

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА СКОРОСТИ ЖИДКОСТИ С ГАЗОВЫМИ ПУЗЫРЬКАМИ**

А.А. Аганин, А.И. Давлетшин  
aganin@kfti.knc.ru, davanas@mail.ru

Выполнено сравнение экономичности двух методов расчета потенциала скорости жидкости с газовыми пузырьками: метода разложения по сферическим функциям и метода отражений. Показано, что на относительно больших расстояниях между пузырьками экономичность обоих методов примерно одинакова при любом количестве пузырьков. С уменьшением расстояния более экономичным оказывается метод разложения по сферическим функциям, за исключением случая двух пузырьков.

### **Введение**

При изучении взаимодействия пузырьков в жидкости аналитико-численными методами возникает подзадача определения потенциала скорости жидкости. Обычно потенциал ищется в предположении, что пузырьки расположены относительно далеко друг от друга [1-5]. В результате этого задача определения потенциала значительно упрощается. Исключение составляет лишь самый простой случай взаимодействия двух сферических пузырьков. Для этого случая имеется точное решение [6, 7], полученное еще в конце 19 века Хиксом методом отражений [8]. Решение Хикса представляется в виде относительно простых быстро сходящихся рядов. Оно справедливо при любых расстояниях между пузырьками, в том числе и при их касании (в последнем случае решение Хикса справедливо во всей области жидкости за исключением точки касания). Однако в жидкостях обычно имеется не два, а множество пузырьков. При изучении взаимодействия более двух пузырьков потенциал, как правило [4, 5], определяют с третьим или четвертым порядком точности относительно малого параметра, обратно пропорционального расстоянию между центрами пузырьков. Фактически это означает, что полученное решение справедливо лишь

тогда, когда расстояние между поверхностями взаимодействующих пузырьков будет не меньше 10 и 5 их характерных диаметров, соответственно.

Сравнительно недавно в [9] была предложена математическая модель взаимодействия произвольного количества произвольно близко расположенных в одну линию слабонесферических пузырьков. Она основана на представлении потенциала скорости жидкости в виде ряда по сферическим функциям. Нетрудно заметить, что сходимость рядов по сферическим функциям по мере сближения пузырьков ухудшается. (Некоторые исследователи даже ошибочно считают, что по мере сближения пузырьков ряды по сферическим функциям расходятся.) Поэтому реальная область применимости модели [9] по минимальному расстоянию между взаимодействующими пузырьками ограничена возможностями современных компьютеров и составляет порядка их характерного радиуса. В связи с этим возникает потребность в проверке работоспособности метода отражений при определении потенциала скорости жидкости в случае взаимодействия более двух пузырьков.

Настоящая работа посвящена сравнению эффективности двух методов определения потенциала скорости в задачах взаимодействия пузырьков в жидкости: метода отражений Хикса [6, 7] и метода разложения по сферическим функциям [9]. Для этого метод отражений обобщается на случай произвольного количества пузырьков. При этом рассматривается взаимодействие сферических пузырьков, центры которых расположены на одной прямой. Выражения, полученные двумя методами, тестируются на решении задачи о потенциале скорости жидкости при наличии в ней двух сфер одинакового радиуса, движущихся навстречу друг к другу с одинаковыми скоростями [6].

### **Математическая модель**

В жидкости имеется  $K$  пузырьков с центрами на оси  $z$ . Потенциал скорости жидкости  $\Phi$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

и граничному условию на поверхности каждого пузырька

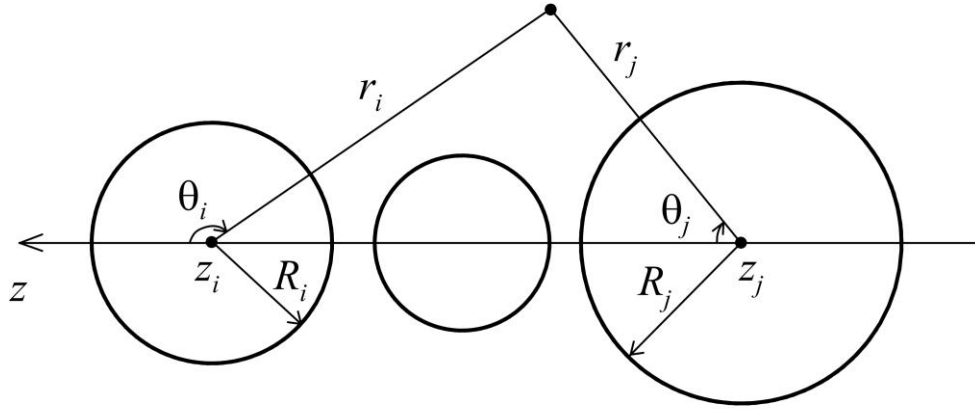


Рис. 1. Системы отсчета, применяемые при определении потенциала методом разложения по сферическим функциям.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r_i} = \dot{R}_i + \dot{z}_i \cos \theta_i, \quad (1)$$

где  $\dot{R}_i$ ,  $\dot{z}_i$  – скорости изменения радиуса  $i$ -го пузырька и координаты его центра на оси  $z$ ,  $r_i$ ,  $\theta_i$  – радиальная и широтная координаты сферической системы отсчета с началом в центре  $i$ -го пузырька (рис. 1),  $i = 1, 2, \dots, K$ .

