

УДК 532.51:534.12

## **ДИНАМИКА ПУЗЫРЬКА ГАЗА ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ИЗМЕНЕНИИ ДАВЛЕНИЯ ОКРУЖАЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ**

А.А.Аганин, Л.А.Косолапова, В.Г.Малахов

aganin@kfti.knc.ru, kosolapova@kfti.knc.ru, malahov@kfti.knc.ru

Рассматривается нелинейная динамика несферического газового пузырька в жидкости. Изучается взаимодействие радиальных колебаний, искажений сферической формы и пространственного перемещения пузырька. Учитывается влияние силы тяжести, приближенно учтены вязкость и сжимаемость жидкости. Исследовано поведение пузырька при периодическом изменении давления жидкости в зависимости от амплитуды давления и начального радиуса пузырька.

### **Введение**

При изучении движения несферического газового пузырька в жидкости возникает вопрос о взаимном влиянии его радиальных колебаний, искажений сферической формы и пространственного перемещения. Изучение такого взаимодействия возможно лишь на основе нелинейных относительно амплитуд искажений и скорости движения пузырька соотношений. Известно, что перемещение пузырька, находящегося в стоячей акустической волне, в зависимости от его сферического радиуса и частоты акустического поля, может происходить либо в сторону пучности волны, либо в сторону узла. В [1] экспериментально было получено “танцующее” движение пузырька, когда он совершает колебательные движения в окрестности пучности акустической волны. Такое движение авторы пытались объяснить параметрическими колебаниями формы, вызванными колебаниями объема. В [2], на основе соотношений, связывающих движение, радиальные колебания и две соседние моды колебания формы пузырька, в предположении, что их собственные частоты примерно равны половине частоты внешнего воздействия и для малых значений амплитуды давления жидкости, получены траектории движения “танцующего” пузырька. В дальнейшем в [3] для малых искажений сферической формы пузырька и малой скорости его движения были получены уравне-

ния второго порядка относительно малых величин при произвольном числе мод искажения. Приведены решения ряда задач, демонстрирующих эффект нелинейного взаимодействия между радиальными колебаниями, колебаниями формы и движением пузырька. Рассмотрено движение пузырька в стоячей акустической волне.

Уравнения третьего порядка относительно малых величин получены в [4]. Следует отметить, что в работах [2], [4] жидкость идеальная и несжимаемая, а в [3] вязкость учитывается в приближении [5].

В настоящей работе изучается динамика несферического пузырька газа в жидкости с учетом его перемещения вдоль вертикальной оси. Используется квадратичная относительно искажений сферической формы пузырька математическая модель с приближенным учетом вязкости и сжимаемости жидкости и предположении, что скорость перемещения пузырька имеет порядок скорости его радиальных колебаний.

### Соотношения и методика решения задачи

Рассматривается осесимметричная динамика газового пузырька в неограниченном объеме жидкости. Предполагается, что движение жидкости потенциальное, а влияние вязкости учитывается через динамическое граничное условие на поверхности пузырька. В малой окрестности пузырька жидкость считается несжимаемой. Тогда ее движение описывается уравнениями

$$\Delta\Phi = 0, \quad \Phi_t + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{p}{\rho_0} + gz = G(t), \quad (1)$$

где  $t$  - время,  $p$  - давление в жидкости,  $\rho_0$  - плотность жидкости,  $\Phi$  - потенциал скорости,  $\mathbf{g} = g\mathbf{e}_z$  - ускорение силы тяжести,  $\mathbf{e}_z$  - направляющий вектор вертикальной оси  $z$  неподвижной цилиндрической системы координат  $x, z, \varphi$ . Наряду с неподвижной системой вводится подвижная сферическая система координат  $r, \theta, \varphi$  с началом в центре пузырька, связанная в осесимметричном случае с неподвижной системой уравнениями

$$x = r \sin \theta, \quad z = z_c(t) + r \cos \theta,$$

где  $z_c$  - координата центра пузырька в неподвижной системе отсчета в момент времени  $t$ .

В подвижной системе координат второе уравнение (1) запишется

в виде

$$\Phi_t - \dot{z}_c (\Phi_r \cos \theta - \frac{\sin \theta}{r} \Phi_\theta) + \frac{1}{2} (\Phi_r^2 + \frac{1}{r^2} \Phi_\theta^2) + \frac{p}{\rho_0} + gz = G(t), \quad (2)$$

где  $\dot{z}_c$  - скорость движения начала координат подвижной системы.

Считается, что газ в пузырьке идеальный, с равномерным распределением давления, подчиняющегося закону

$$p^- = p_b^0 [(V_0 - bV_0)/(V - bV_0)]^\gamma, \quad (3)$$

$p_b^0$  - начальное давление газа в пузырьке,  $V_0, V$  - начальный и текущий объемы пузырька,  $b$  - постоянная,  $\gamma$  - показатель адиабаты.

Предполагается, что на бесконечном удалении от пузырька жидкость движется со скоростью  $\mathbf{u}_\infty$ , определяемой выражением

$$\mathbf{u}_\infty = \mathbf{u}_l(t) = u_l(t) \mathbf{e}_z, \quad (4)$$

а давление жидкости  $p_\infty$  на уровне  $z = z_c$  изменяется по закону

$$p_\infty = p_0 - \Delta p \sin \omega t, \quad (5)$$

где  $p_0$  - статическое давление в жидкости;  $\Delta p, \omega$  - амплитуда и частота колебаний.

На поверхности пузырька  $F(r, \theta, t) = 0$  в подвижной сферической системе координат ставятся кинематическое условие равенства проекций скоростей жидкости и поверхности на нормаль  $\mathbf{n}$  к деформированной поверхности

$$F_t + (\Phi_r - \dot{z}_c \cos \theta) F_r + \left( \frac{1}{r} \Phi_\theta + \dot{z}_c \sin \theta \right) \frac{1}{r} F_\theta = 0 \quad (6)$$

и динамическое граничное условие равенства нулю суммы проекций сил на нормаль  $\mathbf{n}$

$$p^+ = p^- - 2\sigma H + \tau_{nn}, \quad (7)$$

где  $\sigma$  - поверхностное натяжение,  $H$  - средняя кривизна поверхности,  $\tau_{nn} = 2\mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2}$  - вязкое напряжение,  $\mu$  - динамический коэффициент вязкости.

Уравнение поверхности пузырька в сферической системе координат запишем в виде ряда по сферическим гармоникам

$$r = R(t) \left[ 1 + \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i(t) P_i(\eta) \right]. \quad (8)$$

Здесь  $P_i$  – полином Лежандра степени  $i$ ,  $\eta = \cos \theta$ . Параметр  $R$  будем называть радиусом, а  $\varepsilon_i$  – искажением сферической формы пузырька по гармонике с номером  $i$ .

