Глава 6

ПРИНЦИПЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

Специальной теорией информации является теория, основанная на законе композиции мер информации с $\omega \neq 0$ и имеющая геометрическое представление. Изучаются два типа геометрий двумерных глобальных анизотропных метрических пространств Минковского мер информации с $\omega > 0$ и $\omega < 0$, соответствующие **Типам I** и **III** общей классификации мер информации, и вводятся обобщенные гиперболические и тригонометрические меры. Эта глава излагается без каких-либо претензий на полноту. Предлагаются только те вопросы, которые играют центральную роль в геометрическом представлении теории информации. Путь автора в рассматриваемой проблеме связан с аналогичным подходом в теории, обобщающей специальную теорию относительности [24, 132, 133] на основе закона композиции скоростей, который по форме совпадает с законом композиции энтропий.

Двумерным метрическим пространством Минковского называется пространство, в котором радиус-вектор $\vec{\mathbf{R}} = \{\eta, \xi\}$ имеет длину [40]

$$\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\| = F(\eta, \xi). \tag{6.0.1}$$

Здесь метрическая функция F задает метрику в плоском и глобально анизотропном пространстве и удовлетворяет следующим условиям:

1. $F(a\eta, a\xi) = aF(\eta, \xi)$, $a > 0$,

$$F(-\eta, -\xi) = F(\eta, \xi); \tag{6.02}$$

$$2.\ F(\eta,\xi) > 0;$$

$$3.\ F(\eta_1+\eta_2,\xi_1+\xi_2) \le F(\eta_1,\xi_1)+F(\eta_2,\xi_2). \qquad (6.0.2)$$

Плоское или искривленное локально анизотропное пространство называется в дифференциальной геометрии пространством Финслера и характеризуется метрической функцией

$$d\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\| = F(x, dx). \qquad (6.0.3)$$

В этой главе исследуются свойства новых энтропий и информаций различия в псевдоевклидовой и евклидовой геометриях мер информации. В рассматриваемой теории пространство Минковского со свойствами (6.0.1) и (6.0.2) формируется на мерах информаций, где координаты η и ξ есть функции мер. Начало исследований было положено в монографии [21] и в статьях автора [22 – 24].

6.1. Законы композиции функций энтропии

Выпишем соотношения, вытекающие из закона композиции энтропий

$$H = \frac{H_1 + H_2 + \varepsilon H_1 H_2}{1+\omega H_1 H_2}. \qquad (6.1.1)$$

Для этого преобразуем равенство (5.2.15) следующим образом

$$\frac{H}{\sqrt{1+\varepsilon H - \omega H^2}} = \frac{H_1 + H_2 + \varepsilon H_1 H_2}{\sqrt{1+\varepsilon H_1 - \omega H_1^2}\sqrt{1+\varepsilon H_2 - \omega H_2^2}} =$$

$$= \frac{H_1}{\sqrt{1+\varepsilon H_1 - \omega H_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H_2 - \omega H_2^2}} +$$

$$+ \frac{H_2}{\sqrt{1+\varepsilon H_2 - \omega H_2^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H_1 - \omega H_1^2}} +$$

$$+\varepsilon \frac{H_1}{\sqrt{1+\varepsilon H_1 - \omega H_1^2}} \cdot \frac{H_2}{\sqrt{1+\varepsilon H_2 - \omega H_2^2}}, \qquad (6.1.2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H-\omega H^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H_1-\omega H_1^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H_2-\omega H_2^2}}+$$

$$+\omega\frac{H_1}{\sqrt{1+\varepsilon H_1-\omega H_1^2}}\cdot\frac{H_2}{\sqrt{1+\varepsilon H_2-\omega H_2^2}} \qquad (6.1.3)$$

и, используя выражения

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H_1-\omega H_1^2}}=\left[-\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{H_1}{\sqrt{1+\varepsilon H_1-\omega H_1^2}}\right)+\right.$$

$$\left.+\sqrt{1+\left(\frac{\varepsilon^2}{4}+\omega\right)\left(\frac{H_1}{\sqrt{1+\varepsilon H_1-\omega H_1^2}}\right)^2}\right], \qquad (6.1.4)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H_2-\omega H_2^2}}=\left[-\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{H_2}{\sqrt{1+\varepsilon H_2-\omega H_2^2}}\right)+\right.$$

$$\left.+\sqrt{1+\left(\frac{\varepsilon^2}{4}+\omega\right)\left(\frac{H_2}{\sqrt{1+\varepsilon H_2-\omega H_2^2}}\right)^2}\right], \qquad (6.1.5)$$

окончательно получим законы композиции функций энтропии

$$\left(\frac{H}{\sqrt{1+\varepsilon H-\omega H^2}}\right)=\left(\frac{H_1}{\sqrt{1+\varepsilon H_1-\omega H_1^2}}\right)\circ\left(\frac{H_2}{\sqrt{1+\varepsilon H_2-\omega H_2^2}}\right)=$$

$$=\frac{H_1}{\sqrt{1+\varepsilon H_1-\omega H_1^2}}\left[-\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{H_2}{\sqrt{1+\varepsilon H_2-\omega H_2^2}}\right)+\right.$$

$$\left.+\sqrt{1+\left(\frac{\varepsilon^2}{4}+\omega\right)\left(\frac{H_2}{\sqrt{1+\varepsilon H_2-\omega H_2^2}}\right)^2}\right]+\frac{H_2}{\sqrt{1+\varepsilon H_2-\omega H_2^2}}\times$$

$$\times\left[-\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{H_1}{\sqrt{1+\varepsilon H_1-\omega H_1^2}}\right)+\sqrt{1+\left(\frac{\varepsilon^2}{4}+\omega\right)\left(\frac{H_1}{\sqrt{1+\varepsilon H_1-\omega H_1^2}}\right)^2}\right]+$$

$$+\varepsilon\frac{H_1}{\sqrt{1+\varepsilon H_1-\omega H_1^2}}\cdot\frac{H_2}{\sqrt{1+\varepsilon H_2-\omega H_2^2}}, \quad (6.1.6)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H-\omega H^2}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H_1-\omega H_1^2}}\right)\circ\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H_2-\omega H_2^2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H_1-\omega H_1^2}}\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H_2-\omega H_2^2}}+\frac{1}{\omega}\left[\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H_1-\omega H_1^2}}\right)-\right.$$

$$\left.-\sqrt{\left(\frac{\varepsilon^2}{4}+\omega\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H_1-\omega H_1^2}}\right)^2-\omega}\;\right]\left[\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H_2-\omega H_2^2}}\right)-\right.$$

$$\left.-\sqrt{\left(\frac{\varepsilon^2}{4}+\omega\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H_2-\omega H_2^2}}\right)^2-\omega}\;\right]. \quad (6.1.7)$$

Энтропия и введенные функции, обладающие групповыми свойствами, являются основой для использования соответствующих геометрических представлений с обобщенными гиперболическими и тригонометрическими функциями.