В методе разложения по сферическим функциям [9] потенциал скорости жидкости  $\Phi$  в сферической системе координат  $i$ -го пузырька представляется в следующем виде

$$\Phi = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \left[ B_{\gamma i}(t) r_i^{-\gamma-1} + \bar{B}_{\gamma i}(t) r_i^{\gamma} \right] P_{\gamma}(\cos \theta_i), \quad (2)$$

где  $t$  – время,  $P_{\gamma}$  – полином Лежандра степени  $\gamma$ ,

$$\bar{B}_{\gamma i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^K \sum_{\varsigma=0}^{\infty} \frac{C_{\varsigma \gamma} B_{\varsigma j}}{s_{ij} d_{ij}^{\varsigma+\gamma+1}},$$

$C_{\varsigma \gamma} = (-1)^{\gamma} (\gamma + \varsigma)! / (\gamma! \varsigma!)$ ,  $d_{ij} = z_i - z_j$ ,  $z_i$  – координата центра  $i$ -го пузырька,  $s_{ij} = 1$  при  $z_i > z_j$ ,  $s_{ij} = -1$  при  $z_i < z_j$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, K$  ( $i \neq j$ ).

Подстановкой выражения потенциала (2) в граничные условия (1) получается система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов потенциала  $B_{\gamma i}$

$$(\gamma + 1)R_i^{-\gamma-2}B_{\gamma i} - \gamma R_i^{\gamma-1}\bar{B}_{\gamma i} = -\delta_\gamma^0 \dot{R}_i - \delta_\gamma^1 \dot{z}_i, \gamma = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

где  $\delta_\gamma^k$  – символ Кронекера,  $R_i$  – радиус  $i$ -го пузырька.

В силу того, что для любой пары пузырьков  $(R_i + R_j)/d_{ij} < 1$ , решение системы (3) довольно легко находится методом последовательных приближений, который приводит к следующим рекуррентным соотношениям

$$B_{0i}^{(n)} = -R_i^2 \dot{R}_i, n \geq 0;$$

$$B_{1i}^{(0)} = -\frac{R_i^3 \dot{z}_i}{2}, B_{1i}^{(n)} = -\frac{R_i^3}{2} \left( \dot{z}_i - \bar{B}_{1i}^{(n)} \right), n \geq 1;$$

$$B_{ki}^{(n)} = 0, k \geq 2, 0 \leq n \leq k; B_{ki}^{(n)} = \frac{kR_i^{2k+1}}{k+1} \bar{B}_{ki}^{(n)}, k \geq 2, n \geq k+1; \quad (4)$$

$$\bar{B}_{vi}^{(n)} = 0, v \geq 0, 0 \leq n \leq v; \bar{B}_{vi}^{(n)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^K \sum_{\gamma=0}^{n-v-1} \frac{C_{\gamma v} B_{\gamma j}^{(n-1)}}{s_{ij} d_{ij}^{\gamma+v+1}}, v \geq 0, n \geq v+1.$$

При использовании метода отражений потенциал ищется в виде

$$\Phi = \sum_{i=1}^K \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_i^{(n)}. \quad (5)$$

Нулевое приближение потенциала определяется из решения задачи для одиночного пузырька и имеет следующий вид

$$\Phi_i^{(0)} = -\frac{R_i^2 \dot{R}_i}{r_i} - \frac{R_i^3 \dot{z}_i P_1(\cos \theta_i)}{2r_i^2}. \quad (6)$$

Последующие приближения определяются с помощью теоремы Вейса для сферы [10] в следующем виде

$$\Phi_i^{(n)} = \sum_{\substack{j_n=1 \\ j_n \neq i}}^K \dots \sum_{\substack{j_1=1 \\ j_1 \neq j_2}}^K \left( \int_0^{\frac{R_{j_2}^2}{d_{j_2 j_1}}} \frac{A_0^{(n)}(t) P_1(\cos \theta_{i0}^{(n)})}{r_{i0}^{(n)2}} dc + \frac{A_1^{(n)}(t) P_1(\cos \theta_{i1}^{(n)})}{r_{i1}^{(n)2}} \right). \quad (7)$$