Потенциал скорости  $\Phi$  берется в виде

$$\Phi(\theta, r, t) = \frac{B_0}{r} + \left( u_l r + \frac{B_1}{r^2} \right) P_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{B_i}{r^{i+1}} P_i(\cos \theta). \quad (9)$$

Дальнейшие соотношения получены в предположении, что искажения сферической формы пузырька  $\varepsilon_i$  таковы, что значениями  $|\varepsilon_i^3|$  можно пренебречь. При этом используются следующие оценки

$$|\varepsilon_i| \sim \varepsilon, \quad \left| \frac{R \dot{\varepsilon}_i}{\dot{R}} \right| \sim \varepsilon, \quad \left| \frac{\delta_i}{B_0} \right| \sim \varepsilon, \quad \left| \frac{\dot{\delta}_i}{\dot{B}_0} \right| \sim \varepsilon, \quad \varepsilon^3 \ll 1, \quad (10)$$

где  $\delta_i = \frac{B_i}{R^i}$ ,  $i = \overline{1, \infty}$ .

Строгий учет влияния сжимаемости при условиях (10) является довольно сложной задачей. Поэтому аналогично [7] предполагается, что несферические возмущения пузырька оказывают заметное влияние на колебание жидкости лишь в некоторой области  $r \leq r_e$  ( $r_e \sim R_0$ , ближнее поле), в которой жидкость считается несжимаемой. При  $r \geq r_e$  (дальнее поле) сжимаемость учитывается в рамках линейной акустики. Из условия сопряжения решений на границе ближнего и дальнего полей  $r = r_e$  получаем выражение для функции  $G(t)$  в виде

$$G(t) = \frac{p_{\infty}}{\rho_0} + \frac{1}{2} u_l^2 + g z_c - \dot{z}_c u_l + \frac{1}{c_f} \ddot{B}_0, \quad (11)$$

где  $c_f$  – скорость звука в жидкости. При этом дополнительно к (10) вводятся следующие ограничения:

$$\frac{\dot{R}}{c_f} \sim \varepsilon, \quad \frac{w}{c_f} \sim \varepsilon, \quad (12)$$

где  $w = \dot{z}_c - u_l$  – относительная скорость движения центра пузырька.

Подставляя разложения (8), (9) в условия (6), (7) с учетом (2), (11), применяя при интегрировании полученной системы по координате  $\theta$  процедуру метода Бубнова-Галеркина и учитывая (10), (12), получаем систему дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных  $R, \varepsilon_i, B_0, \delta_1, \delta_i, z_c, i = 2, 3, \dots$ . Полностью эта система приведена в [8].

Разрешив эту систему относительно неизвестных  $R, \varepsilon_i, z_c$  с принятой точностью  $O(\varepsilon^2)$ , получим [6]:

$$\begin{aligned}
& \left[ 1 + \frac{\tilde{\alpha}_{ii}}{2} \varepsilon_i^2 - \frac{1}{c_f} \left( \dot{R} + \frac{4v}{R} \right) \right] R \ddot{R} + \left[ \frac{\tilde{\alpha}_{ii}}{2} \varepsilon_i + \frac{4v \tilde{\alpha}_{ii}}{c_f R} \varepsilon_i - \frac{3}{2} \tilde{\gamma}_{ij1} w \varepsilon_j \right] R^2 \ddot{\varepsilon}_i - \left[ \frac{3}{4} (\tilde{\alpha}_{ij1} - \right. \\
& \left. - \tilde{\beta}_{1ij}) \varepsilon_i \varepsilon_j + \frac{R}{2c_f} w \dot{w} = -\frac{3}{2} \left( 1 - \frac{\dot{R}}{3c_f} \right) \dot{R}^2 - \tilde{\alpha}_{ii} \left( 3\dot{R}^2 \varepsilon_i^2 + 4R\dot{R} \varepsilon_i \dot{\varepsilon}_i + R^2 \dot{\varepsilon}_i^2 \right) + \frac{2i+1}{4(i+1)} \right. \\
& \left. \tilde{\alpha}_{ii} (3\dot{R} \varepsilon_i + R \dot{\varepsilon}_i)^2 + \frac{1}{\rho_0} \left\{ \left( 1 + \frac{\dot{R}}{c_f} \right) (p^- - p_\infty) + \frac{R}{c_f} (\dot{p}^- - \dot{p}_\infty) - \frac{\sigma}{R} \left[ 2 + (1-i-i^2) \tilde{\alpha}_{ii} \varepsilon_i^2 \right] \right\} - \right. \\
& \left. - \frac{v}{R} [4\dot{R} - \tilde{\alpha}_{ii} (6i\dot{R} \varepsilon_i + (i+1)(2-i)R \dot{\varepsilon}_i)] \varepsilon_i + \left( 1 + \frac{\dot{R}}{c_f} \right) \frac{w^2}{4} + \frac{3}{4} \tilde{\delta}_{1li} (R \dot{\varepsilon}_l - 2\dot{R} \varepsilon_l) w \varepsilon_i + \right. \\
& \left. + \frac{3}{4} \left[ 5\tilde{\alpha}_{ij1} \dot{R} + 3(\tilde{\alpha}_{ij11} + \frac{5}{4} \tilde{\beta}_{11ij}) w \right] w \varepsilon_i \varepsilon_j - \frac{3}{2R^4} (2(i+1)\tilde{\alpha}_{ij1} + (i+3)\tilde{\beta}_{1ij}) (\delta_1 \delta_i)^{(1),T} \varepsilon_j + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2R^4} (2(\delta_1^2)^{(2),T} + (i+1)(\delta_i^2)^{(2),T}) + \frac{v}{R^3} \left[ \frac{3}{2} (8\tilde{\beta}_{1ji} + 3\tilde{\beta}_{ij1} - 20\tilde{\alpha}_{ij1}) R^2 w \varepsilon_j + \right. \right. \\
& \left. \left. + (i-3)(i+1)(i+2)\tilde{\alpha}_{ii} \delta_i^{(1),T} \right] \varepsilon_i, \tag{13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{7}{2} \tilde{\alpha}_{ij1} - 3\tilde{\gamma}_{ij1} \right) R \ddot{R} \varepsilon_i \varepsilon_j + (\tilde{\alpha}_{ij1} - \tilde{\gamma}_{ij1}) R^2 \varepsilon_j \ddot{\varepsilon}_i - \left[ \frac{1}{3} - \frac{7}{15} \varepsilon_2 + \frac{1}{25} \varepsilon_2^2 - \frac{3}{2} (\tilde{\alpha}_{ij11} - \tilde{\beta}_{1j1i} + (\tilde{\alpha}_{ij1} - \right. \\
& \left. - \tilde{\gamma}_{lj1}) \frac{\tilde{\delta}_{1il}}{\tilde{\alpha}_{ll}}) \varepsilon_i \varepsilon_j \right] R \dot{w} = -\frac{2}{3} R \left( 1 + \frac{2}{5} \varepsilon_2 \right) (\dot{u}_l + g) + \tilde{\alpha}_{ij1} \dot{R} (3\dot{R} \varepsilon_i - 2R \dot{\varepsilon}_i) \varepsilon_j - \\
& - \frac{2}{3R^2} \left( \dot{R} \delta_1^{(2)} + R \dot{\delta}_1^{(2)} + \frac{2}{R^2} (B_0 \delta_1)^{(2)} \right) - \frac{1}{2R^4} [(i+1)(j+1)\tilde{\alpha}_{ij1} + \tilde{\beta}_{ij1}] (\delta_i \delta_j)^{(2)} + \\
& + \frac{2}{\rho_0 R} \left\{ \sigma (1-i-i^2) \tilde{\alpha}_{ij1} \varepsilon_i \varepsilon_j - \frac{v \rho_0}{R^2} \left[ 4\delta_1^{(2)} - 3(4\tilde{\alpha}_{ij1} - \tilde{\beta}_{ij1}) R^2 \dot{R} \varepsilon_i \varepsilon_j + (i+2) (2\tilde{\beta}_{ij1} - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (i+1)(i+3)\tilde{\alpha}_{ij1})\delta_i^{(1)}\varepsilon_j \Big] \Big\} + \left[ \dot{R}\left(1-\frac{1}{5}\varepsilon_2-\frac{8}{25}\varepsilon_2^2\right) - \frac{R}{5}\left(1-\frac{4}{5}\varepsilon_2\right)\dot{\varepsilon}_2 \right] w + \frac{9}{4}\left(\tilde{\beta}_{11i1}-\right. \\
& \left. -\frac{4}{5}(\tilde{\alpha}_{i111}+\tilde{\beta}_{11i1})\varepsilon_2\right) w^2 \varepsilon_i + \frac{3}{2}\frac{\tilde{\alpha}_{ij1}\tilde{\delta}_{1li}}{\tilde{\alpha}_{ii}} w(2\dot{R}\varepsilon_l - R\dot{\varepsilon}_l)\varepsilon_j - \frac{3}{2}\left[5\tilde{\alpha}_{ij11}\dot{R}+3(\tilde{\alpha}_{ij111}+\right. \\
& \left. +\frac{5}{4}\tilde{\beta}_{11ij1})w\right] w\varepsilon_i\varepsilon_j - \frac{12}{5R^4}\left[(\delta_1\delta_2)^{(1),T}+(\delta_1\delta_2)^{(2),T}\right] - \frac{2}{3R^2}\left(R\dot{\delta}_1^{(2),T}-\dot{R}\delta_1^{(2),T}\right) + \\
& +\frac{3}{R^4}\left(2(i+1)\tilde{\alpha}_{ij11}+(i+3)\tilde{\beta}_{1ij1}\right)(\delta_1\delta_i)^{(1),T}\varepsilon_j - \frac{1}{2R^4}\left[(i+1)(j+1)\tilde{\alpha}_{ij1}+\tilde{\beta}_{ij1}\right](\delta_i\delta_j)^{(2),T} - \\
