

ПОСТРОЕНИЕ МЕТОДОВ МИНИМИЗАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЗАПАСОВ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПРИ ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТА ФИЛЬТРАЦИИ

А.В. Елесин, А.Н. Габидуллина, А.Ш. Кадырова, П.А. Мазуров
elesin@mail.knc.ru, gabidullina@mail.rnc.ru,
kadyirova@mail.knc.ru, mazurov@mail.knc.ru

Решается задача идентификации коэффициента фильтрации водоносного пласта по замерам напора в наблюдательных точках. Идентифицируемые параметры определяются в процессе минимизации функции невязки. С использованием понятия запаса чувствительности проводится анализ известных и построение новых методов минимизации функции невязки.

Введение

Рассматривается задача идентификации коэффициента фильтрации по замерам напора в наблюдательных точках в условиях стационарной напорной однофазной фильтрации жидкости, подчиняющейся закону Дарси. Уравнение фильтрации в области Ω имеет вид [1]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_{xy} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0, \quad (1)$$

где $h = h(x, y, z)$ - напор, $K_{xy} = \sum_{k=1}^{nz} K_{xyk} \varphi_k$, $K_z = \sum_{k=1}^{nz} K_{zk} \varphi_k$ - кусочно-

постоянные функции коэффициента фильтрации, nz - число зон однородности, $\varphi_k = \varphi_k(x, y, z)$, $\varphi_k = 1$ на Ω_k , $\varphi_k = 0$ вне Ω_k , Ω_k - зоны однородности, $\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_{nz} = \Omega$. На границе области Ω задаются граничные условия первого и второго рода. Идентифицируемые параметры определяются из минимума функции невязки [2]

$$J(\mathbf{K}) = \frac{1}{2} \mathbf{R}^T \mathbf{R}, \quad (2)$$

где $\mathbf{K} = \{K_i\}_{i=1}^n = \{\ln K_{xyi}, \ln K_{zi}\}_{i=1}^{nz}$ - логарифмы идентифицируемых значений коэффициента фильтрации (переменные минимизации),

$\mathbf{R}^T = (h_1 - h_1^{\text{tr}}, \dots, h_m - h_m^{\text{tr}})$ - вектор невязки, $h_j = h_j(\mathbf{K})$ и h_j^{tr} - вычисленные и заданные значения напора в наблюдательных точках, $n = 2nz$ - число идентифицируемых параметров, m - число наблюдательных точек. Каждый идентифицируемый параметр K_j оказывает своё влияние на изменение функции невязки при её минимизации. В работах [3-5] введено понятие запаса чувствительности переменной минимизации, характеризующее потенциальную возможность переменной для минимизации функции невязки. Это понятие используется для анализа известных и построения новых алгоритмов минимизации функции невязки.

Для тестирования методов используются модельные задачи идентификации коэффициента фильтрации. В модельных задачах по известным значениям коэффициента фильтрации (истинные значения) определяются значения напора в наблюдательных точках. Далее значения коэффициента фильтрации считаются неизвестными, и их требуется определить. Число и границы зон однородности считаются известными.

Запасы чувствительности

В окрестности точки \mathbf{K} функция невязки представляется в виде

$$J(\mathbf{K} + \mathbf{d}) \approx J(\mathbf{K}) + \mathbf{g}^T(\mathbf{K})\mathbf{d} + \frac{1}{2}\mathbf{d}^T\mathbf{G}(\mathbf{K})\mathbf{d}, \quad (3)$$

где $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$ - вектор отклонений, $\mathbf{g}(\mathbf{K}) = (g_1, \dots, g_n)$, $\mathbf{G}(\mathbf{K})$ - градиент (вектор чувствительностей) и матрица Гессе функции невязки. Пусть $\mathbf{d} = \mathbf{d}^N = -\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{K})\mathbf{g}(\mathbf{K})$ направление спуска Ньютона и $\mathbf{K} + \mathbf{d}^N$ точка минимума функции невязки, в которой $J(\mathbf{K} + \mathbf{d}^N) = 0$, тогда из (2) и (3)

$$\mathbf{R}^T\mathbf{R} \approx -\mathbf{g}^T\mathbf{d}^N = \sum_{i=1}^n (-g_i d_i^N). \quad (4)$$

Каждое слагаемое в правой части (4) характеризует приращение квадрата вектора невязки за счет i -ой переменной минимизации.

Вблизи точки минимума функции невязки при $h_k \approx h_k^{\text{tr}}$ в случае ограниченных вторых производных $\partial^2 h_k / \partial K_i \partial K_j$ имеем

$$\left\{ \frac{\partial^2 J}{\partial K_i \partial K_j} \right\} = \left\{ \sum_{k=1}^m \frac{\partial h_k}{\partial K_i} \frac{\partial h_k}{\partial K_j} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 h_k}{\partial K_i \partial K_j} (h_k - h_k^{\text{tr}}) \right\} \approx \left\{ \sum_{k=1}^m \frac{\partial h_k}{\partial K_i} \frac{\partial h_k}{\partial K_j} \right\}. \quad (5)$$

Запишем (5) в матричном виде $\mathbf{G} \approx \mathbf{H} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$, где $\mathbf{A} = \{\partial h_k / \partial K_i\}$ матрица чувствительности. Для невырожденной матрицы \mathbf{A} ($n = m$) выполняется равенство [3-5]

$$P = \sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n (-g_i d_i^{\text{GN}}) = -\mathbf{g}^T \mathbf{d}^{\text{GN}} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{R})^T (-\mathbf{A}^{-1} \mathbf{R}) = \mathbf{R}^T \mathbf{R}, \quad (6)$$