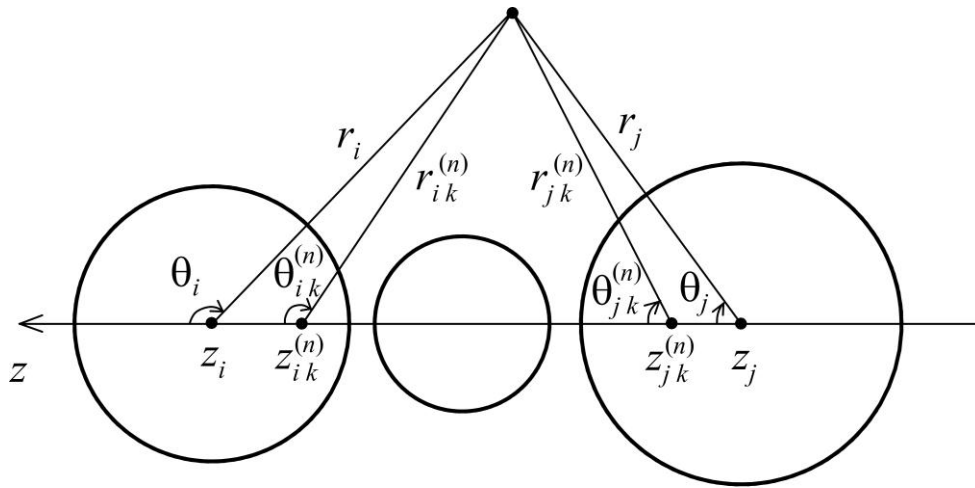


Рис. 2. Системы отсчета, применяемые при определении потенциала методом отражений.

Здесь

$$\frac{P_1(\cos \theta_{ik}^{(n)})}{r_{ik}^{(n)2}} = \sum_{\zeta=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\zeta+1} \zeta c_k^{(n)\zeta-1} P_{\zeta}(\cos \theta_i)}{r_i^{\zeta+1}},$$

$r_{ik}^{(n)}$ ,  $\theta_{ik}^{(n)}$  – радиальная и широтная координаты сферической системы с отсчетом  $r_{ik}^{(n)}$  от точки  $z_{ik}^{(n)}$  (рис. 2),  $z_{ik}^{(n)} = z_i - c_k^{(n)}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $k = 0, 1$ . Параметры с индексом  $k = 0$  соответствуют радиальным пульсациям пузырьков, а с индексом  $k = 1$  – их пространственным перемещениям.

Коэффициенты  $A_k^{(n)}$  находятся из следующих рекуррентных соотношений

$$A_0^{(0)} = -R_{j_1}^2 \dot{R}_{j_1}, \quad A_1^{(0)} = -\frac{R_{j_1}^3 \dot{z}_{j_1}}{2},$$

$$A_0^{(1)} = -\frac{A_0^{(0)} c}{s_{j_2 j_1} R_{j_2}}, \quad A_1^{(1)} = -\frac{A_1^{(0)} c_1^{(1)3}}{s_{j_2 j_1} R_{j_2}^3}, \quad A_k^{(m)} = -\frac{A_k^{(m-1)} c_k^{(m)3}}{s_{j_{m+1} j_m} R_{j_{m+1}}^3}, \quad (8)$$

в которые входят цепные дроби  $c_k^{(m)}$ , определяемые следующим образом

$$c_0^{(1)} = c, c_1^{(1)} = \frac{R_{j_2}^2}{d_{j_2 j_1}}, c_k^{(m)} = \frac{R_{j_{m+1}}^2}{d_{j_{m+1} j_m} + c_k^{(m-1)}}, \quad (9)$$

где  $k = 0, 1, m = 2, 3, \dots, n, j_{n+1} = i$ .

Коэффициенты, полученные двумя методами, можно связать следующими соотношениями

$$B_{\gamma i} = -\delta_{\gamma}^0 R_i^2 \dot{R}_i - \frac{\delta_{\gamma}^1 R_i^3 \dot{z}_i}{2} +$$

$$+ (-1)^{\gamma+1} \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{j_n=1 \\ j_n \neq i}}^K \sum_{\substack{j_{n-1}=1 \\ j_{n-1} \neq j_n}}^K \dots \sum_{\substack{j_1=1 \\ j_1 \neq j_2}}^K \left( \int_0^{R_{j_2}^2/d_{j_2 j_1}} A_0^{(n)} c_0^{(n)\gamma-1} dc + A_1^{(n)} c_1^{(n)\gamma-1} \right),$$

$$\bar{B}_{\gamma i} = (-1)^{\gamma+1} \sum_{\substack{j_{n+1}=1 \\ j_{n+1} \neq i}}^K \left[ \frac{R_{j_{n+1}}^2 \dot{R}_{j_{n+1}}}{s_{i j_{n+1}} d_{i j_{n+1}}^{\gamma+1}} + \frac{(\gamma+1) R_{j_{n+1}}^3 \dot{z}_{j_{n+1}}}{2 s_{i j_{n+1}} d_{i j_{n+1}}^{\gamma+2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{(\gamma+1)}{R_i^{2\gamma+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{j_n=1 \\ j_n \neq j_{n+1}}}^K \dots \sum_{\substack{j_1=1 \\ j_1 \neq j_2}}^K \left( \int_0^{R_{j_2}^2/d_{j_2 j_1}} A_0^{(n+1)} c_0^{(n+1)\gamma-1} dc + A_1^{(n+1)} c_1^{(n+1)\gamma-1} \right) \right].$$