& -\frac{4\nu}{R}\left[(-1+\varepsilon_2-\frac{6}{25}\varepsilon_2^2)w+\left(6\tilde{\beta}_{j1i1}-15\tilde{\alpha}_{ij11}+\frac{9}{4}\tilde{\beta}_{ij11}\right)w\varepsilon_i\varepsilon_j+\frac{2}{R^2}\delta_1^{(2),T}+\right. \\
& \left. +\frac{(i+2)}{2R^2}\left(2\tilde{\beta}_{ij1}-(i+1)(i+3)\tilde{\alpha}_{ij1}\right)\delta_i^{(1),T}\varepsilon_j\right], \tag{14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{k-2}{k+1}\tilde{\alpha}_{kk}\varepsilon_k + \left(\frac{2k+5}{k+1}\tilde{\alpha}_{ijk} - 3\tilde{\gamma}_{ijk}\right)\varepsilon_i\varepsilon_j\right] R\ddot{R} - R^2\left[\frac{\tilde{\alpha}_{kk}}{k+1}\ddot{\varepsilon}_k - (\tilde{\alpha}_{ijk} - \tilde{\gamma}_{ijk})\varepsilon_j\ddot{\varepsilon}_i\right] + \\
& + R\left[\left(\tilde{\alpha}_{ik1} - \frac{3}{2(k+1)}\tilde{\delta}_{1ik}\right)\varepsilon_i + \frac{3}{5(k+1)}\left((2-k)\tilde{\alpha}_{1ik} - \frac{1}{2}\tilde{\beta}_{1ik}\right)\varepsilon_2\varepsilon_i + \frac{3}{2}\left(\frac{\tilde{\delta}_{1il}}{\tilde{\alpha}_{ll}}(\tilde{\alpha}_{ljk} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \tilde{\gamma}_{ljk}) - \frac{2}{k+1}\tilde{\beta}_{1jik} + \frac{3-k}{k+1}\tilde{\alpha}_{ij1k}\right)\varepsilon_i\varepsilon_j\right] \dot{w} = -\tilde{\alpha}_{ik1}(\dot{u}_l + g)R\varepsilon_i + \frac{\tilde{\alpha}_{kk}}{k+1}\dot{R}(3\dot{R}\varepsilon_k + \\
& + 5R\dot{\varepsilon}_k) + \tilde{\alpha}_{ijk}\dot{R}(3\dot{R}\varepsilon_i - 2R\dot{\varepsilon}_i)\varepsilon_j - \frac{\tilde{\alpha}_{kk}}{R^2}\left[k\dot{R}\delta_k^{(2)} + R\dot{\delta}_k^{(2)} + \frac{k+1}{R^2}(B_0\delta_k)^{(2)}\right] - \\
& - \frac{1}{2R^4}\left[(i+1)(j+1)\tilde{\alpha}_{ijk} + \tilde{\beta}_{ijk}\right](\delta_i\delta_j)^{(2)} + \frac{\sigma}{\rho_0 R}\left[(k-1)(k+2)\tilde{\alpha}_{kk}\varepsilon_k + 2\tilde{\alpha}_{ijk}(1-i-i- \right. \\
& \left. -i^2)\varepsilon_i\varepsilon_j\right] - \frac{2\nu}{R^3}\left[R^2\dot{R}\left(6\tilde{\alpha}_{kk}\varepsilon_k + 3(\tilde{\beta}_{ijk} - 4\tilde{\alpha}_{ijk})\varepsilon_i\varepsilon_j\right) + (k+1)(k+2)\tilde{\alpha}_{kk}(\delta_k^{(1)} + \right. \\
& \left. + \delta_k^{(2)}) + (i+2)\left(2\tilde{\beta}_{ijk} - (i+1)(i+3)\tilde{\alpha}_{ijk}\right)\delta_i^{(1)}\varepsilon_j\right] + \left(\tilde{\alpha}_{11k} - \frac{5}{4}\tilde{\beta}_{11k}\right)\frac{w^2}{2} + \\
& + \frac{9}{4}\left(\tilde{\beta}_{11ik}\varepsilon_i + \frac{\tilde{\beta}_{11k}}{5}\varepsilon_2\right)w^2 + \frac{3}{2(k+1)}\tilde{\delta}_{1ik}(\dot{R}\varepsilon_i + R\dot{\varepsilon}_i)w + \frac{3}{5}\left[\tilde{\alpha}_{ik1}(R\dot{\varepsilon}_2 - 2\dot{R}\varepsilon_2) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -3(\tilde{\alpha}_{ik11} + \tilde{\beta}_{11ik})w\varepsilon_2 - \frac{5}{2} \frac{\tilde{\alpha}_{ijk}\tilde{\delta}_{1lj}}{\tilde{\alpha}_{jj}}(R\dot{\varepsilon}_l - 2\dot{R}\varepsilon_l) \Big] w\varepsilon_i - \frac{3}{2} \left[ 5\tilde{\alpha}_{ij1k}\dot{R} + 3(\tilde{\alpha}_{ij11k} + \right. \\
& \left. + \frac{5}{4}\tilde{\beta}_{11ijk})w \right] w\varepsilon_i\varepsilon_j - \frac{3}{R^4} \left[ \tilde{\beta}_{1ik} - (2(i+1)\tilde{\alpha}_{jik1} + (i+3)\tilde{\beta}_{1ijk})\varepsilon_j \right] (\delta_1\delta_i)^{(1),T} - \\
& - \frac{1}{R^4} \left[ 2(i+1)\tilde{\alpha}_{ik1} + \tilde{\beta}_{1ik} \right] (\delta_1\delta_i)^{(2),T} - \frac{1}{R^2} (2\tilde{\alpha}_{11k} - \tilde{\beta}_{11k}) (\delta_1^{(2)} + \delta_1^{(2),T}) w - \\
& - \frac{1}{R^4} (2\tilde{\alpha}_{11k} + \frac{1}{2}\tilde{\beta}_{11k}) (\delta_1^{(2)})^{(2),T} - \frac{1}{R^2} ((i+1)\tilde{\alpha}_{ik1} - \tilde{\beta}_{1ik}) (\delta_i^{(2)} + \delta_i^{(2),T}) w - \\
& - \frac{\tilde{\alpha}_{kk}}{R^2} (R\dot{\delta}_k^{(2),T} - \dot{R}\delta_k^{(2),T}) - \frac{1}{2R^4} \left[ \tilde{\beta}_{ijk} + (i+1)(j+1)\tilde{\alpha}_{ijk} \right] (\delta_i\delta_j)^{(2),T} - \frac{6\nu}{R} \left[ (4\tilde{\alpha}_{ik1} - \right. \\
& \left. - \tilde{\beta}_{i1k}) (1 - \frac{3}{5}\varepsilon_2) w\varepsilon_i + (4\tilde{\beta}_{j1ik} - 10\tilde{\alpha}_{ijk1} + \frac{3}{2}\tilde{\beta}_{ij1k}) w\varepsilon_i\varepsilon_j + \frac{i+2}{3R^2} (2\tilde{\beta}_{ijk} - \right. \\
& \left. - (i+1)(i+3)\tilde{\alpha}_{ijk}) \delta_i^{(1),T} \varepsilon_j + \frac{(k+1)(k+2)}{3R^2} \tilde{\alpha}_{kk} (\delta_k^{(1),T} + \delta_k^{(2),T}) \right], \quad k = 2, 3, \dots \quad (15)
\end{aligned}$$