где P - запас чувствительности функции невязки, $P_i = -g_i d_i^{\text{GN}}$ - запас чувствительности i -ой переменной, d_i^{GN} - компоненты вектора отклонений Гаусса-Ньютона $\mathbf{d}^{\text{GN}} = -\mathbf{H}^{-1} \mathbf{g} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{R}) = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{R}$. Формула (6), в отличие от (4), верна вне зависимости от близости точки \mathbf{K} к точке минимума функции невязки. В окрестности точки минимума запас чувствительности i -ой переменной характеризует приращение функции невязки за счет этой переменной. В главной системе координат пространства переменных минимизации, полученной с использованием SVD-разложения матрицы $\mathbf{H} = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T$, где \mathbf{V} - ортогональная матрица, $\mathbf{\Sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ - диагональная матрица, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ - сингулярные числа, компоненты вектора отклонений Гаусса-Ньютона $\mathbf{d}_V^{\text{GN}} = \mathbf{V}^T \mathbf{d}^{\text{GN}}$ определяются по формулам $d_{Vi}^{\text{GN}} = -g_{Vi} / \sigma_i$, $i=1, \dots, n$ (g_{Vi} - компоненты градиента $\mathbf{g}_V = \mathbf{V}^T \mathbf{g}$). Запас чувствительности в направлении i -ой оси главной системы координат является неотрицательной величиной $P_{Vi} = -d_{Vi}^{\text{GN}} g_{Vi} = g_{Vi}^2 / \sigma_i = (d_{Vi}^{\text{GN}})^2 \sigma_i \geq 0$ и в окрестности точки минимума характеризует приращение функции невязки в i -ом направлении. Запас чувствительности является инвариантной величиной относительно указанного преобразования системы координат

$$P_V = \sum_{i=1}^n P_{Vi} = -\mathbf{g}_V^T \mathbf{d}_V^{\text{GN}} = -(\mathbf{V}^T \mathbf{g})^T (\mathbf{V}^T \mathbf{d}^{\text{GN}}) = -\mathbf{g}^T \mathbf{d}^{\text{GN}} = P. \quad (7)$$

В случае $n < m$ сумма запасов чувствительности всех переменных не больше квадрата вектора невязки. Пусть \mathbf{A}_ε матрица ранга $m-n$, столбцы которой образуют фундаментальную систему решений од-

нородной системы линейных уравнений с матрицей \mathbf{A}^T ($\mathbf{A}^T \mathbf{A}_\varepsilon = \mathbf{\Theta}$, где $\mathbf{\Theta}$ - нулевая матрица), $\tilde{\mathbf{A}}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A}_\varepsilon^T \end{pmatrix}$ квадратная матрица. Тогда $\tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_\varepsilon^T \mathbf{A}_\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{V}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{V}_\varepsilon \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon \mathbf{V}_\varepsilon^T \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \tilde{\mathbf{V}}^T$, где $\mathbf{V} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{V}^T$, $\mathbf{V}_\varepsilon \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon \mathbf{V}_\varepsilon^T$ - сингулярные разложения матриц \mathbf{H} и $\mathbf{H}_\varepsilon = \mathbf{H}_\varepsilon^T \mathbf{H}_\varepsilon$, $\tilde{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} \mathbf{V} & 0 \\ 0 & \mathbf{V}_\varepsilon \end{pmatrix}$ - ортогональная матрица, $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon \end{pmatrix}$ - диагональная матрица. Разложение $\tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \tilde{\mathbf{V}}^T$ является сингулярным разложением с точностью до перестановки сингулярных чисел и соответствующих им столбцов матрицы $\tilde{\mathbf{V}}$. Пусть $\tilde{\mathbf{g}} = \tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{g}_\varepsilon \end{pmatrix}$, где $\mathbf{g}_\varepsilon = \mathbf{A}_\varepsilon^T \mathbf{R}$. Для матрицы $\tilde{\mathbf{H}}$ и вектора $\tilde{\mathbf{g}}$ выполняется (7), следовательно, $P_{\tilde{\mathbf{V}}} = P_{\mathbf{V}} + P_{\mathbf{V}_\varepsilon} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$, и так как $P_{\mathbf{V}_\varepsilon} \geq 0$, то $P_{\mathbf{V}} \leq \mathbf{R}^T \mathbf{R}$.

Модельные задачи

Модельные задачи построены для пятислойного пласта ≈ 40 км \times ≈ 30 км \times ≈ 200 м (рис.1). На кровле пласта заданы граничные условия второго рода (меняются от $-9,2 \times 10^{-3}$ м/сут до 2×10^{-3} м/сут). Подошва и боковая поверхность пласта непроницаемы, за исключением боковой поверхности пятого слоя, на которой задаются один или два участка с граничными условиями первого рода (рис.2). Пласт разбит на 71 зону однородности, каждая из которых характеризуется двумя значениями коэффициента фильтрации K_{xyk}^{tr} и K_{zk}^{tr} , $0,1$ м/сут $\leq K_{xyk}^{\text{tr}} \leq 100$ м/сут, $0,0001$ м/сут $\leq K_{zk}^{\text{tr}} \leq 0,02$ м/сут.

Для дискретизации уравнения (1) использовался метод конечных элементов Галеркина, конечный элемент – треугольная пирамида. Полученная система линейных алгебраических уравнений решалась методом сопряженных градиентов с предобуславливающей матрицей в виде неполного разложения Холесского [6]. Начальные значения коэффициента фильтрации $K_{xyi}^0 = K_{xy}^0$, $K_{zi}^0 = K_z^0$ ($i = 1, \dots, 71$) определялись из минимума функции невязки (2) (пласт считался одно-

родным с двумя неизвестными значениями коэффициента фильтрации K_{xy}^0, K_z^0).