Для сравнения экономичности двух методов в настоящей работе используется сила гидродинамического взаимодействия между пузырьками (вторичная сила Бьеркнеса). Сила гидродинамического взаимодействия  $F_{jk}$  между  $j$ -м и  $k$ -м пузырьками находится по формуле

$$F_{jk} = \frac{\partial E}{\partial |d_{jk}|}.$$

Здесь  $E$  – кинетическая энергия идеальной несжимаемой жидкости, которая определяется через интегралы по поверхности пузырьков следующим образом [11]

$$E = -\frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^K \iint_{S_i} \left( \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial r_i} \right)_{r_i=R_i} ds_i = -\pi \rho \sum_{i=1}^K R_i^2 \int_{-1}^1 \left( \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial r_i} \right)_{r_i=R_i} d \cos \theta_i, \quad (10)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости.

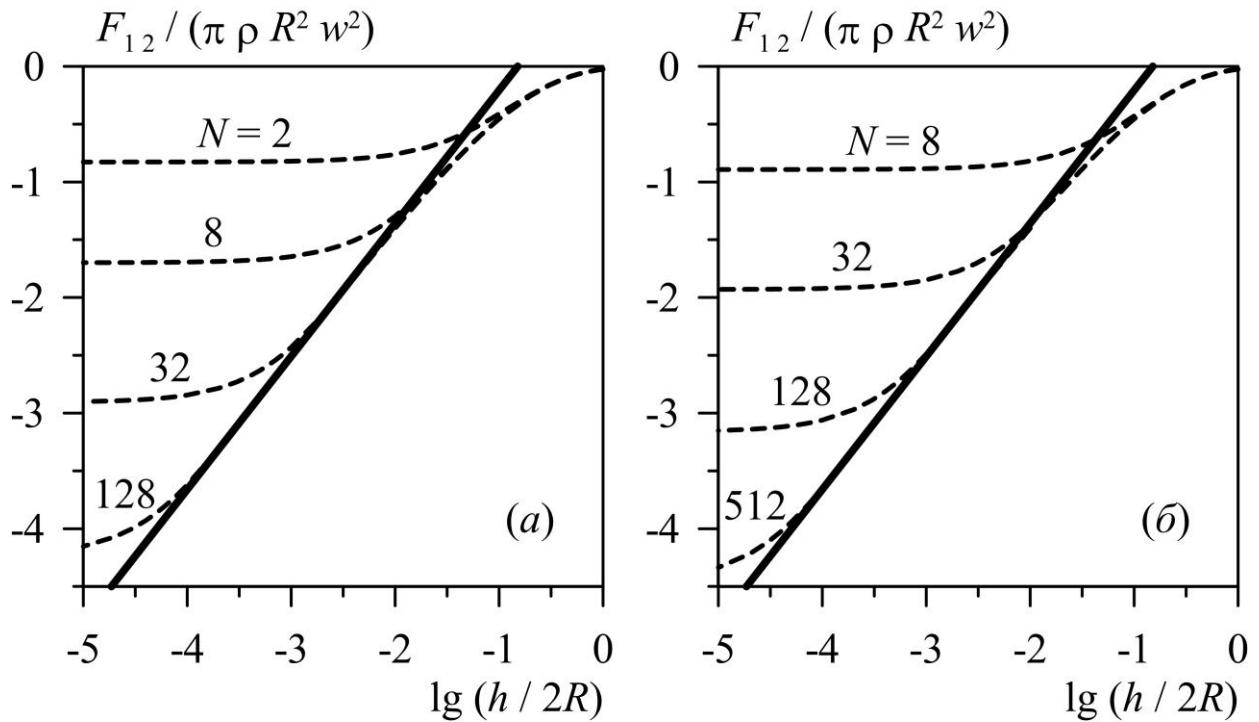


Рис. 3. Зависимости безразмерной силы гидродинамического взаимодействия между двумя пузырьками от логарифма безразмерного расстояния между ними, полученные методом отражений (*a* – штриховые линии), методом разложения по сферическим функциям (*б* – штриховые линии) и по асимптотике (*a*, *б* – жирные сплошные линии).

Подставляя в равенство (10) выражения для  $\Phi$  и  $\partial\Phi/\partial r_i$  соответственно из (1) и (2) и учитывая ортогональность полиномов Лежандра, для кинетической энергии жидкости можно получить следующее соотношение

$$E = -2\pi\rho \sum_{i=1}^K \left( B_{0i} R_i \dot{R}_i + \frac{B_{1i} \dot{z}_i}{3} + \bar{B}_{0i} R_i^2 \dot{R}_i + \frac{\bar{B}_{1i} R_i^3 \dot{z}_i}{3} \right).$$

### Верификация

Для тестирования правильности полученных выше выражений для двух методов определения потенциала скорости используется решение задачи о потенциале скорости несжимаемой жидкости при наличии в ней двух одинаковых сфер радиуса  $R$ , движущихся навстречу друг к другу с одинаковыми скоростями  $w$ .

