства оценок будут равны и собственные значения матрицы A системы с регулятором и матрицы A_c эталонной системы. Следовательно, в данном случае метод синтеза подобен методу синтеза модального управления. При $\gamma > 0$ оценка рассматриваемой системы не будет совпадать с оценкой эталонной системы.

Отметим, что в частном случае $Q = Q_c$ и $R_c = 0$ способ синтеза будет близок к способу на основе метода инвариантных эллипсоидов [6], отличие будет только в том, что в данной статье задача синтеза сводится к двум задачам оптимизации с ЛМН, что позволяет явно учесть ограничения на матрицу коэффициентов усиления из условия реализуемости закона управления.

Алгоритм синтеза регулятора

Алгоритм синтеза регулятора можно представить в следующем виде:

1. Проверить рассматриваемую систему (1) на управляемость. Если система управляема, то перейти к следующему шагу.

2. Построить разложение вида (14) для матрицы B.

3. Найти матрицы Q для рассматриваемой системы (1), разрешив задачу оптимизации (20). Если решение найдено, то перейти к следующему шагу. В противном случае искомое управление не существует.

4. Найти матрицу K, разрешив задачу оптимизации (22).

Алгоритм реализован в виде функция в пакете *Matlab*. Для решения матричных неравенств и задач оптимизации применялся набор инструментов *CVX* [7]. Для визуализации эллипсоидальных оценок использовался пакет *EllipsoidToolbox* [8]. Результатом работы функции является матрица коэффициентов обратных связей K и графическое изображение оценок системы с регулятором и эталонной системы.

Синтеза регулятора для двухзвенного перевернутого маятника

В данной статье в качестве объекта управления рассматривается двухзвенный перевернутый маятник. Физическая модель системы представлена на рис.1 [9]. Здесь используются следующие обозначения: θ_0 - перемещение тележки; θ_1 - отклонение первого звена от вертикальной оси; θ_2 - отклонение второго звена от вертикальной оси; I_1, I_2 - моменты инерции звеньев (однородные стержни); l_1 и l_2 - расстояние от центра масс до оси вращения; m_1, m_2 - массы звеньев; m_0 - масса тележки. Решается задача стабилизации системы в верхнем неустойчивом положении равновесия.

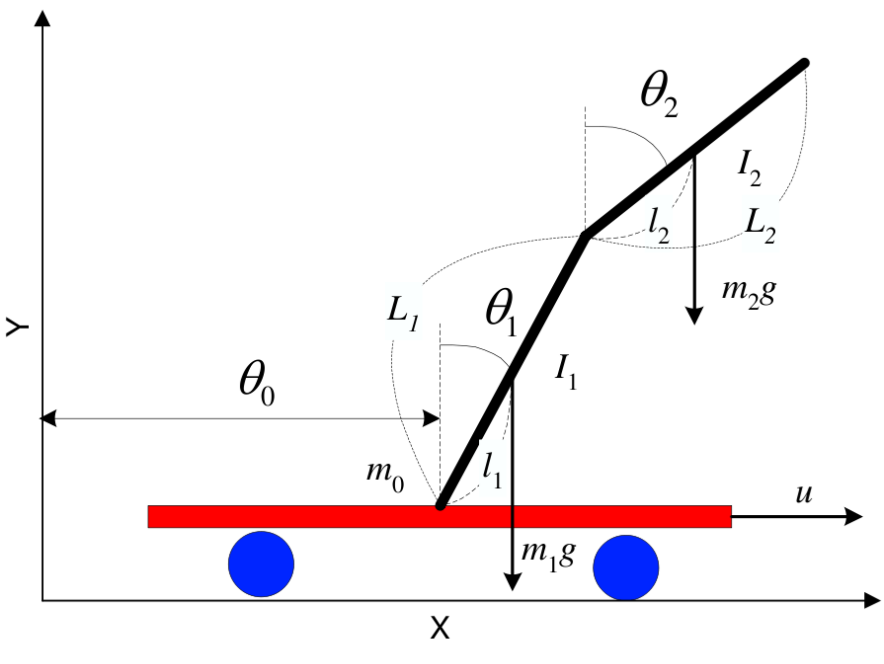

Рис. 1. Физическая модель системы

Применим предлагаемый способ синтеза управления для двухзвенного перевернутого маятника. Линеаризованная модель вида (1) для маятника получена в [10]:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -2.7338 & 0.2783 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 153.2498 & -82.4659 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -127.2470 & 116.1280 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1.3860\\ -7.9983\\ 1.2564\end{bmatrix}. \quad (24)$$

Эталонная система задана в виде модели исходной системы с LQR регулятором:

$$A_c=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ -13.4972 & 96.7000 & -167.4317 & -13.8960 & -0.7710 & -18.0641\\ 77.8915 & -420.5790 & 885.3818 & 80.1933 & 4.4494 & 104.2470\\ -12.2355 & -37.1078 & -35.9052 & -12.5971 & -0.6989 & -16.3755\end{bmatrix}.$$

Рассмотрим случай когда мера робастности $\gamma = 0$. Пусть $q = q_c = 0.2, R = R_c = I$, где I - единичная матрица.