Задача 1: $n = m = 142, K_{xy}^0 = 24,2$ м/сут, $K_z^0 = 2,32 \times 10^{-3}$ м/сут. В каждой зоне однородности по две наблюдательные точки (рис.3 (а, б, в)). Один участок с граничным условием первого рода: $h=80$ м.

Задача 2: $n = 142, m = 389, K_{xy}^0 = 24,9$ м/сут, $K_z^0 = 2,23 \times 10^{-3}$ м/сут. К наблюдательным точкам задачи 1 добавлены наблюдательные точки с наибольшими значениями граничных условий второго рода, расположенные на кровле пласта (рис.3 (г)).

Задача 3: $n = m = 142, K_{xy}^0 = 25$ м/сут, $K_z^0 = 2,22 \times 10^{-3}$ м/сут. Наблюдательные точки как в задаче 1. Два участка с граничными условиями первого рода: $h=80$ м, $h=90$ м.

Задача 4: $n = 142, m = 389, K_{xy}^0 = 28,8$ м/сут, $K_z^0 = 2,13 \times 10^{-3}$ м/сут. Наблюдательные точки как в задаче 2. Два участка с граничными условиями первого рода: $h=80$ м, $h=90$ м.

Для остановки процесса минимизации использовались два критерия: 1) медленная сходимость итерационного процесса: в течение трёх итераций $J(\mathbf{K}^{k-1}) - J(\mathbf{K}^k) < 0.01 J(\mathbf{K}^{k-1})$; 2) достижение заданной точности по напору в наблюдательных точках: $r_{\max} = \max_j |h_j(\mathbf{K}^k) - h_j^{\text{tr}}| < 10^{-6}$.

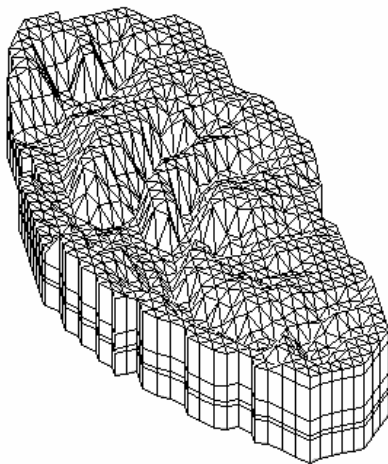


Рис.1. Пласт.

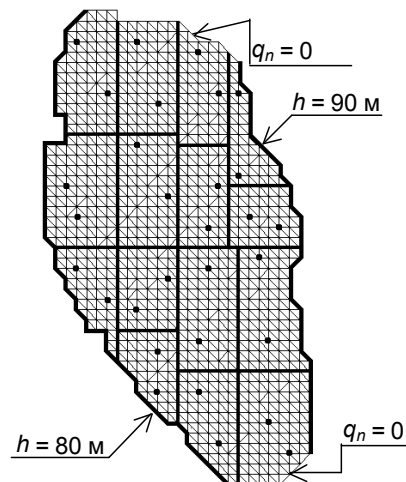


Рис.2. Граничные условия на боковой поверхности 5-го слоя.

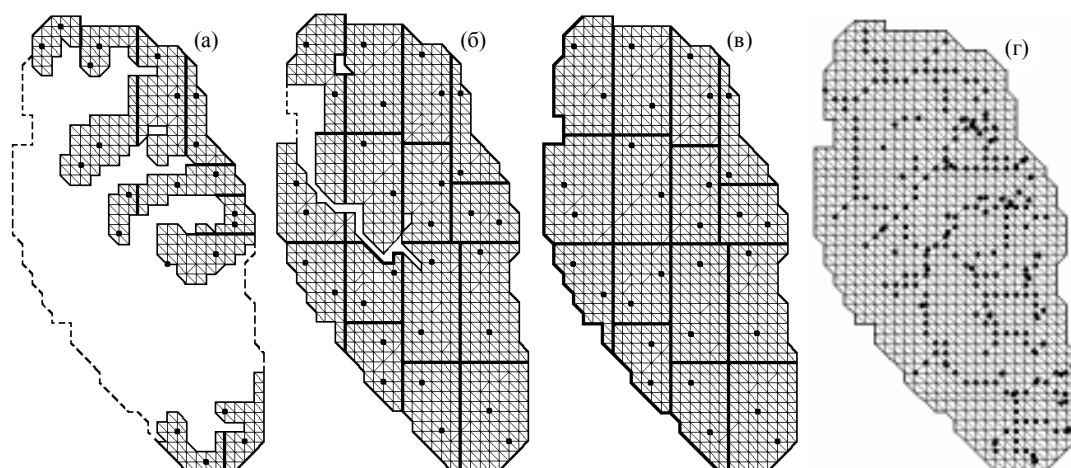


Рис.3. Зоны однородности и положение наблюдательных точек: (а) слой 1, (б) слой 2, (в) слои 3-5, (г) наблюдательные точки на кровле пласта.

Градиентные методы минимизации функции невязки

В методе наискорейшего спуска новые значения параметров на каждой итерации вычисляются по формуле $\mathbf{K}^k = \mathbf{K}^{k-1} - \rho \mathbf{g}$, где \mathbf{g} - градиент функции невязки в точке \mathbf{K}^{k-1} , ρ - величина шага, определяемая из условия минимума функции $J(\mathbf{K}^{k-1} - \rho \mathbf{g})$. При решении модельных задач методом наискорейшего спуска процесс минимизации во всех задачах был прерван по критерию медленной сходимости. Проведём анализ причин медленной сходимости метода наискорейшего спуска, используя распределение запаса чувствительности по осям в главной системе координат. Распределение запасов чувствительности P_{Vi} и абсолютных значений чувствительностей $|g_{Vi}|$ для начального и конечного состояний функции невязки в первой модельной задаче приведены на рис. 4, 5.