При малых расстояниях между поверхностями сфер для силы

гидродинамического взаимодействия можно из соотношений работы [6] получить следующее асимптотическое выражение

$$F_{12} = \left[ \frac{1}{2} \ln \left( \frac{d_{12}}{R} - 2 \right) + \frac{2}{3} - \gamma - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n(n+1)}{(n+0,5)^3} - \frac{1}{n} - \frac{1}{4n^3} \right) \right] \pi \rho R^2 w^2, \quad (11)$$

где  $\gamma$  – постоянная Эйлера.

На рис. 3 представлена зависимость безразмерной силы от логарифма безразмерного параметра  $h/(2R)$  – расстояния между пузырьками в их диаметрах, где  $h = d_{12} - 2R$  – расстояние между поверхностями пузырьков. Штриховыми линиями представлены результаты расчетов, полученные методом отражений (а) и методом разложения по сферическим функциям (б) при разном количестве итераций  $N$ , сделанных по формулам (5)-(9) и (2)-(4) соответственно. Жирной сплошной линией приведено асимптотическое решение, полученное по формуле (11).

Из рис. 3 видно, что по мере увеличения числа итераций  $N$ , решения, полученные обоими методами, сходятся к асимптотике. Отсюда следует, что представленные выше выражения являются правильными и что для изучения близкого взаимодействия пузырьков можно использовать как метод отражений, так и метод разложения по сферическим функциям.

### **Сравнение экономичности методов отражений и разложения по сферическим функциям**

Для сравнения эффективности рассматриваемых методов нахождения потенциала используется задача о движении идеальной несжимаемой жидкости при наличии в ней двух или более одинаковых сферических пузырьков радиуса  $R$ , центры которых находятся на одной прямой (расстояние между соседними пузырьками одинаково). Предполагается, что все пузырьки расширяются с одинаковой скоростью  $u$ . Все пузырьки, кроме центрального, в случае нечетного числа пузырьков двигаются к центру системы (точке, равноотстоящей от крайних пузырьков) с одинаковой (по модулю) скоростью  $w$ . В случае нечетного количества пузырьков центральный пузырек считается неподвижным.