6.2. Обобщенные гиперболические функции мер информации

Для наглядности рассмотрим физические безразмерные меры информаций различных типов и, следовательно, имеем $\lambda=-1$ в формулах (5.5.13) и (5.5.14). Используем изоморфное отображение группы полунорм распределений на группу тригонометрических углов:

$$\alpha_q = -\ln N_{q-1}(p), \quad N_{q-1}(p) = \left(\frac{\sum\limits_i^m p_i^q}{\sum\limits_i^m p_i} \right)^{1/(q-1)}, \tag{6.2.1}$$

$$\alpha'_q = \ln N_{q-1}\left(\frac{p}{u} \right), \quad N_{q-1}\left(\frac{p}{u} \right) = \left(\frac{\sum\limits_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum\limits_i^m p_i} \right)^{1/(q-1)}. \tag{6.2.2}$$

При $q = 1$ полунормы преобразуются в средние геометрические распределений и тогда получим

$$\alpha = -\ln N(p), \quad N(p) = \exp\left[\frac{\sum\limits_i^m \left(\ln p_i \right) p_i}{\sum\limits_i^m p_i} \right], \tag{6.2.3}$$

$$\alpha' = \ln N\left(\frac{p}{u} \right), \quad N\left(\frac{p}{u} \right) = \exp\left[\frac{\sum\limits_i^m \left(\ln \frac{p_i}{u_i} \right) p_i}{\sum\limits_i^m p_i} \right]. \tag{6.2.4}$$

Законы композиции тригонометрических углов выражаются в виде обычного сложения

$$\alpha_q = \alpha_{q1} \circ \alpha_{q2} = \alpha_{q1} + \alpha_{q2}, \ \alpha'_q = \alpha'_{q1} \circ \alpha'_{q2} = \alpha'_{q1} + \alpha'_{q2}, \tag{6.2.5}$$

где α_q, α_{q1} и α_{q2} соответствуют распределениям $p_{ij} = p_i p_j$, p_i и p_j и имеют групповые свойства коммутативности, а также ассоциативности. Единичными элементами групп являются нулевые значения, а обратными – противоположные значения $\left(-\alpha_q\right)$ и $\left(-\alpha'_q\right)$.

Рассмотрим отображение функций энтропии в **Типе I** общей классификации мер информаций. Из (6.1.1) – (6.1.5) следуют выражения обобщенных гиперболических функций:

$$\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)=\frac{\sqrt{\omega}H}{\sqrt{1+\varepsilon H-\omega H^2}},\ \mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H-\omega H^2}},\qquad (6.2.6)$$

$$\mathrm{Tgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)=\frac{\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)}{\mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)}=\sqrt{\omega}H\ ,\qquad (6.2.7)$$

$$\mathrm{Ctgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)=\frac{\mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)}{\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)}=\frac{1}{\mathrm{Tgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)}.\qquad (6.2.8)$$

Используя исходный закон композиции энтропий (6.1.1), а также соотношения (6.1.6) и (6.1.7), получим формулы.

1. Теоремы сложения аргументов:

$$\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)=\mathrm{Sinh}\left[\sqrt{\omega}\left(\alpha_{q1}+\alpha_{q2}\right)\right]=$$

$$=\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q1}\right)\mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q2}\right)+\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q2}\right)\mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q1}\right)+$$

$$+\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q1}\right)\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q2}\right),\qquad (6.2.9)$$

$$\mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)=\mathrm{Cosh}\left[\sqrt{\omega}\left(\alpha_{q1}+\alpha_{q2}\right)\right]=$$

$$=\mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q1}\right)\mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q2}\right)+\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q1}\right)\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q2}\right).\qquad (6.2.10)$$

$$\mathrm{Tgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)=\mathrm{Tgh}\left[\sqrt{\omega}\left(\alpha_{q1}+\alpha_{q2}\right)\right]=$$

$$=\frac{\mathrm{Tgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q1}\right)+\mathrm{Tgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q2}\right)+\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)\mathrm{Tgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q1}\right)\mathrm{Tgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q2}\right)}{1+\mathrm{Tgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q1}\right)\mathrm{Tgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q2}\right)},\qquad (6.2.11)$$

$$\mathrm{Ctgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)=\mathrm{Ctgh}\left[\sqrt{\omega}\left(\alpha_{q1}+\alpha_{q2}\right)\right]=$$

$$=\frac{\mathrm{Ctgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q1}\right)\mathrm{Ctgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q2}\right)+1}{\mathrm{Ctgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q1}\right)+\mathrm{Ctgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q2}\right)+\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)}.\qquad (6.2.12)$$

2. Соотношения между функциями:

$$\mathrm{Cosh}^2\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)+\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)\mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)\mathrm{sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)-\mathrm{Sinh}^2\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)=1,\qquad (6.2.13)$$

$$\mathrm{Cosh}^2\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)=\frac{1}{1+\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)\mathrm{Tgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)-\mathrm{Tgh}^2\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)},\qquad (6.2.14)$$

$$\mathrm{Sinh}^2\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)=\frac{\mathrm{Tgh}^2\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)}{1+\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)\mathrm{Tgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)-\mathrm{Tgh}^2\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)}. \quad (6.2.15)$$

3. Функции двойного аргумента:

$$\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\omega}2\alpha_q\right)=2\,\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)\mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)+$$
$$+\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)\mathrm{Sinh}^2\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right), \quad (6.2.16)$$

$$\mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\omega}2\alpha_q\right)=\mathrm{Cosh}^2\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)+\mathrm{Sinh}^2\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right), \quad (6.2.17)$$

$$\mathrm{Tgh}\left(\sqrt{\omega}2\alpha_q\right)=\frac{2\mathrm{Tgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)+\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)\mathrm{Tgh}^2\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)}{1+\mathrm{Tgh}^2\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)}, \quad (6.2.18)$$

$$\mathrm{Ctgh}\left(\sqrt{\omega}2\alpha_q\right)=\frac{\mathrm{Ctgh}^2\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)+1}{2\mathrm{Ctgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)+\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)}. \quad (6.2.19)$$

4. Сумма функций:

$$\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q1}\right)+\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q2}\right)=$$
$$=2\,\mathrm{Sinh}\left[\sqrt{\omega}\left(\frac{\alpha_{q1}+\alpha_{q2}}{2}\right)\right]\mathrm{Cosh}\left[\sqrt{\omega}\left(\frac{\alpha_{q1}-\alpha_{q2}}{2}\right)\right]+$$
$$+\frac{\varepsilon}{\sqrt{\omega}}\mathrm{Sinh}\left[\sqrt{\omega}\left(\frac{\alpha_{q1}+\alpha_{q2}}{2}\right)\right]\mathrm{Sinh}\left[\sqrt{\omega}\left(\frac{\alpha_{q1}-\alpha_{q2}}{2}\right)\right], \quad (6.2.20)$$

$$\mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q1}\right)+\mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q2}\right)=$$
$$=2\mathrm{Cosh}\left[\sqrt{\omega}\left(\frac{\alpha_{q1}+\alpha_{q2}}{2}\right)\right]\mathrm{Cosh}\left[\sqrt{\omega}\left(\frac{\alpha_{q1}-\alpha_{q2}}{2}\right)\right]+$$
$$+\frac{\varepsilon}{\sqrt{\omega}}\mathrm{Cosh}\left[\sqrt{\omega}\left(\frac{\alpha_{q1}+\alpha_{q2}}{2}\right)\right]\mathrm{Sinh}\left[\sqrt{\omega}\left(\frac{\alpha_{q1}-\alpha_{q2}}{2}\right)\right], \quad (6.2.21)$$

$$\mathrm{Tgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q1}\right)+\mathrm{Tgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q2}\right)=$$

$$=\frac{\mathrm{Sinh}\left[\sqrt{\omega}\left(\alpha_{q1}+\alpha_{q2}\right)\right]-\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q1}\right)\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q2}\right)}{\mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q1}\right)\mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q2}\right)}, \qquad (6.2.22)$$

$$\mathrm{Ctgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q1}\right)+\mathrm{Ctgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q2}\right)=$$

$$=\frac{\mathrm{Sinh}\left[\sqrt{\omega}\left(\alpha_{q1}+\alpha_{q2}\right)\right]-\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q1}\right)\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q2}\right)}{\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q1}\right)\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_{q2}\right)}. \qquad (6.2.23)$$