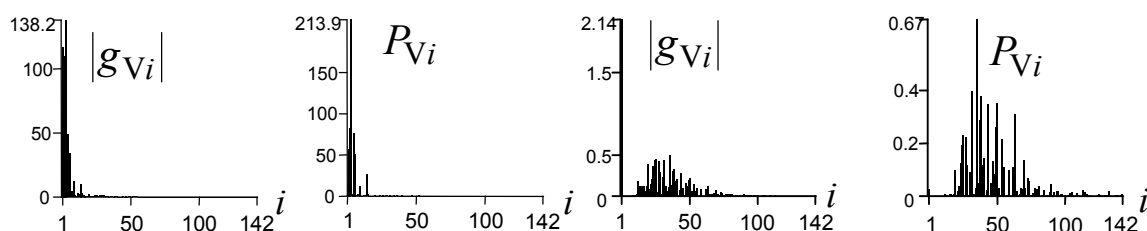


Рис.4. Начальное состояние.

Рис.5. Конечное состояние.

В начальном состоянии видно соответствие между значениями чувствительностей и запасами чувствительности (максимальные значения чувствительности и запаса чувствительности расположены на одной и той же оси). В конечном состоянии максимальным чувствительно-

ствам соответствуют маленькие значения запасов чувствительности (максимальное значение запаса чувствительности 0,67, значение запаса чувствительности, соответствующее максимальной чувствительности 0,025). Направление минимизации для конечного состояния определяется в основном максимальными чувствительностями с небольшим запасом чувствительности, что приводит к малому изменению функции невязки и медленной сходимости итерационного процесса. В [5, 7] предложен квазиградиентный метод минимизации функции невязки, учитывающий соотношение между чувствительностью и запасом чувствительности переменной. Чувствительности уменьшаются так, чтобы в главной системе координат чувствительность в направлении с меньшим запасом не превосходила чувствительность в направлении с большим запасом. На каждой итерации $\mathbf{K}^k = \mathbf{K}^{k-1} - \rho \mathbf{V} \tilde{\mathbf{g}}_V$, где ρ - величина шага, определяемая из условия минимума функции $J(\mathbf{K}^{k-1} - \rho \mathbf{V} \tilde{\mathbf{g}}_V)$, $\tilde{\mathbf{g}}_V = (\tilde{g}_{V1}, \dots, \tilde{g}_{Vn})$, $\tilde{g}_{Vi} = g_{Vi}$, если $|g_{Vi}| \leq r_i$, иначе $\tilde{g}_{Vi} = r_i g_{Vi} / |g_{Vi}|$, $r_i = \min_j |g_{Vj}|$ по всем j , для которых $P_{Vj} > P_{Vi}$.

Значения максимальной невязки r_{\max} и среднеквадратического отклонения коэффициентов фильтрации от истинных значений

$$\Delta \ln K_{xyz} = \left[\sum_{i=1}^{71} \left((\ln K_{xyi}^{tr} - \ln K_{xyi})^2 + (\ln K_{zi}^{tr} - \ln K_{zi})^2 \right) / 142 \right]^{1/2} \text{ начальное}$$

и конечного состояний процесса идентификации, число выполненных итераций it , полученные квазиградиентным методом (QGM), методами наискорейшего спуска (GM) и сопряженных градиентов (CGM) [8], приведены в табл.1. Приведенные результаты показывают более высокую скорость сходимости квазиградиентного метода в сравнении с методами наискорейшего спуска и сопряженных градиентов, конечные значения идентифицируемых параметров ближе к истинным значениям.

Таблица 1. Сравнение градиентных методов.

задача	методы	начальное состояние		конечное состояние		
		r_{\max}	$\Delta \ln K_{xyz}$	r_{\max}	$\Delta \ln K_{xyz}$	it
1	GM	7,18	1,7	0,86	1,60	62
	CGM			0,12	1,43	215
	QGM			$2,2 \times 10^{-3}$	0,86	129
2	GM	9,41	1,7	0,81	1,58	70
	CGM			0,11	1,37	292
	QGM			$1,1 \times 10^{-2}$	0,94	139
3	GM	7,46	1,7	0,76	1,57	88
	CGM			0,12	1,38	175
	QGM			$9,59 \times 10^{-4}$	0,61	202
4	GM	9,3	1,73	0,77	1,58	153
	CGM			0,14	1,43	202
	QGM			$1,73 \times 10^{-2}$	1,02	148

GM - метод наискорейшего спуска, CGM – метод сопряженных градиентов, QGM - квазиградиентный метод.

Методы Левенберга-Марквардта

В методах Левенберга-Марквардта значения параметров на каждой итерации определяются по формуле $\mathbf{K}^k = \mathbf{K}^{k-1} + \mathbf{d}^k$, где $\mathbf{d}^k = -(\mathbf{H} + \mu_k \mathbf{E})^{-1} \mathbf{g}$ - вектор спуска, \mathbf{E} – единичная матрица, $\mathbf{H} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ - приближённая матрица вторых производных, \mathbf{A} – матрица чувствительности, μ_k - параметр Марквардта. Различные варианты метода Левенберга-Марквардта отличаются стратегией выбора параметра Марквардта [2, 9, 10]. В данной работе используются два варианта метода Левенберга-Марквардта. В первом (далее LM1) на каждой итерации проверяется условие $J(\mathbf{K}^{k-1} + \mathbf{d}^k) < J(\mathbf{K}^{k-1})$, и при его нарушении параметр Марквардта увеличивается в два раза до тех пор, пока это условие не выполнится. При переходе на следующую итерацию параметр Марквардта уменьшается в два раза. Начальное значение параметра Марквардта полагается равным на порядок больше максимального сингулярного числа матрицы \mathbf{H} . Во втором (далее метод LM2) параметр μ_k на каждой итерации определяется методом золотого сечения из условия минимума функции невязки $J(\mathbf{K}^{k-1} + \mathbf{d}^k)$. Основные вычислительные затраты при использовании методов Левенберга-Марквардта приходятся на вычисление функции