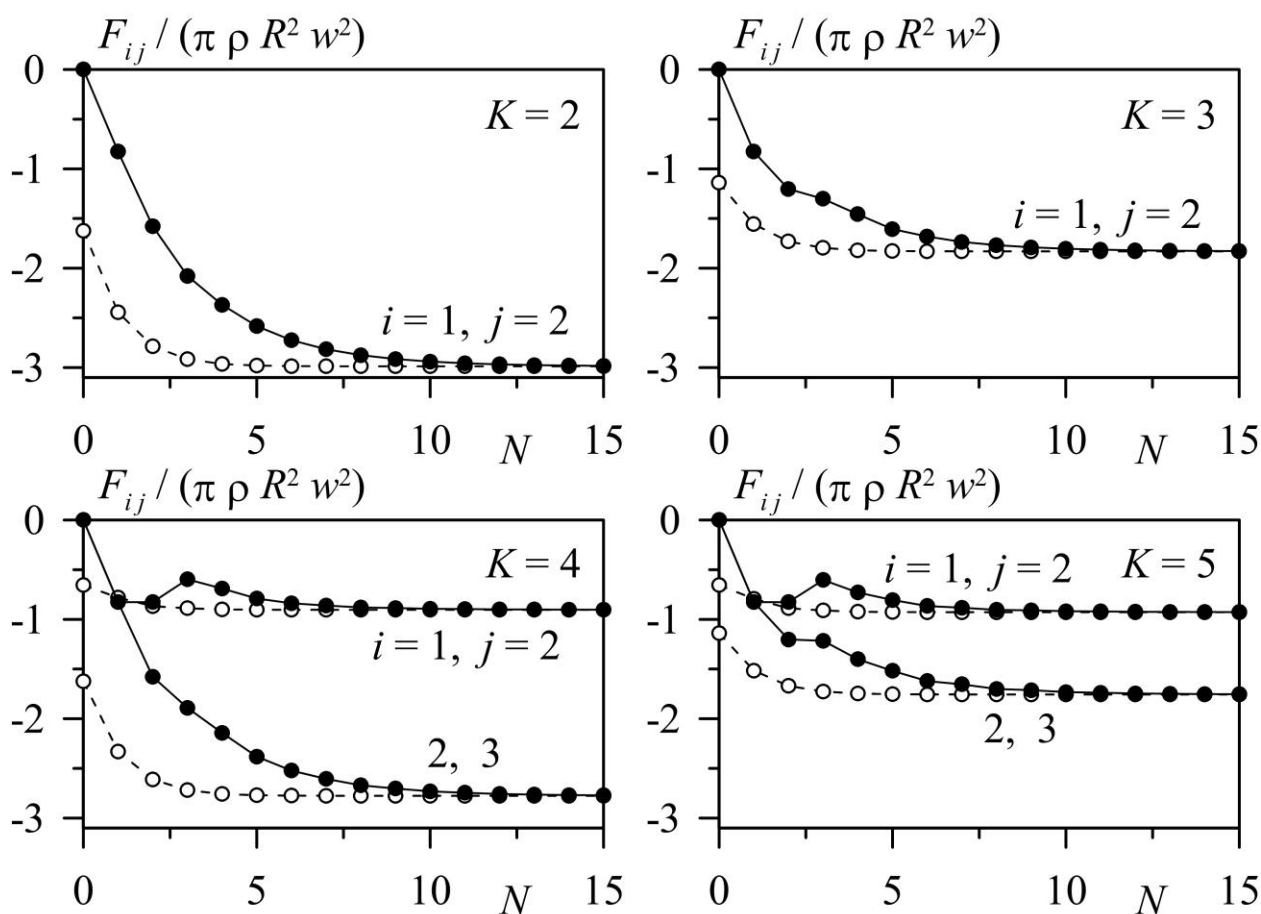


Рис. 4. Зависимости безразмерной силы гидродинамического взаимодействия между соседними пузырьками от числа итераций  $N$ , рассчитанные методом разложения по сферическим функциям (закрашенные кружочки, соединенные сплошными линиями) и методом отражений (незакрашенные кружочки, соединенные штриховыми линиями) при разном количестве пузырьков  $K$ .

На рис. 4 приводятся зависимости безразмерной силы гидродинамического взаимодействия между соседними пузырьками от номера итерации  $N$  при наличии в жидкости от двух до пяти пузырьков. Расчеты выполнены при  $h / (2R) = 0,1$  и  $u = w$ , где  $h$  – расстояние между поверхностями соседних пузырьков. Закрашенные кружочки, соединенные для удобства восприятия сплошной линией, получены с использованием метода разложения по сферическим функциям (2)-(4), а незакрашенные кружочки, соединенные штриховой линией, – методом отражений (5)-(9).

Из рис. 4 следует, что по мере увеличения числа итераций  $N$  при наличии в жидкости как двух, так и более двух пузырьков оба метода дают сходимость к одному и тому же результату. Вместе с тем,