5. Обратные функции:

$$\mathrm{Arc\,Sinh}\,x=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2/4\omega}}\ln\left[x\sqrt{1+\varepsilon^2/4\omega}+\sqrt{x^2\left(1+\varepsilon^2/4\omega\right)+1}\right], \qquad (6.2.24)$$

$$\mathrm{ArcCosh}\,x=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2/4\omega}}\ln\left[x\sqrt{1+\varepsilon^2/4\omega}+\sqrt{x^2\left(1+\varepsilon^2/4\omega\right)-1}\right], \qquad (6.2.25)$$

$$\mathrm{ArcTgh}\,x=\frac{1}{2\sqrt{1+\varepsilon^2/4\omega}}\ln\left[\frac{1+x\Big/\left(\sqrt{1+\varepsilon^2/4\omega}-\varepsilon/\sqrt{4\omega}\right)}{1-x\Big/\left(\sqrt{1+\varepsilon^2/4\omega}+\varepsilon/\sqrt{4\omega}\right)}\right], \qquad (6.2.26)$$

$$\mathrm{ArcCtgh}\,x=\frac{1}{2\sqrt{1+\varepsilon^2/4\omega}}\ln\left[\frac{x+1\Big/\left(\sqrt{1+\varepsilon^2/4\omega}-\varepsilon/\sqrt{4\omega}\right)}{x-1\Big/\left(\sqrt{1+\varepsilon^2/4\omega}+\varepsilon/\sqrt{4\omega}\right)}\right], \qquad (6.2.27)$$

6. Суммы обратных функций:

$$\mathrm{ArcSinh}\,x+\mathrm{ArcSinh}\,y=$$

$$=\mathrm{ArcSinh}\left[x\sqrt{y^2\left(1+\varepsilon^2/4\omega\right)+1}+y\sqrt{x^2\left(1+\varepsilon^2/4\omega\right)+1}\right], \qquad (6.2.28)$$

$$\mathrm{ArcCosh}\,x+\mathrm{ArcCosh}\,y=$$

$$=\mathrm{ArcCosh}\left\{xy+\left[\sqrt{x^2\left(1+\varepsilon^2/4\omega\right)-1}+x\varepsilon/2\sqrt{\omega}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\sqrt{y^2\left(1+\varepsilon^2/4\omega\right)-1}+y\varepsilon/2\sqrt{\omega}\right]\right\}, \qquad (6.2.29)$$

$$\mathrm{ArcCtgh}\,x+\mathrm{ArcCtgh}\,y=\mathrm{ArcCtgh}\left(\frac{x+y+\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)xy}{1+xy}\right), \qquad (6.2.30)$$

$$\operatorname{ArcCtgh} x+\operatorname{ArcCtgh} y=\operatorname{ArcCtgh}\left(\frac{xy+1}{x+y+\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)}\right). \qquad (6.2.31)$$

7. Производные:

$$\frac{d\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)}{\sqrt{\omega}d\alpha_q}=\operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)+\left(\varepsilon/\sqrt{4\omega}\right)\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right), \qquad (6.2.32)$$

$$\frac{d\operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)}{\sqrt{\omega}d\alpha_q}=\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)-\left(\varepsilon/\sqrt{4\omega}\right)\operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right), \qquad (6.2.33)$$

$$\frac{d\operatorname{Tgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)}{\sqrt{\omega}d\alpha_q}=\frac{1-\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)\operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)}{\operatorname{Cosh}^2\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)}, \qquad (6.2.34)$$

$$\frac{d\operatorname{Ctgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)}{\sqrt{\omega}d\alpha_q}=-\frac{1-\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)\operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)}{\operatorname{Sinh}^2\left(\sqrt{\omega}\alpha_q\right)}, \qquad (6.2.35)$$

$$\frac{d\operatorname{Arc}\operatorname{Sinh} x}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2\left(1+\varepsilon^2/4\omega\right)}}, \qquad (6.2.36)$$

$$\frac{d\operatorname{ArcCosh} x}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x^2\left(1+\varepsilon^2/4\omega\right)-1}}, \qquad (6.2.37)$$

$$\frac{d\operatorname{Arc}\operatorname{Tgh} x}{dx}=\frac{1}{1+\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)x-x^2},\ x<1, \qquad (6.2.38)$$

$$\frac{d\operatorname{ArcCtgh} x}{dx}=-\frac{1}{1+\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)x-x^2}. \qquad (6.2.39)$$

Формулы n-кратного и половинного аргумента, а также другие соотношения легко выводятся из (6.2.6) – (6.2.39).

В случае информации различия имеем обобщенные гиперболические функции

$$\operatorname{Tgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha'_q\right)=-\sqrt{\omega}I,\ \operatorname{Ctgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha'_q\right)=\frac{1}{\operatorname{Tgh}\left(\sqrt{\omega}\alpha'_q\right)}, \qquad (6.2.40)$$

$$\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\omega}\alpha'_q\right)=-\frac{\sqrt{\omega}I}{\sqrt{1-\varepsilon I-\omega I^2}}, \quad \mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\omega}\alpha'_q\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon I-\omega I^2}}. \quad (6.2.41)$$

В заключение введем представления абелевой группы энтропий функциями $\varphi_1(H)$ и $\varphi_2(H)$, которые находятся в следующем соответствии с элементами энтропий

$$\varphi_1(H)=\varphi_1(H_1\circ H_2)=\varphi_1(H_1)\varphi_2(H_2)+\varphi_1(H_2)\varphi_2(H_1)+$$
$$+\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)\varphi_1(H_1)\varphi_1(H_2), \quad (6.2.42)$$

$$\varphi_2(H)=\varphi_2(H_1\circ H_2)=\varphi_2(H_1)\varphi_2(H_2)+\varphi_1(H_1)\varphi_1(H_2). \quad (6.2.43)$$

Функции с условиями $\varphi_1(0)=0$ и $\varphi_2(0)=1$ удовлетворяют следующему равенству

$$\varphi_2^2(H)+\left(\varepsilon/\sqrt{\omega}\right)\varphi_1(H)\varphi_2(H)-\varphi_1^2(H)=1. \quad (6.2.44)$$

Тогда при известном законе композиции энтропий (6.1.1) однозначно вытекают выражения

$$\varphi_1(H)=\frac{\sqrt{\omega}H}{\sqrt{1+\varepsilon H-\omega H^2}}, \ \varphi_2(H)=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H-\omega H^2}}, \quad (6.2.45)$$

равные обобщенным гиперболическим функциям (6.2.6).