невязки и матрицы чувствительности. Для оценки этих затрат вводится число $nc = nc1 + nc2$, где $nc1$ – число решений уравнения фильтрации (1), $nc2$ – число решений уравнений, полученных прямым дифференцированием уравнения фильтрации, для определения элементов матрицы чувствительности.

При решении всех модельных задач методами LM1 и LM2 достигнута заданная точность по напорам (табл. 4). Однако, начиная с некоторой итерации, процесс сходимости замедляется. Используем распределение запаса чувствительности по осям в главной системе координат для анализа процесса сходимости на примере решения первой модельной задачи методом LM2. Распределение запаса чувствительности в начале 51-ой итерации показано на рис. 6. Проведём смещение переменных минимизации с различными значениями параметра μ_{51} в два шага. На первом шаге переменные минимизации смещаются на величину $\mathbf{d}^1 = -(\mathbf{H} + \mu_{51}\mathbf{E})^{-1}\mathbf{g}$, на втором - на величину $\mathbf{d}^2 = \mathbf{V}\tilde{\mathbf{d}}_V$, где $\tilde{\mathbf{d}}_V$ - вектор с ненулевыми компонентами в направлениях, соответствующих большим сингулярным числам ($\tilde{d}_{Vi} = -g_{Vi}/(\sigma_i + \mu_{51})$, $i = 1, \dots, q$, $\tilde{d}_{Vi} = 0$, $i = q+1, \dots, 142$, q выбирается из условия $\sigma_q > \mu_{51} \geq \sigma_{q+1}$). Распределения запаса чувствительности после первого и второго шага показаны на рис. 7, 8. Соответствующие значения удвоенной функции невязки приведены в табл. 2. При $\mu_{51} = 4,11 \times 10^{-5}$ (значение получено в методе LM2) распределения запаса чувствительности после первого и второго шагов практически совпадают с начальным. При уменьшении параметра μ_{51} после первого шага функция невязки и запас чувствительности на осях, соответствующих большим сингулярным числам, растут, а запас чувствительности на осях, соответствующих малым сингулярным числам, уменьшается. После второго шага запас чувствительности на осях, соответствующим большим сингулярным числам, и значение функции невязки уменьшаются. В результате выполнения двух шагов наименьшее значение функции невязки получено при $\mu_{51} = 10^{-5}$.

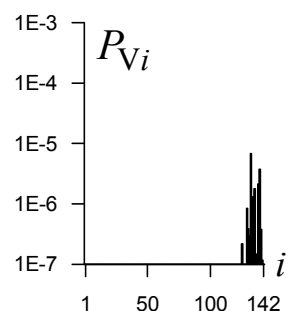


Рис. 6.

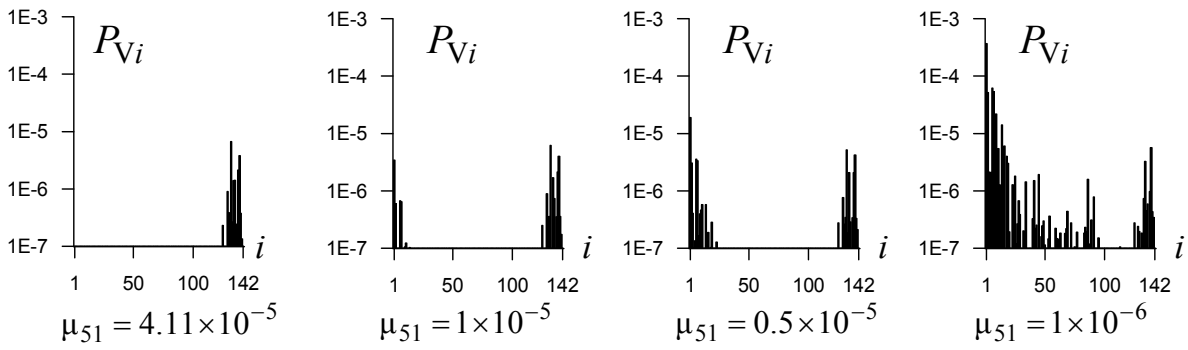


Рис. 7. Распределение запаса чувствительности после первого шага.

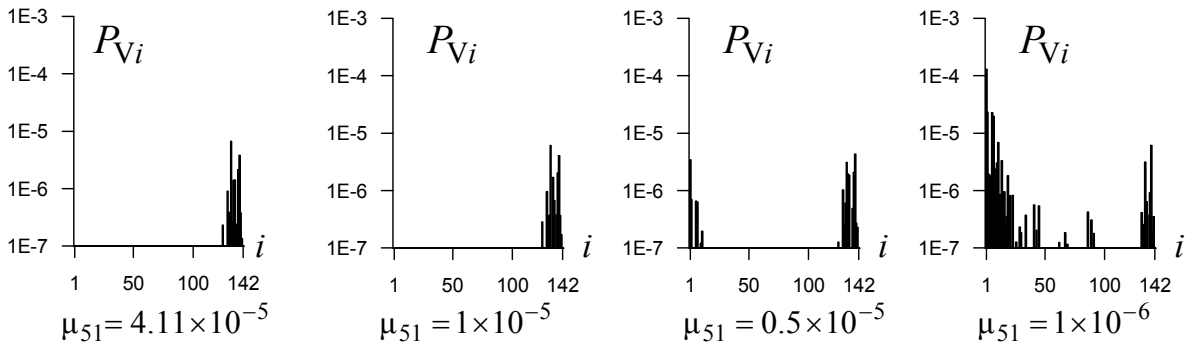


Рис. 8. Распределение запаса чувствительности после второго шага.