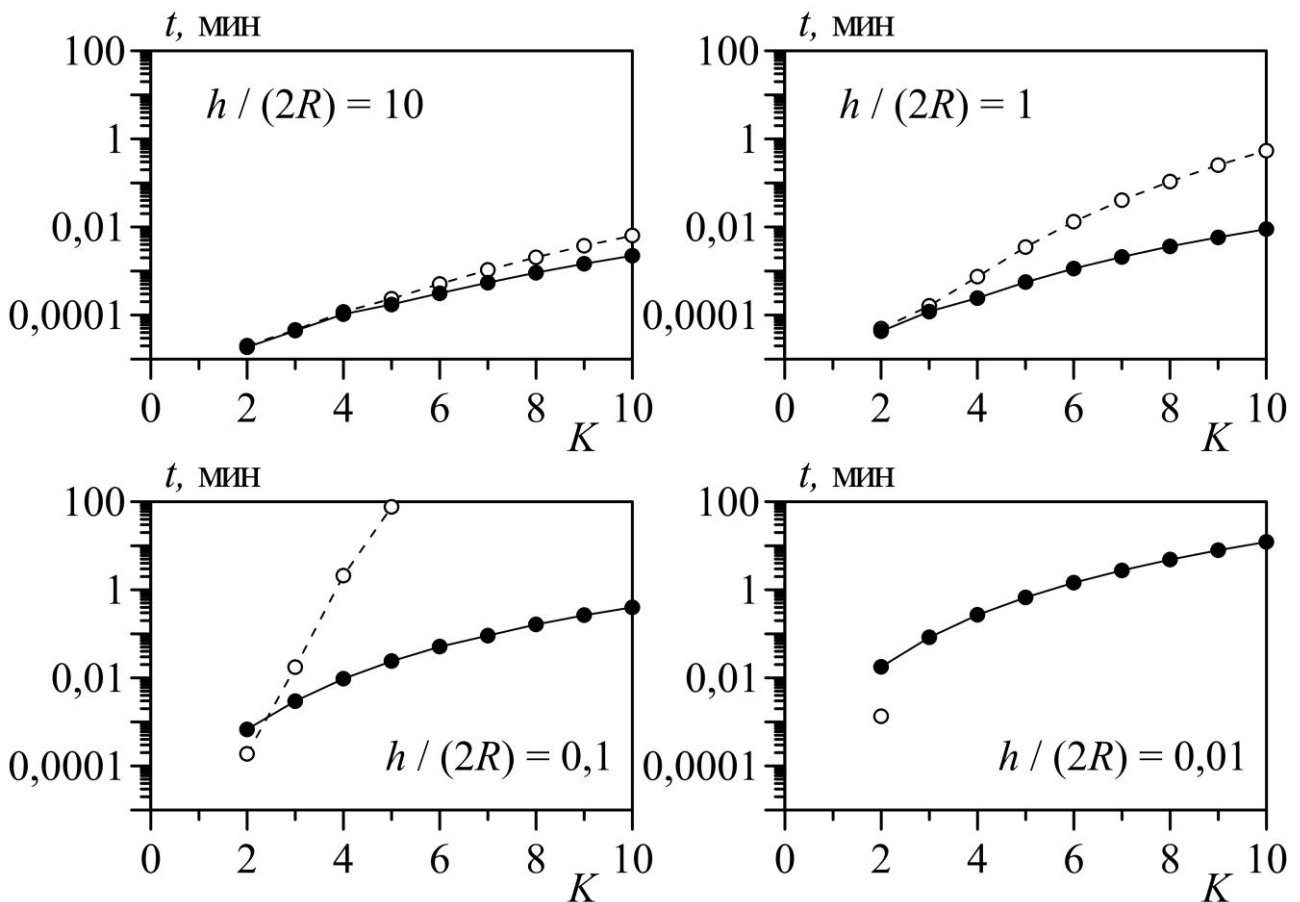


Рис. 5. Зависимости компьютерного времени, затрачиваемого на вычисление силы гидродинамического взаимодействия между крайними пузырьками с заданной точностью, от количества взаимодействующих пузырьков. Закрашенные кружочки, соединенные сплошными линиями, соответствуют методу разложения по сферическим функциям, незакрашенные кружочки, соединенные штриховыми линиями, – методу отражений.

скорость сходимости по числу итераций неодинакова: намного быстрее сходятся приближения, полученные методом отражений. Так, в случае двух пузырьков, проделав 6 итераций по формулам (5)-(9), можно найти приближение, имеющее примерно такую же погрешность, что и приближение, полученное по формулам (2)-(4) за 15 итераций.

При сравнении эффективности методов нужно сравнивать затраты компьютерного времени, необходимые для получения решения с заданной точностью. На рис. 5, 6 представлены графики потребностей компьютерного времени для расчета решения задачи с четырьмя-пятью верными значащими цифрами в зависимости от