6.3. Геометрическое представление с псевдоевклидовым и галилеевым пределом для метрической функции

Согласно результатам раздела 5.3, запишем закон композиции энтропий (6.1.1) так

$$H=(H_1\circ H_2)=\frac{H_1+H_2+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)H_1H_2}{1+\varepsilon_1\varepsilon_2H_1H_2}. \quad (6.3.1)$$

Подставляя в обобщенные гиперболические функции значение энтропии (5.5.21) с $\lambda=-1$ для закона композиции (6.3.1) в виде

$$H=\frac{\left[N_{q-1}(p)\right]^{-\varepsilon_1}-\left[N_{q-1}(p)\right]^{\varepsilon_2}}{\varepsilon_2\left[N_{q-1}(p)\right]^{-\varepsilon_1}+\varepsilon_1\left[N_{q-1}(p)\right]^{\varepsilon_2}}=$$
$$=\frac{e^{\varepsilon_1\alpha_q}-e^{-\varepsilon_2\alpha_q}}{\varepsilon_2e^{\varepsilon_1\alpha_q}+\varepsilon_1e^{-\varepsilon_2\alpha_q}}=\frac{e^{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2}-e^{-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2}}{\varepsilon_2e^{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2}+\varepsilon_1e^{-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2}}, \quad (6.3.2)$$

с известными значениями параметров $\varepsilon=\varepsilon_1-\varepsilon_2$, $\omega=\varepsilon_1\varepsilon_2$ и $D>0$, получим формулы

$$\mathrm{Tgh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)=\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\,\frac{e^{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2}-e^{-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2}}{\varepsilon_2 e^{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2}+\varepsilon_1 e^{-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2}}\quad, \tag{6.3.3}$$

$$\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)=\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\,\frac{e^{\varepsilon_1\alpha_q}-e^{-\varepsilon_2\alpha_q}}{\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)e^{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\alpha_q/2}}=$$
$$=\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\,\frac{e^{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2}-e^{-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2}}{\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)}\quad, \tag{6.3.4}$$

$$\mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)=\frac{\varepsilon_2 e^{\varepsilon_1\alpha_q}+\varepsilon_1 e^{-\varepsilon_2\alpha_q}}{\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)e^{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\alpha_q/2}}=$$
$$=\frac{\varepsilon_2 e^{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2}+\varepsilon_1 e^{-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2}}{\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)}\quad, \tag{6.3.5}$$

$$\mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)+\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}\,\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)=e^{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2}, \tag{6.3.6}$$

$$\mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)-\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}\,\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)=e^{-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2}. \tag{6.3.7}$$

В (6.3.2) энтропия имеет конечный интервал значений $\left(-1/\varepsilon_1\right)<H<\left(1/\varepsilon_2\right)$.

При умножении соотношения (6.3.6) на (6.3.7) вытекает формула (6.2.13), а при делении – экспоненциальная функция

$$e^{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q}=\frac{\mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)+\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}\,\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)}{\mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)-\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}\,\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)}. \tag{6.3.8}$$

Взаимосвязь обобщенных гиперболических функций с обычными гиперболическими функциями дается соотношениями

$$\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)=\frac{2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}{\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)}\sinh\left(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\alpha_q\right)\;, \tag{6.3.9}$$

$$\operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)=\cosh\left(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\alpha_q\right)-$$

$$-\left(\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\right)\sinh\left(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\alpha_q\right), \tag{6.3.10}$$

$$\operatorname{Tgh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)=\left(\frac{2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\right)\left(\frac{\operatorname{tgh}\left(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\alpha_q\right)}{1-\left(\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\right)\operatorname{tgh}\left(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\alpha_q\right)}\right), \tag{6.3.11}$$

из которых вытекают равенства

$$\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)+\operatorname{Sinh}\left(-\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)=0 \quad , \tag{6.3.12}$$

$$\operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)-\operatorname{Cosh}\left(-\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)=$$

$$=-\left(\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}\right)\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right), \tag{6.3.13}$$

$$\frac{1+\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}\operatorname{Tgh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)}{1-\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}\operatorname{Tgh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)}=\frac{1-\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}\operatorname{Tgh}\left(-\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)}{1+\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}\operatorname{Tgh}\left(-\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)}, \tag{6.3.14}$$

$$\frac{1}{\operatorname{Tgh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)}+\frac{1}{\operatorname{Tgh}\left(-\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)}=-\left(\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}\right), \tag{6.3.15}$$

$$\operatorname{Tgh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)=-\frac{\operatorname{Tgh}\left(-\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)}{1-\left(\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}\right)\operatorname{Tgh}\left(-\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)}, \tag{6.3.16}$$

$$\operatorname{Tgh}\left(-\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)=\frac{\operatorname{Sinh}\left(-\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)}{\operatorname{Cosh}\left(-\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)}. \tag{6.3.17}$$

Функции $\operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)$ и $\operatorname{Tgh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)$ не являются симметричными относительно замены α_q на $\left(-\alpha_q\right)$.

Учитывая формулы обобщенных гиперболических функций, из

(5.4.39) и (5.4.40) вытекает соответствующее матричное представление групп мер информаций в тригонометрическом виде

$$\mathbf{A}\left(\alpha_q\right)=e^{-\nu\alpha_q}\begin{pmatrix}\begin{bmatrix}\operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)+\\+\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)\end{bmatrix} & \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)\\ \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right) & \operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)\end{pmatrix}, \quad (6.3.18)$$

$$\mathbf{A}\left(\alpha'_q\right)=e^{\nu\alpha'_q}\begin{pmatrix}\begin{bmatrix}\operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha'_q\right)+\\+\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha'_q\right)\end{bmatrix} & -\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha'_q\right)\\ -\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha'_q\right) & \operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha'_q\right)\end{pmatrix}. \quad (6.3.19)$$

Далее для случая группы энтропий определим двумерное пространство с координатными осями η и ξ. Произвольная точка в этой системе координат, заданная радиус-вектором $\vec{\mathbf{R}}=(\eta,\xi)$, определяется расстоянием или длиной $\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|$ от центра координат и углом α_q, что отражается соотношениями

$$\eta=e^{-\nu\alpha_q}\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|\operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right),\ \xi=e^{-\nu\alpha_q}\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|\operatorname{Sinh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right). \quad (6.3.20)$$

Тогда получим выражение

$$\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|=F(\eta,\xi)=\left(\frac{\eta+\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}\xi}{\eta-\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}\xi}\right)^{\frac{\nu}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}\sqrt{\eta^2+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}\eta\xi-\xi^2} \quad (6.3.21)$$

с эквивалентной формой

$$\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|=\eta\left(\frac{1+\varepsilon_1 H}{1-\varepsilon_2 H}\right)^{\frac{\nu}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}\sqrt{1+\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)H-\varepsilon_1\varepsilon_2 H^2}=$$

$$=\eta\left\{\exp\left[2\nu\operatorname{ArcTgh}\left(\sqrt{\omega}H\right)\right]\right\}\sqrt{1+\varepsilon H-\omega H^2}, \quad (6.3.22)$$

где $\operatorname{Tgh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right)=\xi/\eta=\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}H$.

Преобразование координат

$$
\begin{pmatrix} \xi' \\ \\ \eta' \end{pmatrix} = e^{-\nu\alpha_q} \begin{pmatrix} \left[\begin{array}{l} \mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right) + \\ + \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}} \mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right) \end{array} \right] & \mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right) \\ \mathrm{Sinh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right) & \mathrm{Cosh}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\alpha_q\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \\ \eta \end{pmatrix} \qquad (6.3.23)
$$

при повороте исходной системы координат на угол α_q оставляет форм-инвариантным значение расстояния (6.3.21).