Таблица 2. Значения удвоенной функции невязки.

μ_{51}	начальное значение	после 1-го шага	после 2-го шага
$4,11 \times 10^{-5}$	$1,88 \times 10^{-5}$	$1,84 \times 10^{-5}$	$1,83 \times 10^{-5}$
$1,00 \times 10^{-5}$		$2,73 \times 10^{-5}$	$1,75 \times 10^{-5}$
$0,50 \times 10^{-5}$		$4,99 \times 10^{-5}$	$2,28 \times 10^{-5}$
$1,00 \times 10^{-6}$		$6,32 \times 10^{-4}$	$2,39 \times 10^{-4}$

В [10] на основе метода LM2 построен двухшаговый метод Левенберга-Марквардта (DLM2), в котором параметр μ_k на каждой итерации определяется из условия минимума функции J_{μ_k} . Значения функции J_{μ_k} вычисляются следующим образом: $J_{\mu_k} = \min\{J_{\mu_k}^1, J_{\mu_k}^2\}$, где $J_{\mu_k}^1 = J(\mathbf{K}^{k-1} + \mathbf{d}^1)$, $J_{\mu_k}^2 = J(\mathbf{K}^{k-1} + \mathbf{d}^1 + \mathbf{d}^2)$, $\mathbf{d}^1 = -(\mathbf{H} + \mu_k \mathbf{E})^{-1} \mathbf{g}$, $\mathbf{d}^2 = \mathbf{V} \tilde{\mathbf{d}}_V$, $\tilde{d}_{Vi} = -\tilde{g}_{Vi} / (\sigma_i + \mu_k)$, $i = 1, \dots, q$, $\tilde{d}_{Vi} = 0$, $i = q+1, \dots, n$, \tilde{g}_{Vi} - компоненты вектора $\tilde{\mathbf{g}}_V = \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{g}}$, $\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{R}}$, $\tilde{\mathbf{R}}$ - вектор невязок в точке $\mathbf{K}^{k-1} + \mathbf{d}^1$, q выбирается из условия $\sigma_q > \mu_k \geq \sigma_{q+1}$. Для определения вектора \mathbf{d}^2 используются значения невязок в точке $\mathbf{K}^{k-1} + \mathbf{d}^1$ и матрица чувствительности, вычисленная в точке \mathbf{K}^{k-1} . Использование

одной и той же матрицы \mathbf{A} для обоих шагов позволяет сократить вычислительные затраты. В [11] предложен двухшаговый метод (далее DLM1), в котором параметр μ_k определяется аналогично методу LM1. Использование методов DLM1 и DLM2 позволило достигнуть заданную точность по напорам в наблюдательных точках за меньшее число итераций по сравнению с методами LM1 и LM2 (табл. 4).

В методах DLM1, DLM2 второй шаг проводится так, чтобы уменьшить запас чувствительности на осях, соответствующих большим сингулярным числам. Рассмотрим распределение запаса чувствительности на 15-ой итерации метода DLM2 при решении первой модельной задачи (рис. 9(а-в)). На этой итерации $\mu_{15} = 1,34 \times 10^{-5}$.

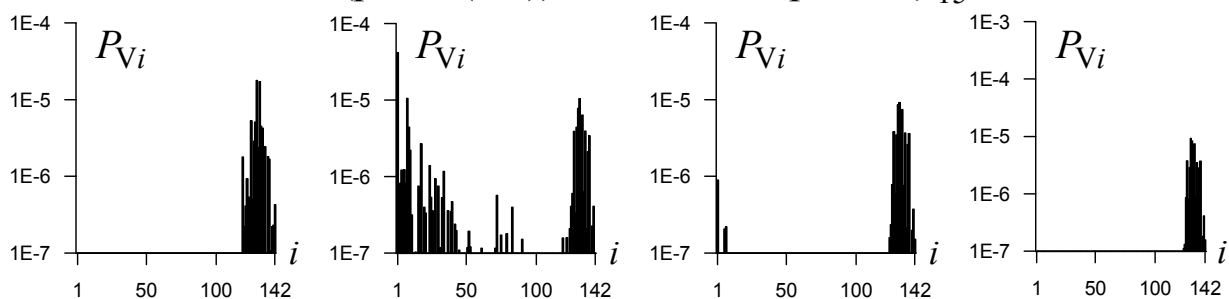


Рис. 9. Распределение запаса чувствительности в начале 15-ой итерации (а), после первого шага (б), второго шага (в), пятого шага (г) для $\mu_{15} = 1,34 \times 10^{-5}$.

Видно, что запас чувствительности на осях, соответствующих большим сингулярным числам, после второго шага меньше, чем после первого шага, но больше, чем в начале итерации. Проведём ещё несколько шагов, аналогичных второму шагу. После пятого шага (рис. 9(г)) запас чувствительности на осях, соответствующих большим сингулярным числам, практически полностью обнуляется. Выполним смещение параметров на 15-ой итерации с $\mu_{15} = 1,0 \times 10^{-5}$ и $\mu_{15} = 0,5 \times 10^{-5}$. Распределение запаса чувствительности после первого, второго и восьмого шагов показаны на рис. 10 и рис. 11. Значения функции невязки приведены в табл. 3. Видно, что запас чувствительности после нескольких смещений в направлениях, соответствующих большим сингулярным числам, на этих осях практически полностью обнуляется. Наименьшее значение функции невязки получено при выполнении нескольких смещений параметров.