При заданных исходных данных был произведен синтез регулятора по алгоритму и получена матрица коэффициентов обратных связей: $K = [-9.7385, 71.7441, -121.0070, -10.0263, -0.5563, -13.0337]$.

Результаты построения оценок изображены на рис.2. Как видно из рисунков, оценки исходной и эталонной системы совпадают, кроме того, совпадают и собственные значения матриц $A+BK$ и A_c. Норма

Фробениуса разницы матриц, определяющих оценки, равна $4.8161e^{-8}$.

Рассмотрим случай когда мера робастности $\gamma > 0$. Пусть $q = 0.5, q_c = 0.2, R = R_c = I$.

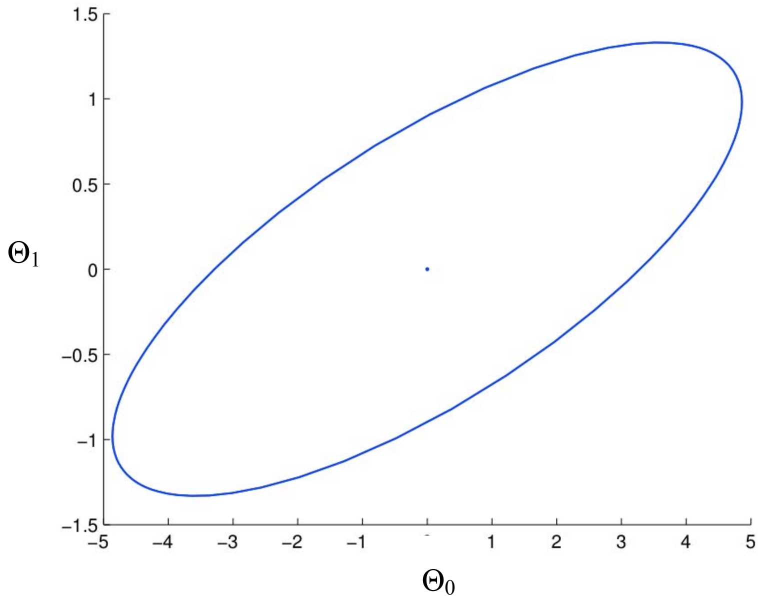

Рис. 2. Проекции оценок на фазовую плоскость θ_0, θ_1 при $\gamma = 0$

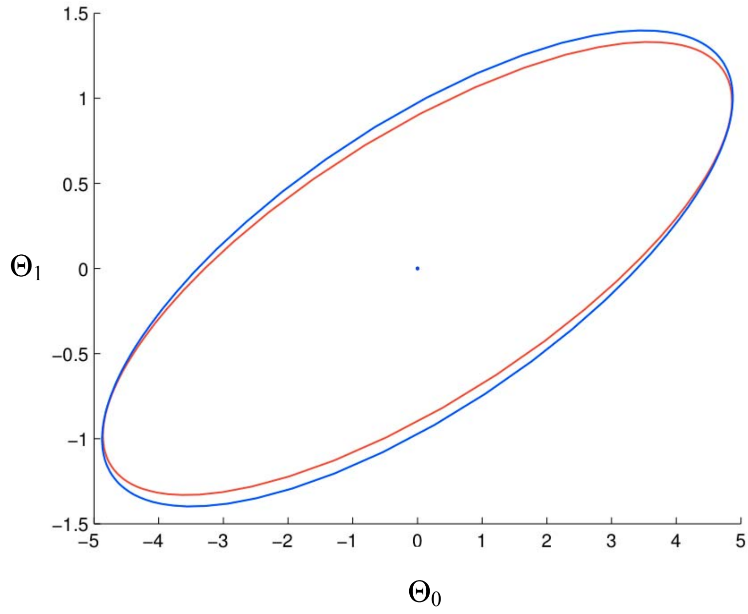

Рис. 3. Проекции оценок на фазовую плоскость θ_0, θ_1 при $\gamma > 0$

Для заданных исходных данных был произведен синтез регулятора по алгоритму и получена следующая матрица коэффициентов обратных связей: $K = [-9.3734, 72.5004, -120.0428, -12.3939, -0.8501, -15.0161]$.
Результаты построения оценок изображены на рис.3. Норма Фробениуса разницы матриц, определяющих оценки, равна 27.5594. Норма Фробениуса разницы собственных значений матриц $A + BK$ и A_c равна 6.4409.