Для рассматриваемой системы координат имеем вместо матрицы (5.4.41) следующее матричное представление

$$
\mathbf{A}(H) = \left(\frac{1 - \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}H}{1 + \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}H} \right)^{-\frac{\nu}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}} \times
$$

$$
\times \begin{pmatrix} \dfrac{1 + H\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)/\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}{\sqrt{1 + H\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)/\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2} - H^2}} & \dfrac{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}H}{\sqrt{1 + H\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)/\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2} - H^2}} \\ \dfrac{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}H}{\sqrt{1 + H\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)/\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2} - H^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1 + H\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)/\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2} - H^2}} \end{pmatrix}, \qquad (6.3.24)
$$

которое и дает преобразование координат (6.3.23). В итоге соотношения (6.3.20) запишутся так

$$
\frac{\eta}{\|\vec{\mathbf{R}}\|} = \left(\frac{1 - \varepsilon_2 H}{1 + \varepsilon_1 H} \right)^{\frac{\nu}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)H - \varepsilon_1\varepsilon_2 H^2}}, \qquad (6.3.25)
$$

$$
\frac{\xi}{\|\vec{\mathbf{R}}\|} = \left(\frac{1 - \varepsilon_2 H}{1 + \varepsilon_1 H} \right)^{\frac{\nu}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}} \frac{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}H}{\sqrt{1 + \left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)H - \varepsilon_1\varepsilon_2 H^2}}, \qquad (6.3.26)
$$

а преобразования величин $\left(\eta/\|\vec{\mathbf{R}}\|\ ,\ \xi/\|\vec{\mathbf{R}}\|\right)$ посредством матрицы (6.3.24) дают новые значения энтропии, удовлетворяющей закону (5.3.4).

Аналогично определяются формулы для группы информаций различия.

Рассмотрим случай с $\nu = \nu(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и запишем (6.3.21) так:

$$\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\| = \left(\eta - \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}\,\xi\right)^{\left(\frac{\nu}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}+\frac{1}{2}\right)} \left(\eta + \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}\,\xi\right)^{\left(\frac{\nu}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}-\frac{1}{2}\right)}. \qquad (6.3.27)$$

При малых углах α_q имеем $\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\| \approx \eta$ и из (6.3.27) вытекает значение параметра

$$\nu = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}, \qquad (6.3.28)$$

которое в силу исходного уравнения (5.5.13) удовлетворяет условию $\nu \neq 0$.

Длина радиус-вектора примет вид

$$\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\| = F(\eta, \xi) = \left(\eta - \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}\,\xi\right)^{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}} \left(\eta + \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}\,\xi\right)^{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}} =$$

$$= \left(\frac{\eta - \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}\,\xi}{\eta + \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}\,\xi}\right)^{\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\right)} \sqrt{\eta^2 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}\eta\xi - \xi^2}. \qquad (6.3.29)$$

Рассматриваемые двумерные геометрии мер информации есть геометрии плоских и глобально анизотропных метрических пространств Минковского [40] с метрической функцией (6.3.21) и (6.3.29). Анизотропия пространств характеризуется параметрами ν и ε. Преобразование координат (6.3.23) реализует движение пространства.

Метрическая функция плоского и глобально анизотропного пространства Минковского при условиях $\nu = r(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2$, $\varepsilon_2 = \gamma\varepsilon_1$ и $\varepsilon_1 = 1 - q$ имеет следующий вид

$$\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\| = F(\eta, \xi) = \left(\frac{\eta - \left(1/\sqrt{\gamma}\right)\xi}{\eta + \sqrt{\gamma}\,\xi}\right)^{r/2} \sqrt{\eta^2 + \frac{1-\gamma}{\sqrt{\gamma}}\eta\xi - \xi^2} \qquad (6.3.30)$$

для физической безразмерной энтропии в **Типе ID**

$$H_{q,\gamma}^{phys} = \frac{1}{q-1}\left[\frac{1 - \left(\sum\limits_i^m p_i^q \Big/ \sum\limits_i^m p_i\right)^{1+\gamma}}{1 + \gamma\left(\sum\limits_i^m p_i^q \Big/ \sum\limits_i^m p_i\right)^{1+\gamma}}\right]. \qquad (6.3.31)$$

Определим уравнение индикатрисы [40]

$$F(\eta,\xi)=1, \tag{6.3.32}$$

которая представляет собой в двумерном пространстве кривую линию. Радиус-вектор $\vec{\mathbf{R}}$ пересекает эту линию в одной, и только одной, точке.

На рис. 6.1 приведены индикатрисы для случаев а) $r=0$ и б) $r=1/2$. Линии *1* и *2* соответствуют $\gamma=1$ и $\gamma=1/2$.

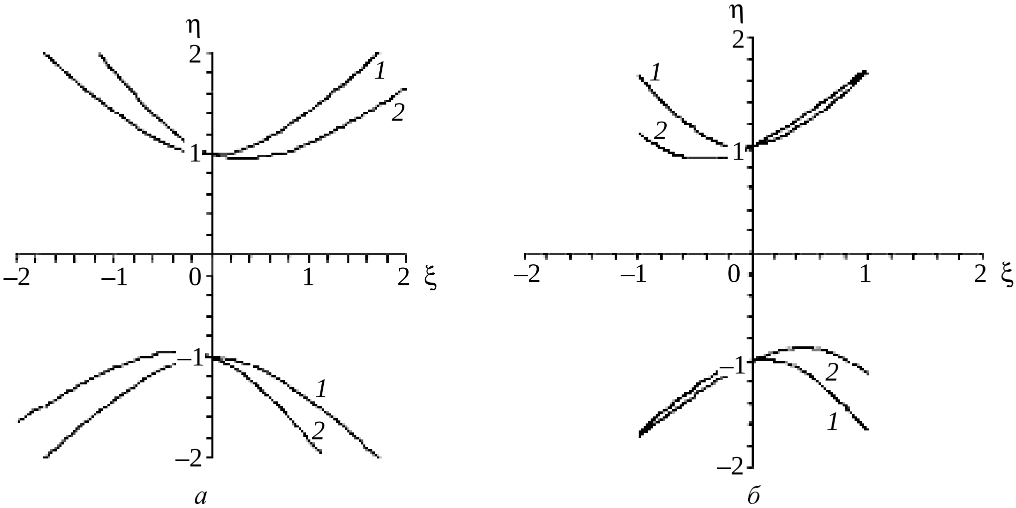


Рис. 6.1. Индикатрисы для **Типа ID**:
1 – $(\gamma=1)$, *2* – $(\gamma=1/2)$

Если $r=0$ и $\gamma=1$, то индикатрисы являются единичными гиперболами. Из (6.3.30) вытекает метрическая функция, равная длине радиус-вектора в изотропной псевдоевклидовой геометрии

$$\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|=F(\eta,\xi)=\sqrt{\eta^2-\xi^2}, \tag{6.3.33}$$

а из (6.3.31) получим выражение энтропии в **Типе IC**

$$H_q^{phys}=\frac{1}{q-1}\left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)^2}{1+\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)^2}\right]. \tag{6.3.34}$$

В этом случае обобщенные гиперболические функции совпадают с обычными гиперболическими функциями и из (6.2.6) – (6.2.8) имеем формулы

$$\sinh\left[(1-q)\alpha_q\right] = \frac{(1-q)H}{\sqrt{1-(1-q)^2 H^2}} =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{-1} - \left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)\right], \qquad (6.3.35)$$

$$\cosh\left[(1-q)\alpha_q\right] = \frac{1}{\sqrt{1-(1-q)^2 H^2}} =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{-1} + \left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)\right], \qquad (6.3.36)$$

$$\mathrm{tgh}\left[(1-q)\alpha_q\right] = (1-q)H =$$
$$= \frac{\left[\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{-1} - \left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)\right]}{\left[\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{-1} + \left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)\right]}, \qquad (6.3.37)$$

$$\mathrm{ctgh}\left[(1-q)\alpha_q\right] = \frac{1}{(1-q)H} =$$
$$= \frac{\left[\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{-1} + \left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)\right]}{\left[\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{-1} - \left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)\right]}. \qquad (6.3.38)$$