где  $\nu = \mu / \rho_0$  - кинематический коэффициент вязкости,

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_{ik} &= \int_{-1}^1 P_i(\eta)P_k(\eta)d\eta = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ \frac{2}{2i+1}, & i = k \end{cases}, \quad \tilde{\alpha}_{ijk} = \int_{-1}^1 P_iP_jP_kd\eta, \quad \tilde{\alpha}_{ijkl} = \int_{-1}^1 P_iP_jP_kP_ld\eta, \\
\tilde{\alpha}_{ijkln} &= \int_{-1}^1 P_iP_jP_lP_kP_nd\eta, \quad \tilde{\beta}_{ijk} = \int_{-1}^1 P_i'P_j'P_k(1-\eta^2)d\eta, \quad \tilde{\beta}_{ijkl} = \int_{-1}^1 P_i'P_j'P_kP_l(1-\eta^2)d\eta, \\
\tilde{\beta}_{ijkln} &= \int_{-1}^1 P_i'P_j'P_lP_kP_n(1-\eta^2)d\eta, \quad P_i' = dP_i(\eta)/d\eta, \quad \tilde{\delta}_{ijk} = 2\tilde{\alpha}_{ijk} - \tilde{\beta}_{ijk}, \\
\tilde{\gamma}_{ijk} &= \left[ (i+1)(i+2)\tilde{\alpha}_{ijk} - \tilde{\beta}_{ijk} \right] / (i+1)(k+1), \\
\delta_1^{(2)} &= \frac{3}{2}R^2 \left[ \frac{3}{2}(\tilde{\alpha}_{ij1} - 2\tilde{\gamma}_{ij1})\dot{R}\varepsilon_i - \tilde{\gamma}_{ij1}R\dot{\varepsilon}_i \right] \varepsilon_j, \\
\delta_1^{(2),T} &= \frac{9}{4}R^2w \left[ \frac{2}{25}\varepsilon_2^2 + (2\tilde{\alpha}_{ij11} - \tilde{\beta}_{1j1i} - \frac{\tilde{\gamma}_{lj1}\tilde{\delta}_{1il}}{\tilde{\alpha}_{ll}})\varepsilon_i\varepsilon_j \right], \\
\delta_i^{(1)} &= -\frac{R^2}{i+1} (3\dot{R}\varepsilon_i + R\dot{\varepsilon}_i), \quad \delta_i^{(1),T} = -\frac{3\tilde{\delta}_{1ki}}{2(i+1)\tilde{\alpha}_{ii}} R^2w\varepsilon_k,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_i^{(2)} &= \frac{R^2}{(i+1)\tilde{\alpha}_{ii}} \left[ 3\dot{R}(\tilde{\alpha}_{kji} - (i+1)\tilde{\gamma}_{kji})\varepsilon_k - (i+1)\tilde{\gamma}_{kji}R\dot{\varepsilon}_k \right] \varepsilon_j, \\
\delta_i^{(2),T} &= \frac{3R^2}{2(i+1)\tilde{\alpha}_{ii}} w \left[ \frac{1}{5}(6\tilde{\alpha}_{1ki} - \tilde{\beta}_{1ki})\varepsilon_2 + (4\tilde{\alpha}_{kji} - 2\tilde{\beta}_{1jki} - \frac{i+1}{\tilde{\alpha}_{ll}}\tilde{\gamma}_{lji}\tilde{\delta}_{1kl})\varepsilon_j \right] \varepsilon_k, \\
(\delta_1^{(2)})^{(2),T} &= -\frac{9R^4}{4} w^2 \left[ \frac{\varepsilon_2^2}{25} + (2\tilde{\alpha}_{ij1} - \tilde{\beta}_{1jli} - \frac{\tilde{\gamma}_{lj1}\tilde{\delta}_{1il}}{\tilde{\alpha}_{ll}})\varepsilon_i\varepsilon_j \right] + \frac{3R^4}{4} w \left[ 2\tilde{\gamma}_{ij1}R\dot{\varepsilon}_i - \right. \\
&\quad \left. - 3(\tilde{\alpha}_{ij1} - 2\tilde{\gamma}_{ij1})\dot{R}\varepsilon_i \right] \varepsilon_j, \quad (\delta_i^{(2)})^{(2)} = \frac{R^4}{(i+1)^2} (3\dot{R}\varepsilon_i + R\dot{\varepsilon}_i)^2, \\
(\delta_i^{(2)})^{(2),T} &= \frac{3\tilde{\delta}_{1ki}}{(i+1)^2\tilde{\alpha}_{ii}} R^4 w \left( 3\dot{R}\varepsilon_i + R\dot{\varepsilon}_i + \frac{3}{4}\frac{\tilde{\delta}_{1li}}{\tilde{\alpha}_{ii}} w\varepsilon_l \right) \varepsilon_k, \\
(B_0\delta_1)^{(2)} &= \frac{3}{2}R^4 \left[ -\frac{3}{2}\tilde{\alpha}_{ij1}\dot{R}^2\varepsilon_i\varepsilon_j + \tilde{\gamma}_{ij1}(3\dot{R}^2\varepsilon_i + R\dot{R}\dot{\varepsilon}_i)\varepsilon_j \right], \\
(B_0\delta_1)^{(2),T} &= -\delta_1^{(2),T} R^2\dot{R} + \frac{R^4}{4}\tilde{\alpha}_{ii}w(3\dot{R}\varepsilon_i + 2R\dot{\varepsilon}_i)\varepsilon_i, \quad (B_0\delta_i)^{(2)} = -R^2\dot{R}\delta_i^{(2)}, \\
(\delta_1\delta_i)^{(1),T} &= \frac{R^4}{2(i+1)} w \left[ 3\dot{R}\varepsilon_i + R\dot{\varepsilon}_i + \frac{3\tilde{\delta}_{1ki}}{2\tilde{\alpha}_{ii}} w\varepsilon_k \right], \quad (\delta_1\delta_i)^{(2),T} = \frac{R^4}{2(i+1)} w \\
&\quad \left\{ -\frac{3}{5}(3\dot{R}\varepsilon_i + R\dot{\varepsilon}_i)\varepsilon_2 + \frac{1}{\tilde{\alpha}_{ii}} \left[ (i+1)\tilde{\gamma}_{kji}R\dot{\varepsilon}_k - 3(\tilde{\alpha}_{kji} - (i+1)\tilde{\gamma}_{kji})\dot{R}\varepsilon_k \right] \varepsilon_j + \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{2\tilde{\alpha}_{ii}} w\varepsilon_k \left[ \frac{4}{5}(\tilde{\beta}_{1ki} - 3\tilde{\alpha}_{1ki})\varepsilon_2 - (4\tilde{\alpha}_{kji} - 2\tilde{\beta}_{1jki} - \frac{i+1}{\tilde{\alpha}_{ll}}\tilde{\gamma}_{lji}\tilde{\delta}_{1kl})\varepsilon_j \right] \right\}, \\
(\delta_i\delta_j)^{(2)} &= \frac{3R^4}{(i+1)(j+1)} \left[ 3\dot{R}^2\varepsilon_i\varepsilon_j + R\dot{R}(\varepsilon_i\dot{\varepsilon}_j + \dot{\varepsilon}_i\varepsilon_j) + \frac{R^2}{3}\dot{\varepsilon}_i\dot{\varepsilon}_j \right], \quad (\delta_i\delta_j)^{(2),T} = \\
&= \frac{3R^4 w}{2(i+1)(j+1)} \left[ \frac{\tilde{\delta}_{1li}}{\tilde{\alpha}_{ii}}(3\dot{R}\varepsilon_j + R\dot{\varepsilon}_j)\varepsilon_l + \frac{\tilde{\delta}_{1kj}}{\tilde{\alpha}_{jj}}(3\dot{R}\varepsilon_i + R\dot{\varepsilon}_i)\varepsilon_k + \frac{3}{2\tilde{\alpha}_{ii}\tilde{\alpha}_{jj}}\tilde{\delta}_{1ki}\tilde{\delta}_{1lj}w\varepsilon_k\varepsilon_l \right].
\end{aligned}$$

Индексы <sup>(1), (2)</sup> означают, что слагаемые имеют, соответственно, порядок малости  $O(\varepsilon)$  и  $O(\varepsilon^2)$ ; индекс <sup>T</sup> указывает на зависимость слагаемого от относительной скорости движения центра пузырька  $w$ .



Полагая слагаемые с индексом  $T$  равными нулю, получим соотношения работы [9].

Выражение для текущего объема пузырька с принятой точностью имеет вид

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \left( 1 + \frac{3}{2} \varepsilon_i^2 \tilde{\alpha}_{ii} \right).$$

Система (13) - (15) с начальными условиями

$$R(0) = R_0, \dot{R}(0) = 0, \varepsilon_i(0) = \varepsilon_i^0, \dot{\varepsilon}_i(0) = 0, z_c(0) = z_{c0}, \dot{z}_c(0) = \dot{z}_{c0}$$

решается методом Дормана–Принса седьмого порядка точности [10]. При вычислениях в представлении (8), (9) бесконечные верхние пределы сумм заменяются на число  $M$ , тогда система уравнений содержит  $2M+2$  неизвестные функции.