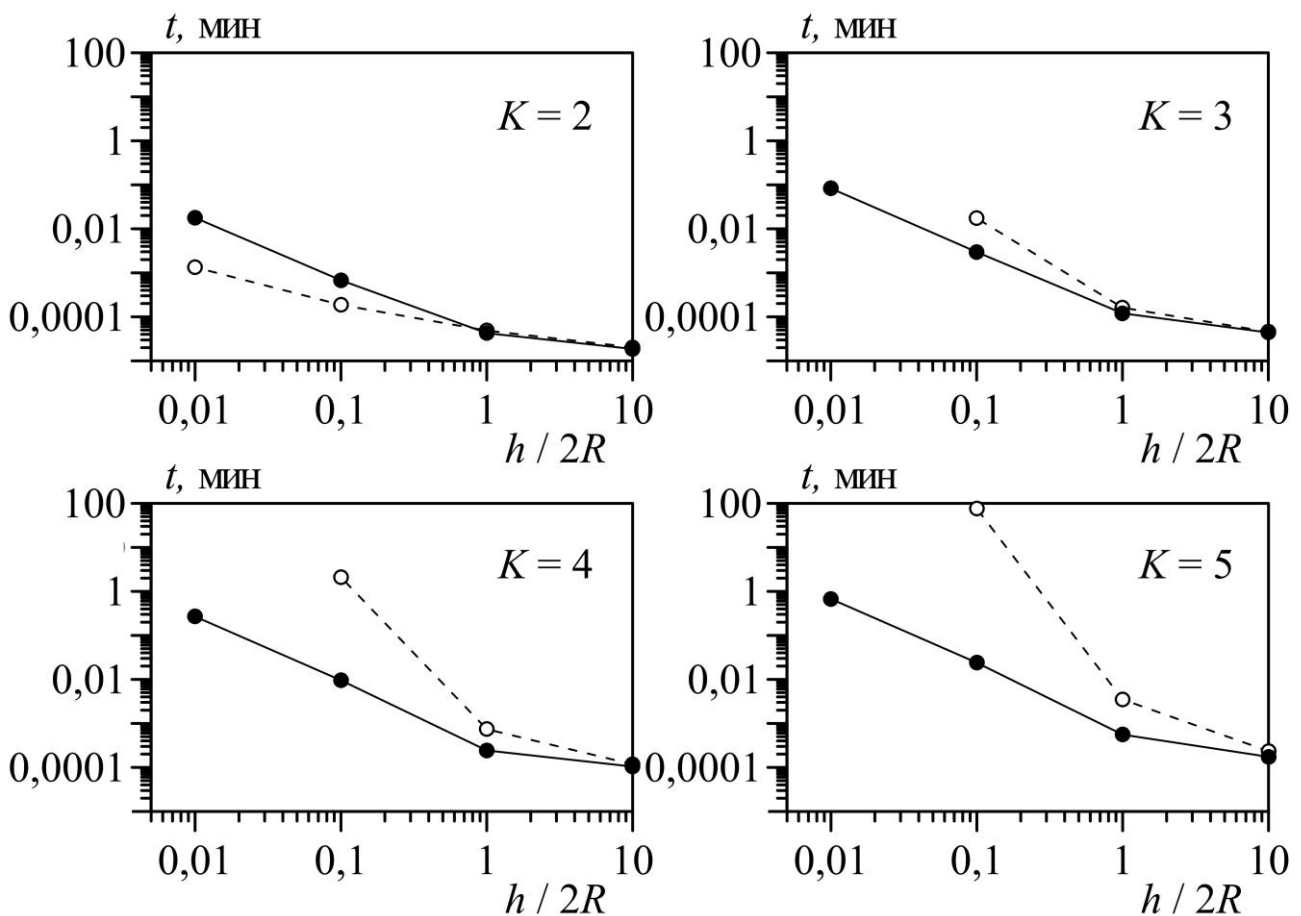


Рис. 6. Зависимости компьютерного времени, затрачиваемого на вычисление силы гидродинамического взаимодействия между крайними пузырьками с заданной точностью, от безразмерного расстояния между пузырьками. Закрашенные кружочки, соединенные сплошными линиями, соответствуют методу разложения по сферическим функциям, незакрашенные кружочки, соединенные штриховыми линиями, – методу отражений.

количества пузырьков (рис. 5) и безразмерного расстояния между пузырьками (рис. 6). Соответствие между кривыми и методами расчета то же, что и на предыдущем рисунке. Приведенные результаты расчетов получены при  $K = 2, 3, \dots, 10$ ,  $h / (2R) = \{10; 1; 0,1; 0,01\}$ .

Из рис. 5, 6 видно, что по мере уменьшения расстояния между пузырьками эффективность обоих методов уменьшается. При этом более эффективным в случае двух пузырьков оказывается метод отражений, а когда пузырьков больше двух – метод разложения по сферическим функциям. С уменьшением расстояния между пузырьками преимущество одного метода (метода отражений в

случае двух пузырьков и метода разложения по сферическим функциям в случае более двух пузырьков) над другим все более возрастает.

### **Заключение**

Проведено сравнение экономичности двух методов расчета потенциала скорости жидкости при наличии в ней нескольких пузырьков (пузырьки расположены на одной прямой): метода отражений Хикса [6, 7] и метода разложения по сферическим функциям [9]. Метод отражений обобщен на случай произвольного количества пузырьков.

Выполнено тестирование полученных в работе формул для определения потенциала скорости жидкости. Для тестирования использовано асимптотическое выражение силы гидродинамического взаимодействия между двумя близко расположенными сферами равного радиуса, движущимися навстречу друг к другу с одинаковыми скоростями [6]. Получено хорошее согласование результатов обоих методов с асимптотикой.

Проведены расчеты силы гидродинамического взаимодействия между двумя и более сферическими пузырьками одинакового размера, находящимися в жидкости на одной прямой и совершающими как радиальные пульсации, так и пространственные перемещения. Показано, что по мере увеличения числа итераций приближения методов отражений и разложения по сферическим функциям сходятся к одному и тому же результату.

Выполнено сравнение потребностей компьютерного времени для расчета силы гидродинамического взаимодействия. Показано, что на относительно больших расстояниях между пузырьками экономичность обоих методов примерно одинакова при любом количестве пузырьков. С уменьшением расстояния более экономичным оказывается метод разложения по сферическим функциям, за исключением случая двух пузырьков.

Работа выполнена в рамках программы РАН и при поддержке РФФИ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Кузнецов Г.Н., Шукин И.Е.* Взаимодействие пульсирующих пузырьков в вязкой жидкости // Акуст. журнал. 1972. Т. 18. С. 565-570.
2. *Doinikov A.A.* Translational motion of two interacting bubbles in a strong acoustic field // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. №2. 02630.
3. *Harkin A., Kaper T.J., Nadim A.* Pulsation and translation of two gas bubbles // J. Fluid Mech. 2001. V. 445. P. 377-411.
4. *Konovalova S.I., Akhatov I.Sh.* Structure formation in acoustic cavitation // Mult. Science and Techn. 2005. V. 17. P. 343-371.
5. *Ilinskii Y.A., Hamilton M.F., Zabolotskaya E.A.* Bubble interaction dynamics in Lagrangian and Hamiltonian mechanics // JASA. 2007. V. 121. № 2. P. 786-795.
6. *Воинов О.В.* О движении двух сфер в идеальной жидкости // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 4. С. 659-667.
7. *Воинов О.В.* Движение идеальной жидкости около двух сфер с радиальными скоростями на поверхности // Вестник Московского университета. 1969. №5. С. 83-88.
8. *Hicks W.M.* On the motion of two spheres in a fluid // Philosoph. Trans. Roy. Soc. of London. 1880. V. 171. P. 455-492.
9. *Давлетшин А.И.* Математическое моделирование взаимодействия газовых пузырьков в жидкости в акустическом поле // Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Казань. 2010.
10. *Милн-Томсон Л.М.* Теоретическая гидродинамика. Москва: Мир, 1964. 660 с.
11. *Ламб Г.* Гидродинамика. ОГИЗ, 1947. 928с.