В теории информации используются нормированные меры. Поэтому для них и рассмотрим отличительные свойства энтропий в анизотропном и изотропном случаях геометрий. На рис. 6.2 представлены зависимости нормированной энтропии в **Типе ID**

$$H_{q,\gamma}=\frac{1+\gamma 2^{(1+\gamma)(1-q)}}{1-2^{(1+\gamma)(1-q)}}\left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^q\right)^{1+\gamma}}{1+\gamma\left(\sum_i^m p_i^q\right)^{1+\gamma}}\right] \tag{6.3.39}$$

от распределения при $m=2$, $q=3/2$ и $p_1=p$. Линии *1, 2* и *3* соответствуют значениям $\gamma=-7$, $\gamma=0$ и $\gamma=5/2$.

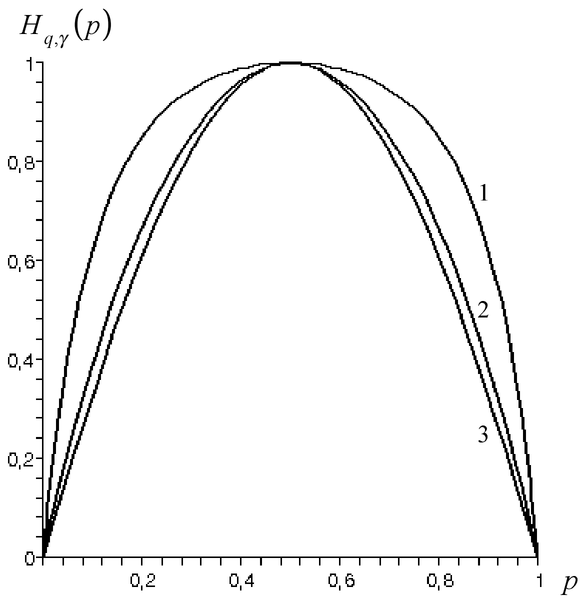


Рис. 6.2. Зависимость энтропии от распределения:
$1-(\gamma=-7)$, $2-(\gamma=0)$, $3-(\gamma=5/2)$

6.4. Энтропия и информация различия в псевдоевклидовой геометрии мер информации

Рассмотрим некоторые свойства нормированной энтропии и информации различия

$$H_q(p)=\frac{1+2^{2(1-q)}}{1-2^{2(1-q)}}\left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^q\right)^2}{1+\left(\sum_i^m p_i^q\right)^2}\right],\ \sum_i^m p_i=1, \tag{6.4.1}$$

$$I_q(p:u)=\frac{2^{2(1-q)}+1}{2^{2(1-q)}-1}\left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right)^2}{1+\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right)^2}\right],\ \sum_i^m u_i=1 \qquad (6.4.2)$$

в случае изотропной псевдоевклидовой геометрии мер информации с метрической функцией (6.3.33).

1. Выпуклость и знакоопределенность. Энтропия и информация различия есть вещественные и выпуклые функционалы. Справедливы неравенства

$$H_q(p)>0, \qquad (6.4.3)$$

$$I_q(p:u)>0 \quad (q>0),\ I_q(p:u)<0 \quad (q<0), \qquad (6.4.4)$$

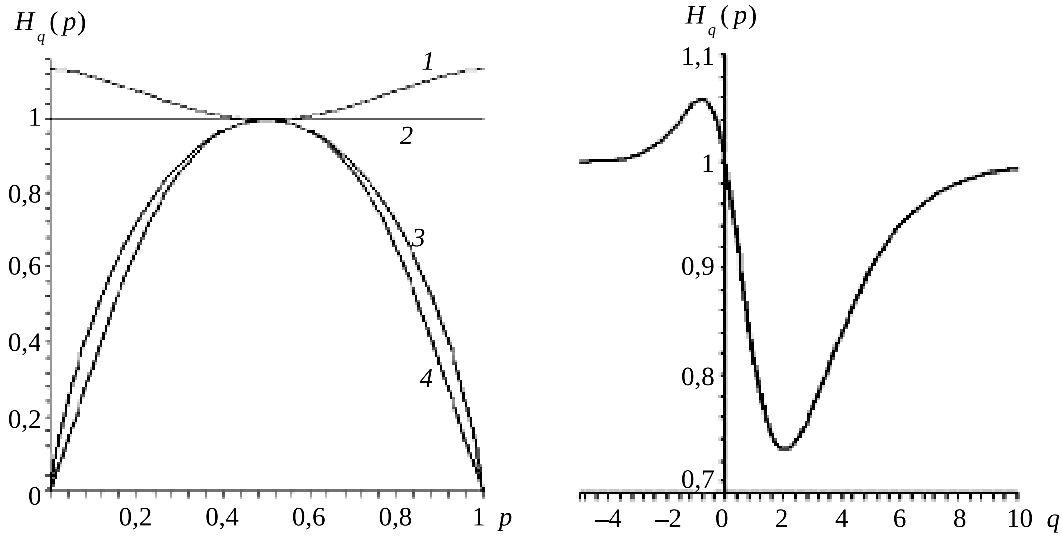
$$H_q(a_1p_1+a_2p_2)\le a_1H_q(p_1)+a_2H_q(p_2),\ \sum_i^m p_{1i}=\sum_i^m p_{2i}=1, \qquad (6.4.5)$$

$$I_q\left[(a_1p_1+a_2p_2):u\right]\le a_1I_q(p_1:u)+a_2I_q(p_2:u), \qquad (6.4.6)$$

где $a_1+a_2=1$, $a_1>0$ и $a_2>0$. При $q=0$ из (6.4.1) вытекает равенство

$$H_0(p)=\frac{5}{3}\left[\frac{m^2-1}{m^2+1}\right]. \qquad (6.4.7)$$

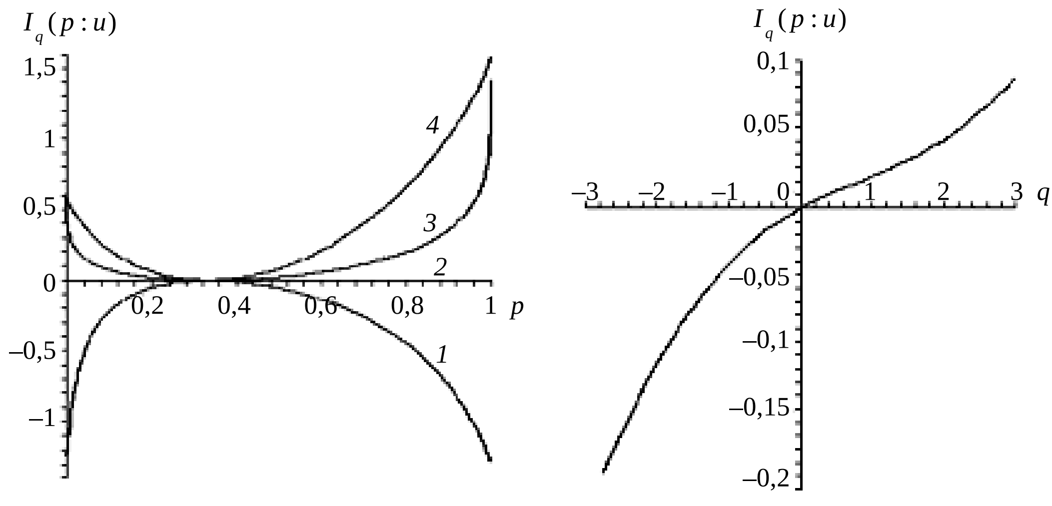
На рис. 6.3 представлены зависимости энтропии $H_q(p)$: а) от распределения p при значениях $m=2$, $p_1=p$, $q=-1;\ 0;\ 1;\ 3$ и б) от числа q при $m=2$, $p_1=1/4$.