### Результаты решения задачи

Рассматривается задача о движении несферического пузырька воздуха в воде под действием периодически изменяющегося давления жидкости (5). Задача решается при следующих исходных данных:

$$\begin{aligned} \gamma = 1,4, b = 8,5, c_f = 1500 \text{ м/с}, \rho_f = 998 \text{ кг/м}^3, \sigma = 0,0725 \text{ кг/с}^2, \mu = 10^{-3} \text{ кг/мс}, \\ p_0 = 0,1 \text{ МПа}, \Delta p \in [0,05, 0,09] \text{ МПа}, \omega / 2\pi = 26,5 \text{ кГц}, \\ g = 0, \dot{z}_{c0} = 0, \varepsilon_5^0 = 0,3, \varepsilon_i^0 = 0, i \neq 5. \end{aligned} \quad (16)$$

Изучается влияния начального радиуса пузырька  $R_0$  и амплитуды колебания давления жидкости  $\Delta p$  на характер движения пузырька. Учитывалось пять гармоник  $\varepsilon_2 \div \varepsilon_6$ . При этом возникающие при изменении давления жидкости радиальные колебания в результате нелинейного взаимодействия порождают колебания формы пузырька, а также его перемещение в пространстве.

На рис.1 приведены результаты расчета для  $\Delta p = 0,06 \text{ МПа}$ ,  $R_0 = 20,2 \text{ мкм}$ . Известно, что при этих параметрах сферическая форма пузырька линейно неустойчива, причем неустойчивость развивается по третьей гармонике [9]. Изображены зависимости от времени отношения  $R/R_0$  (рис.1 *a*), наибольшего искажения  $\varepsilon_3$  (рис.1 *b*) и координаты центра пузырька  $z_c$  (рис.1 *c*). Период колебания  $R$  совпадает с периодом колебания давления жидкости  $T$ . Видно, что с течением времени развитие искажения вызывает перемещение пузырька. Когда

колебания искажений становятся периодическими, центр пузырька начинает совершать колебания с малой амплитудой относительно уровня  $z \approx 5$  мкм.

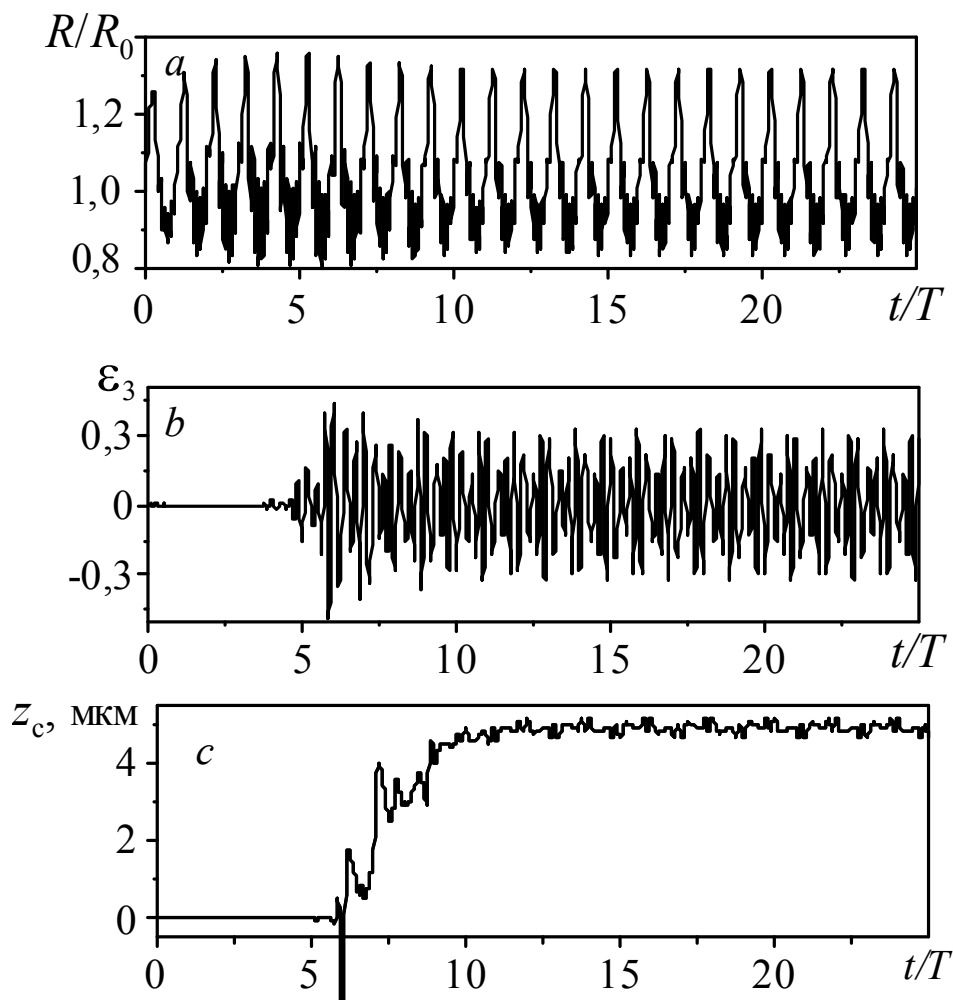


Рис.1. Зависимости от времени отношения  $R/R_0$ , искажения  $\varepsilon_3$  и координаты центра пузырька  $z_c$  для  $\Delta p=0,06$  МПа,  $R_0=20,2$  мкм

На рис.2 *a, b* приведены зависимости от времени величины максимального на периоде  $T$  искажения  $\varepsilon_3^T = \max_{(k-1)T \leq t \leq kT} |\varepsilon_3|$ ,  $k = 1, 2, \dots$  и координаты центра пузырька  $z_c$  для  $\Delta p = 0,06$  МПа и трех значений  $R_0$ . Если для  $R_0=21,7$  мкм наблюдалось быстрое затухание всех искажений, то его увеличение до  $R_0=21,8$  мкм вызывает режим периодических колебаний с ограниченной амплитудой и периодом  $T$ . Развитие искажений приводит к сложному движению центра пузырька, состоящему из его поступательного движения и колебаний с малой ам-

плитудой. Такое поведение характерно для  $R_0 \in [21,7, 23,8]$  мкм. Дальнейшее увеличение начального радиуса ведет к неограниченному росту искажений и разрушению пузырька. При этом происходит резкий рост скорости его движения. Пример такого поведения пузырька приведен на рис.3 для  $R_0=24,2$  мкм, где изображены зависимости от времени искажений  $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ , скорости движения пузырька  $\dot{z}_c$  и координаты его центра  $z_c$ .