На рис.4 показан переходных процесс, полученный на основе компьютерного моделирования в пакете *Matlab*, в системе с регулятором при учете возмущений. Возмущение моделируется в виде ошибки датчика координаты θ_1 на величину 0.01 рад. Начальные условия моделирования $x(0) = [0, 0.0087, 0.0087, 0, 0, 0]^T$. Как видно из рисунков, регулятор обеспечивает устойчивость при внешних возмущениях, а значения фазовых координат лежат внутри желаемой области.

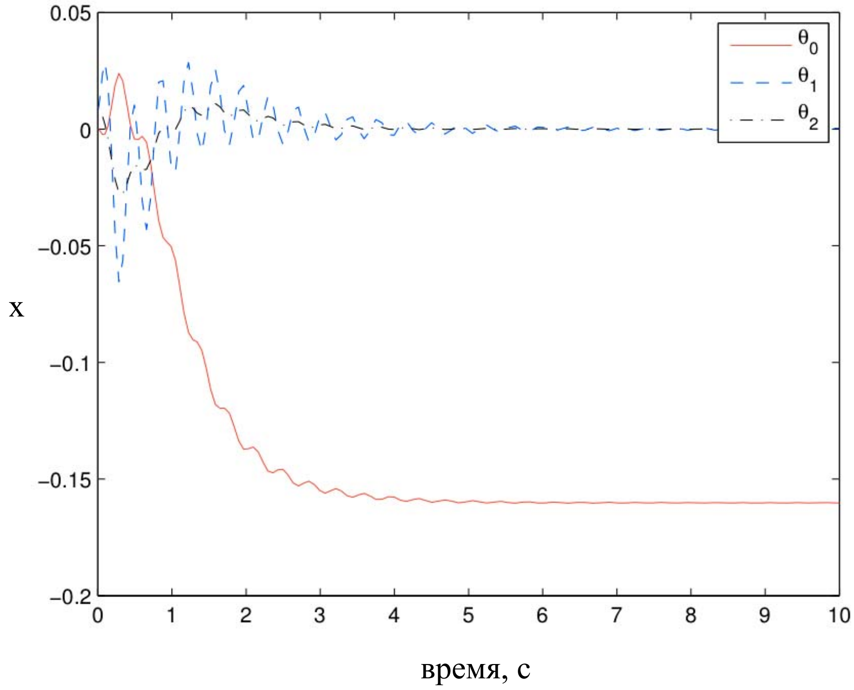

Рис. 4. Переходный процесс по координатам $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ при $\gamma > 0$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chu E. K.* Optimization and pole assignment in control system design // Int. J. Appl.Math. Comput. Sci. — 2001. — Vol. 11, no. 5. — Pp. 1035–1053.
2. *Gahinet P., Chilali M., Apkarian P.* Robust pole placement in lmi regions //IEEE Trans. AC. — 1999. — Vol. 44, no. 12. — Pp. 2257–2270.
3. *Маликов А.И.* Эллипсоидальное оценивание решений дифференциальных уравнений с помощью матричных систем сравнения //Изв. вузов. Матем. — 2002. — № 8. — С. 30–42.
4. *Маликов А.И.* Матричные системы дифференциальных уравнений с условием квазимонотонности // Изв. вузов. Матем. — 2000. — № 8. — С. 35–45.
5. *Уонэм М.* Линейные многомерные системы управления: Геометрический подход. — Москва: Наука, 1980.
6. *Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов //Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 3. — С. 106–125.
7. *Grant M., Boyd S.* CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 1.21. — http://cvxr.com/cvx. — 2010. — oct.
8. *Kurzhanskiy A.A., Varaiya P.* Ellipsoidal toolbox: Tech. Rep. UCB/EECS- 2006-46: EECS Department, University of California, Berkeley, 2006.May. http://code.google.com/p/ellipsoids.
9. *Bogdanov A.* Optimal control of a double inverted pendulum on a cart: Tech. rep.: OGI School of Science and Engineering, OHSU, 2004.
10. *Маликов А.И., Евстифеев А.Е.* Синтез нелинейного управления по эталонной модели для двухзвенного перевернутого маятника //Вестник КГТУ им.А.Н.Туполева. — 2010. — № 3. в печати.