а *б*

Рис. 6.3. Зависимость энтропии:
а – от распределения: *1* – ($q = -1$); *2* – ($q = 0$);
3 – ($q = 1$); *4* – ($q = 3$) и *б* – от числа q

На рис. 6.4 приведены зависимости информации различия $I_q\left(p:u\right)$: а) от распределения при значениях $m=2$, $p_1=p$, $u_1=1/3$ и $q=-1/2$; 0; $1/2$; 1 и б) от числа q при $m=2$, $p_1=1/4$, $u_1=1/3$.



а *б*

Рис. 6.4. Зависимость информации различия:
а – от распределения: *1* – ($q = -1/2$); *2* – ($q = 0$);
3 – ($q = 1/2$); *4* – ($q = 1$) и *б* – от числа q

2. Неаддитивность для независимых объектов. Пусть совместное состояние случайного объекта описывается нормированными совместными распределениями $p_{ij} = p_i p_j$ и $u_{ij} = u_i u_j$ при статистической независимости двух случайных объектов. Имеет место свойство неаддитивности мер информации

$$H_q\left(p_{12}\right) = \frac{H_q\left(p_1\right) + H_q\left(p_2\right)}{1 + \varepsilon_1^2 H_q\left(p_1\right) H_q\left(p_2\right)}, \tag{6.4.8}$$

$$I_q\left(p_{12} : u_{12}\right) = \frac{I_q\left(p_1 : u_1\right) + I_q\left(p_2 : u_2\right)}{1 + \varepsilon_1^2 I_q\left(p_1 : u_1\right) I_q\left(p_2 : u_2\right)}, \tag{6.4.9}$$

где квадрат параметра имеет значение

$$\varepsilon_1^2 = \left[\frac{1 - 2^{2(1-q)}}{1 + 2^{2(1-q)}}\right]^2. \tag{6.4.10}$$

При $q = 1$ из (6.4.8) и (6.4.9) следует аддитивность для энтропии Шеннона–Винера и информации различия Кульбака–Лейблера.

3. Энтропия равновероятного состояния. Экстремум энтропии при условии сохранения нормировки распределения p дает равновероятное распределение

$$p_i = \frac{1}{m}. \tag{6.4.11}$$

Экстремальное значение энтропии при равновероятном состоянии

$$H_q\left(p\right)_{ext} = \frac{1 + 2^{2(1-q)}}{1 - 2^{2(1-q)}}\left[\frac{1 - m^{2(1-q)}}{1 + m^{2(1-q)}}\right] \tag{6.4.12}$$

зависит от параметра q. При $q = 1$ из (6.4.12) следует известное выражение

$$H_1\left(p\right)_{ext} = \lim_{q \to 1} H_q\left(p\right)_{ext} = \log_2 m. \tag{6.4.13}$$

4. Информация различия с $u_i = 1/m$. Информация различия в состоянии с распределением p относительно равновероятного состояния с $u_i = 1/m$ равняется:

$$I_q(p:u)=\frac{2^{2(1-q)}+1}{2^{2(1-q)}-1}\left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^q m^{q-1}\right)^2}{1+\left(\sum_i^m p_i^q m^{q-1}\right)^2}\right]. \tag{6.4.14}$$

Взаимосвязь между функционалами (6.4.1), (6.4.12) и (6.4.14) отражена в равенствах

$$\frac{1+\varepsilon_1 H_q(p)_{ext}}{1-\varepsilon_1 H_q(p)_{ext}}=\left[\frac{1+\varepsilon_1 I_q(p:u)}{1-\varepsilon_1 I_q(p:u)}\right]\left[\frac{1+\varepsilon_1 H_q(p)}{1-\varepsilon_1 H_q(p)}\right], \tag{6.4.15}$$

$$I_q(p:u)=\frac{H_q(p)_{ext}-H_q(p)}{1+\varepsilon_1^2 H_q(p)_{ext}\,H_q(p)}. \tag{6.4.16}$$

Согласно неравенствам (6.4.4) из (6.4.16) вытекает

$$H_q(p)<H_q(p)_{ext} \text{ при } q>0, \tag{6.4.17}$$

$$H_q(p)>H_q(p)_{ext} \text{ при } q<0. \tag{4.4.18}$$

Следовательно, энтропия меньше (больше), чем энтропия равновероятного состояния при $q>0$ $(q<0)$.

5. Мера неточности. Меру статистической неточности определим функционалом

$$H_q(p:u)=\frac{H_q(p)+I_q(p:u)}{1+\varepsilon_1^2 H_q(p)I_q(p:u)}, \tag{6.4.19}$$

который соответствует закону композиции мер информации в тригонометрическом виде

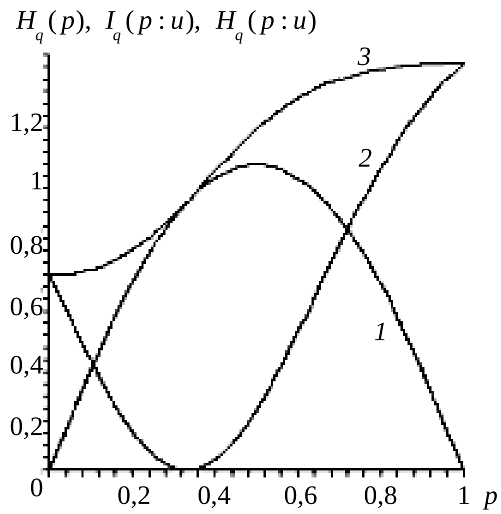
$$\operatorname{tgh}\left[\varepsilon_1\left(\alpha_q+\alpha'_q\right)\right]=\frac{\operatorname{tgh}\left(\varepsilon_1\alpha_q\right)+\operatorname{tgh}\left(\varepsilon_1\alpha'_q\right)}{1+\operatorname{tgh}\left(\varepsilon_1\alpha_q\right)\operatorname{tgh}\left(\varepsilon_1\alpha'_q\right)} \tag{6.4.20}$$

при сложении углов α_q и α'_q.

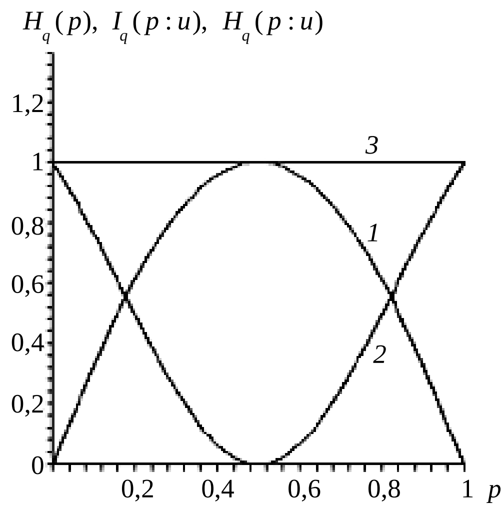
В пределе $q\to 1$ из (6.4.19) вытекает мера неточности Керриджа

$$H(p:u)=\lim_{q\to 1}H_q(p:u)=-\sum_i^m\left(\log_2 u_i\right)p_i. \tag{6.4.21}$$

На рис. 6.5 представлены зависимости энтропии $H_q(p)$, информации различия $I_q(p:u)$ и меры неточности $H_q(p:u)$ от распределения при $m=2$, $q=2$, $p_1=p$ и а) $u_1=1/3$, б) $u_1=1/2$.