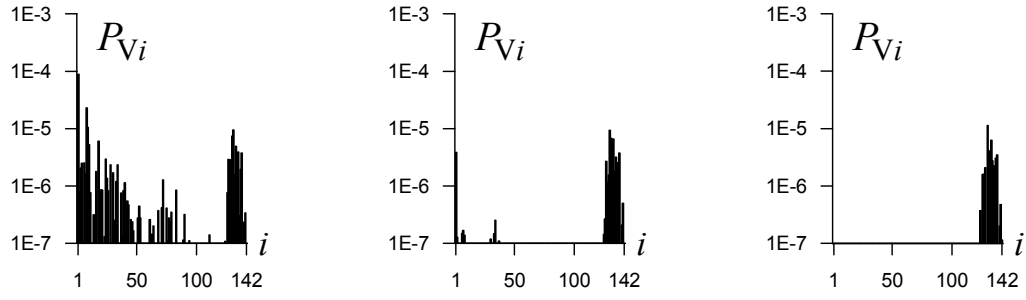


Рис. 10. Распределение запаса чувствительности после первого (а), второго (б) и восьмого (в) шагов для $\mu_{15} = 1,0 \times 10^{-5}$.

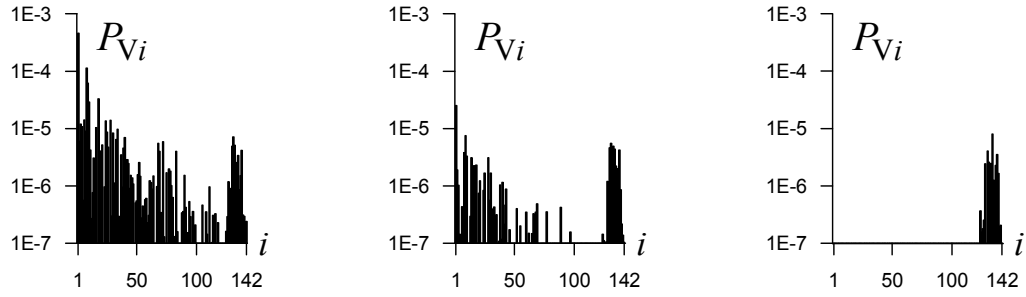


Рис. 11. Распределение запаса чувствительности после первого (а), второго (б) и восьмого (в) шагов для $\mu_{15} = 0,5 \times 10^{-5}$.

Таблица 3. Значения удвоенной функции невязки.

μ_{15}	начальное значение	после 1-го шага	после 2-го шага	после дополнительных шагов
$1,34 \times 10^{-5}$	$7,12 \times 10^{-5}$	$1,26 \times 10^{-4}$	$4,73 \times 10^{-5}$	$4,57 \times 10^{-5}$
$1,0 \times 10^{-5}$		$2,16 \times 10^{-4}$	$4,75 \times 10^{-5}$	$4,1 \times 10^{-5}$
$0,5 \times 10^{-5}$		$9,55 \times 10^{-4}$	$1,05 \times 10^{-4}$	$3,19 \times 10^{-5}$

В [12] построен метод DLM2M, в котором на каждой итерации смещение переменных по направлениям, соответствующим большим сингулярным числам, проводится несколько раз. На каждой итерации метода параметр μ_k определяется из условия минимума функции J_{μ_k} . Для каждого значения μ_k значение $J_{\mu_k} = \min_t \{J_{\mu_k}^t\}$, где $J_{\mu_k}^1 = J(\mathbf{K}^{k,1})$, $\mathbf{K}^{k,1} = \mathbf{K}^{k-1} + \mathbf{d}^1$, $\mathbf{d}^1 = -(\mathbf{H} + \mu_k \mathbf{E})^{-1} \mathbf{g}$, $J_{\mu_k}^t = J(\mathbf{K}^{k,t})$, $t = 2, 3, \dots$, $\mathbf{K}^{k,t} = \mathbf{K}^{k,t-1} + \mathbf{d}^t$, $\mathbf{d}^t = \mathbf{V} \tilde{\mathbf{s}}_V$, $\tilde{s}_{Vi} = \tilde{g}_{Vi} / (\sigma_i + \mu_k)$, $i = 1, \dots, q$, $\tilde{s}_{Vi} = 0$, $i = q+1, \dots, 142$, \tilde{g}_{Vi} - компоненты вектора $\tilde{\mathbf{g}}_V = \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{g}}$, $\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{R}}$, $\tilde{\mathbf{R}}$ - вектор невязок в точке $\mathbf{K}^{k,t-1}$, номер оси q выбирается из условия $\sigma_q > \mu_k \geq \sigma_{q+1}$, значения $J_{\mu_k}^t$ вычисляются до тех пор, пока

$J_{\mu_k}^{t-1} - J_{\mu_k}^t > 0.01 J_{\mu_k}^{t-1}$. Для вычисления всех смещений используется матрица чувствительности, вычисленная в точке \mathbf{K}^{k-1} . Аналогично методу DLM2M строится метод DLM1M, в котором значение параметра μ_k на каждой итерации меняется по процедуре метода LM1. Использование методов DLM1M и DLM2M позволило сократить вычислительные затраты и достичь заданную точность по напорам во всех модельных задачах (табл. 4).

Таблица 4. Сравнение модификаций метода Левенберга-Марквардта.