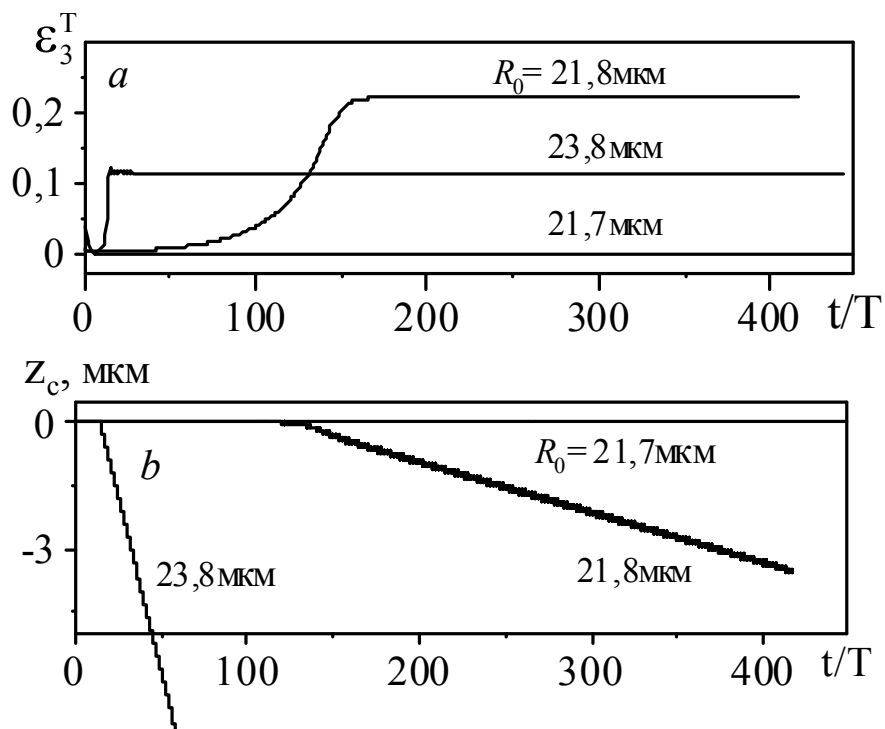


Рис.2. Зависимости от времени величин  $\varepsilon_3^T$  и  $z_c$  для  $R_0=21,7, 21,8, 23,8$  мкм

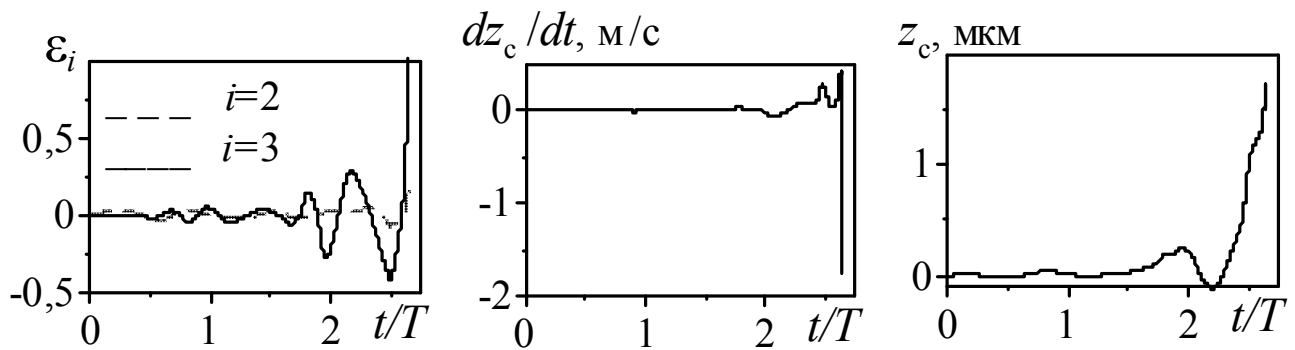


Рис.3. Зависимости от времени величин  $\varepsilon_i, i = 2, 3, dz_c/dt$  и  $z_c$  для  $R_0=24,2$  мкм

Для  $\Delta p = 0,05$  МПа,  $R_0=29,15$  мкм можно наблюдать так называемый ‘танцующий’ пузырек. Такое поведение пузырька приведено

на рис.4, где изображены зависимости от времени наибольшего на периоде  $T$  искажения  $\varepsilon_3^T$  и координаты центра пузырька  $z_c$ . Видно, что искажения совершают апериодические колебания с ограниченной амплитудой, которые порождают апериодические колебания центра пузырька в окрестности пучности волны давления жидкости.

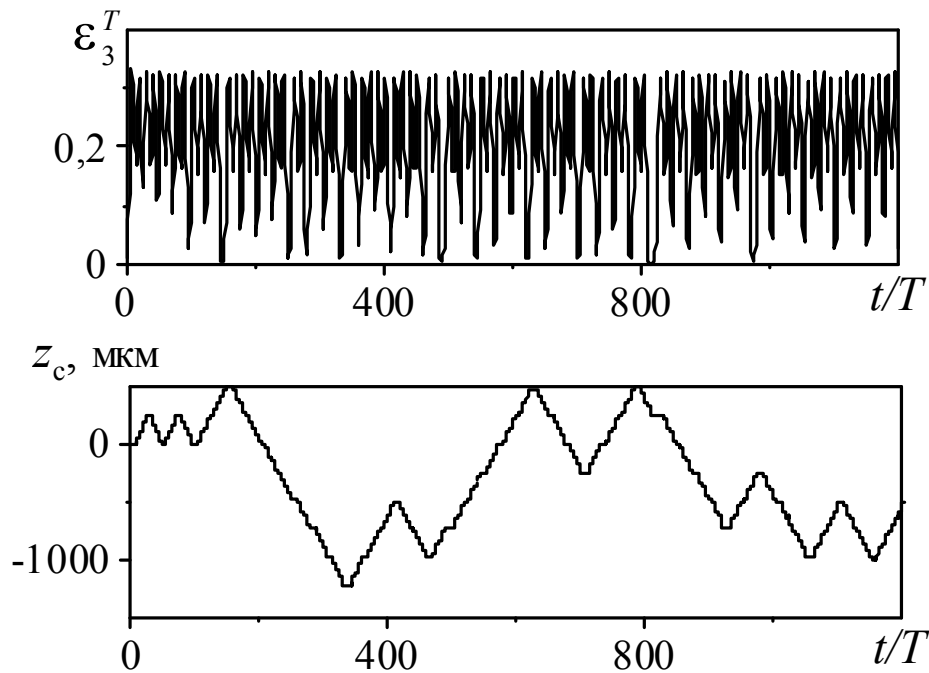


Рис.4. Зависимости от времени величин  $\varepsilon_3^T$ ,  $z_c$ , для  $\Delta p = 0,05$  МПа,  $R_0 = 29,15$  мкм