задача	методы	начальное состояние		конечное состояние			
		r_{\max}	$\Delta \ln K_{xyz}$	r_{\max}	$\Delta \ln K_{xyz}$	it	nc
1	LM1	7,18	1,7	9×10^{-7}	0,24	248	35670
	DLM1			9×10^{-7}	0,27	110	15946
	DLM1M			7×10^{-7}	0,27	59	8666
	LM2			1×10^{-6}	0,24	332	50700
	DLM2			8×10^{-7}	0,26	82	13368
	DLM2M			4×10^{-7}	0,25	17	4534
2	LM1	9,41	1,7	1×10^{-6}	0,001	68	9749
	DLM1			5×10^{-7}	0,001	50	7181
	DLM1M			6×10^{-7}	0,001	45	6518
	LM2			5×10^{-7}	0,001	93	14194
	DLM2			1×10^{-11}	8×10^{-10}	33	5393
	DLM2M			8×10^{-10}	1×10^{-7}	9	2501
3	LM1	7,46	1,7	1×10^{-6}	0,02	48	6867
	DLM1			2×10^{-6}	0,02	47	6727
	DLM1M			6×10^{-7}	0,02	45	6547
	LM2			1×10^{-6}	0,02	109	16646
	DLM2			7×10^{-7}	0,02	35	5697
	DLM2M			9×10^{-7}	0,03	17	4010
4	LM1	9,3	1,73	1×10^{-6}	0,001	43	6150
	DLM1			1×10^{-6}	0,001	43	6150
	DLM1M			1×10^{-6}	0,001	43	6150
	LM2			2×10^{-7}	5×10^{-4}	50	7629
	DLM2			8×10^{-12}	8×10^{-10}	27	4415
	DLM2M			1×10^{-10}	2×10^{-8}	8	2081

LM1, LM2 – методы Левенберга-Марквардта, варианты 1, 2; DLM1, DLM2 – двухшаговые методы Левенберга-Марквардта, вариант 1, 2; DLM1M, DLM2M – модифицированные двухшаговые методы Левенберга-Марквардта, вариант 1, 2.

Заключение

На примере решения модельных задач идентификации коэффициента фильтрации с использованием запасов чувствительности проведён анализ причин медленной сходимости методов наискорейшего спуска и Левенберга-Марквардта. Построены квазиградиентный метод и двухшаговые методы Левенберга-Марквардта минимизации функции невязки. Квазиградиентный метод построен так, чтобы в главной системе координат отклонение переменной с меньшим запасом не превосходило отклонения переменной с большим запасом. В двухшаговых методах Левенберга-Марквардта направления минимизации в главной системе координат условно делятся на две группы: направления, соответствующие большим сингулярным числам, и направления, соответствующие маленьким сингулярным числам. На первом шаге допускается увеличение функции невязки за счёт её увеличения в направлениях с большими сингулярными числами. Вдоль этих направлений проводится смещения параметров на втором шаге. Показана высокая эффективность предложенных методов.

В данной работе не приведены результаты исследования устойчивости предложенных методов. Эти результаты можно найти в [5, 7, 10, 11, 12]. Отметим, что квазиградиентный метод устойчив к наличию погрешностей в замерах напора. В методах Левенберга-Марквардта и их двухшаговых вариантах для получения устойчивых решений используются специальные правила останова.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мироненко В.А.* Динамика подземных вод. Москва: Изд-во МГГУ, 1996. 520 с.
2. *Sun N.-Z.* Inverse Problems in Groundwater Modeling. Kluwer Acad., Norwell, Mass., 1994. 337 p.
3. *Mazurov P.A., Elesin A.V., Gabidullina A.N., Kadyrova A.Sh.* Use of minimization along the slope for estimation of aquifer parameters // Proceedings of the 4th International Conference on Calibration and reliability in groundwater modelling. - Prague, Czech Republic, 17-20 June 2002. V.1. P. 278-281.
4. *Габидуллина А.Н., Елесин А.В., Кадырова А.Ш., Мазуров П.А.* К идентификации коэффициента фильтрации трёхмерного напорно-

го анизотропного пласта // Математическое моделирование. 2002. Т.14. №9. С. 97-102.

5. *Мазуров П.А., Габидуллина А.Н., Елесин А.В., Кадырова А.Ш.* Запасы чувствительности в задачах идентификации коэффициента фильтрации трехмерных пластов // Вычислительные методы и программирование. 2004. Т.5. № 1. С. 50-61.
6. *Hill M.C.* Solving groundwater flow problems by conjugate-gradient methods and the strongly implicit procedure // Water Resour. Res. 1990. Vol.26. No.9. P. 1961-1969.
7. *Елесин А.В.* Идентификация коэффициента фильтрации неоднородного пласта в условиях напорной фильтрации жидкости: Дис. канд. физико-математических наук: 01.02.05., 2005. 138 с.
8. *Измаилов А.Ф., Солодов М.В.* Численные методы оптимизации. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 320 с.
9. *Дэннис Дж., Шнабель Р.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. Москва: Мир, 1988. 440 с.
10. *Мазуров П.А., Елесин А.В., Кадырова А.Ш.* Квазиньютоновский двухшаговый метод минимизации функции невязки // Вычислительные методы и программирование. 2009. Т.10. № 1. С. 64-71.
11. *Елесин А.В., Кадырова А.Ш., Мазуров П.А.* Двухшаговые методы Левенберга-Марквардта в задаче идентификации коэффициента фильтрации // Георесурсы. 2009. 4(32). С.40-42.
12. *Кадырова А.Ш.* Численное решение задач идентификации коэффициента фильтрации на основе двухшаговых методов минимизации функции невязки: Дис. канд. физико-математических наук: 05.13.18., 2010. 150 с.