При  $\Delta p > 0,075$  МПа неустойчивость сферической формы развивается по второй гармонике [9] и характер движения пузырька изменяется. На рис.5 для  $\Delta p = 0,09$  МПа изображены зависимости от времени величин  $\varepsilon_2^T$  и  $z_c$  для различных значений  $R_0$ . Видно, что при  $R_0 = 10,8$  мкм искажение  $\varepsilon_2$  совершает периодические колебания с периодом, равным  $2T$ , при  $R_0 = 10$  мкм - колебания с периодом  $4T$  и при  $R_0 = 10,25$  мкм – апериодические колебания. Немалые искажения формы вызывают перемещение пузырька в пространстве на небольшом временном интервале. После чего скорость перемещения уменьшается до нуля и пузырек останавливается на некотором расстоянии от пучности волны внешнего воздействия. Установлено, что колебания

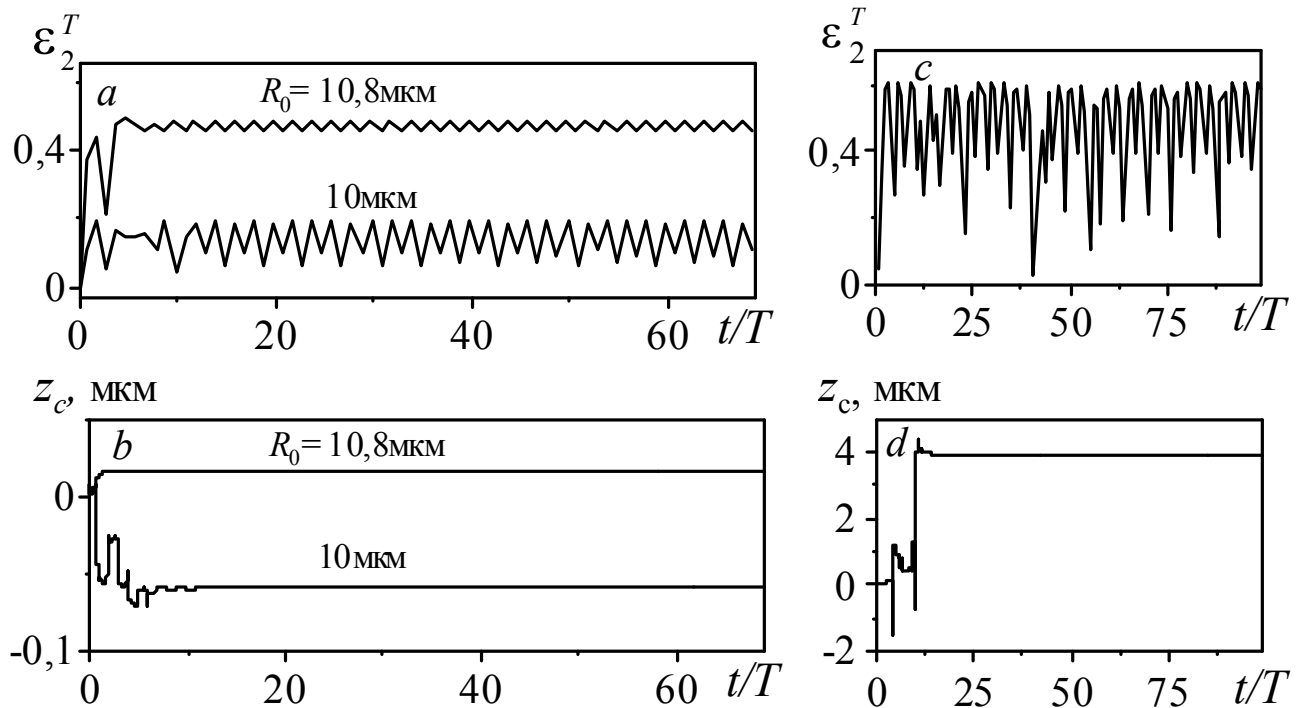


Рис.5. Зависимости от времени величин  $\varepsilon_2^T$ ,  $z_c$  для  $\Delta p = 0,09$  МПа и  $R_0 = 10, 10,8$  мкм ( $a, b$ ),  $10,25$  мкм ( $c, d$ )

формы пузырька с ограниченной амплитудой искажения наблюдаются при  $R_0 \leq 10,1$  мкм и в интервале  $R_0 \in [10,25, 10,8]$  мкм. При других значениях начального сферического радиуса происходит разрушение пузырька, аналогичное приведенному на рис.3.

### Заключение

Рассмотрена динамика пузырька воздуха в воде при периодическом изменении давления жидкости. Используется математическая модель, учитывающая большие радиальные колебания, немалые искажения формы и пространственное перемещение пузырька. Приблизительно учтены вязкость и сжимаемость жидкости. Показаны различные режимы движения пузырька, возникающие в зависимости от амплитуды давления и его начального радиуса.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Strasber M., Benjamin T.B.* Excitation of oscillations in the shape of pulsating bubbles – experimental work. //J. Acoust. Soc. Am.. 1958. V.30. P.697.
2. *Feng Z.C., Leal L.G.* Translation instability of a bubble undergoing shape oscillations // Phys. Fluids. 1995. V.7. №.6. P.1325-1336.
3. *Doinikov A.A.* Translational motion of a bubble undergoing shape oscillations // J. Fluid. Mech.. 2004. V.501. P.1-24.
4. *Show S.J.* Translation and oscillation of a bubble under axisymmetric deformation // Physics of fluids. 2006. 18. 072104. 15p.
5. *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. - М.: гос. изд-во ф.-м. лит-ры. 1959. 700с.
6. *Аганин А.А., Косолапова Л.А., Малахов В.Г.* Нелинейные радиальные колебания и пространственные перемещения несферического газового пузырька в жидкости // Мат. моделирование, 2011. (в печати).
7. *Нигматуллин Р.И., Ахатов И.Ш., Вахитова Н.К.* О сжимаемости жидкости в динамике газового пузырька //Докл. РАН. 1996. Т.348. №6. С.768-771.
8. *Косолапова Л.А., Малахов В.Г.* Моделирование движения несферического газового пузырька в жидкости // Образование и наука – производству. Сб. тр. Междун. научно-техн. и образ. конф-ии (28-31 марта 2010 года). Набережные Челны. 2010. Ч.1. Кн.1. С.109-113.
9. *Аганин А.А., Ильгамов М.А., Косолапова Л.А., Малахов В.Г.* Нелинейные несферические колебания пузырька газа при периодическом изменении давления окружающей жидкости // Теплофизика и аэромеханика. 2008. Т.15. №3. С.521-533.
10. *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи.- М.:Мир, 1990. 512с.