а



б

Рис. 6.5. Зависимости функционалов от распределения:
1 – энтропия $H_q(p)$, *2* – информация различия $I_q(p:u)$,
3 – мера неточности $H_q(p:u)$

6. Нормированность и размерность. Определяя нормированность энтропии на единицу при $m=2$ и $p_1=p_2=1/2$, тем самым задается единица измерения в данной модели одним битом.

Связь между рассматриваемыми нормированными и физическими безразмерными мерами информации

$$H_q^{phys}(p)=\frac{1}{q-1}\left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^q\right)^2}{1+\left(\sum_i^m p_i^q\right)^2}\right], \tag{6.4.22}$$

$$I_q^{phys}(p:u)=\frac{1}{1-q}\left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right)^2}{1+\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right)^2}\right] \tag{6.4.23}$$

дается равенствами:

$$H_q(p)=\frac{H_q^{phys}(p)}{H_q^{phys}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)},\ H_q^{phys}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{q-1}\left[\frac{1-2^{2(1-q)}}{1+2^{2(1-q)}}\right], \qquad (6.4.24)$$

$$I_q(p:u)=\frac{I_q^{phys}(p:u)}{I_q^{phys}\left(1,0:\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)},\ I_q^{phys}\left(1,0:\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{1-q}\left[\frac{2^{2(1-q)}-1}{2^{2(1-q)}+1}\right]. \qquad (6.4.25)$$

7. Информация Фишера. Предельное значение информации различия в случае распределений $p_i(\theta)$ и $u_i(\theta)=p_i(\theta+\delta\theta)$ имеет вид

$$I_q(\theta:\theta+\delta\theta)=\frac{2^{2(1-q)}+1}{2^{2(1-q)}-1}\left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^q(\theta)\,p_i^{1-q}(\theta+\delta\theta)\right)^2}{1+\left(\sum_i^m p_i^q(\theta)\,p_i^{1-q}(\theta+\delta\theta)\right)^2}\right]=$$

$$=-\left[\frac{2^{2(1-q)}+1}{2^{2(1-q)}-1}\right]\frac{(\delta\theta)^2}{2}\sum_i^m\frac{\partial^2 p^{1-q}(\theta)}{\partial\theta^2}\,p_i^q(\theta)=$$

$$=\frac{q(1-q)}{2}\left[\frac{2^{2(1-q)}+1}{2^{2(1-q)}-1}\right]\Gamma_{\theta\theta}(\delta\theta)^2, \qquad (6.4.26)$$

где величина

$$\Gamma_{\theta\theta}=\sum_i^m\left[\frac{\partial\ln p_i(\theta)}{\partial\theta}\right]^2 p_i(\theta) \qquad (6.4.27)$$

есть информация Фишера о величине нефлуктуирующего параметра θ в теории оценивания математической статистики [32, 33, 39, 74, 75].

8. *f*-энтропия и *f* -информация различия. Энтропия и информация различия представляют собой функции полунормы распределений

$$H_f(p)=f\left[N_{q-1}(p)\right],\quad f=\frac{1+2^{2(1-q)}}{1-2^{2(1-q)}}\left\{\frac{1-\left[N_{q-1}(p)\right]^{2(q-1)}}{1+\left[N_{q-1}(p)\right]^{2(q-1)}}\right\}, \qquad (6.4.28)$$

$$I_f\left(p:u\right)=f\left[N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)\right],\quad f=\frac{2^{2(1-q)}+1}{2^{2(1-q)}-1}\left\{\frac{1-\left[N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)\right]^{2(q-1)}}{1+\left[N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)\right]^{2(q-1)}}\right\}. \quad (6.4.29)$$

6.5. Обобщенные тригонометрические функции

Рассмотрим отображение функций энтропии в **Типе III** общей классификации мер информаций. Из (6.1.1) – (6.1.5) следуют выражения обобщенных тригонометрических функций

$$\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)=\frac{\sqrt{-\omega}H}{\sqrt{1+\varepsilon H-\omega H^2}}, \quad (6.5.1)$$

$$\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H-\omega H^2}}, \quad (6.5.2)$$

$$\mathrm{Tg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)=\frac{\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)}{\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)}=\sqrt{-\omega}H, \quad (6.5.3)$$

$$\mathrm{Ctg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)=\frac{\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)}{\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)}=\frac{1}{\mathrm{Tg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)}. \quad (6.5.4)$$

Используя исходный закон композиции энтропий (6.1.1), а также соотношения (6.1.6) и (6.1.7), получим формулы.

1. Теоремы сложения аргументов:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)=\mathrm{Sin}\left[\sqrt{-\omega}\left(\alpha_{q1}+\alpha_{q2}\right)\right]=\\&=\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q1}\right)\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q2}\right)+\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q2}\right)\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q1}\right)+\\&+\left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q1}\right)\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q2}\right),\end{aligned} \quad (6.5.5)$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)=\mathrm{Cos}\left[\sqrt{-\omega}\left(\alpha_{q1}+\alpha_{q2}\right)\right]=\\&=\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q1}\right)\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q2}\right)+\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q1}\right)\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q2}\right).\end{aligned} \quad (6.5.6)$$

$$\mathrm{Tg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right) = \mathrm{Tg}\left[\sqrt{-\omega}\left(\alpha_{q1} + \alpha_{q2}\right)\right] =$$

$$= \frac{\mathrm{Tg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q1}\right) + \mathrm{Tg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q2}\right) + \left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)\mathrm{Tg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q1}\right)\mathrm{Tg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q2}\right)}{1 - \mathrm{Tg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q1}\right)\mathrm{Tg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q2}\right)}, \quad (6.5.7)$$

$$\mathrm{Ctg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right) = \mathrm{Ctg}\left[\sqrt{-\omega}\left(\alpha_{q1} + \alpha_{q2}\right)\right] =$$

$$= \frac{\mathrm{Ctg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q1}\right)\mathrm{Ctg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q2}\right) - 1}{\mathrm{Ctg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q1}\right) + \mathrm{Ctg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q2}\right) + \left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)}. \quad (6.5.8)$$

2. Соотношения между функциями:

$$\mathrm{Cos}^2\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right) + \left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right) +$$

$$+ \mathrm{Sin}^2\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right) = 1, \quad (6.5.9)$$

$$\mathrm{Cos}^2\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right) = \frac{1}{1 + \left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)\mathrm{Tg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right) + \mathrm{Tg}^2\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)}, \quad (6.5.10)$$

$$\mathrm{Sin}^2\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right) = \frac{\mathrm{Tg}^2\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)}{1 + \left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)\mathrm{Tg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right) + \mathrm{Tg}^2\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)}. \quad (6.5.11)$$

3. Функции двойного аргумента:

$$\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}2\alpha_q\right) = 2\,\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right) +$$

$$+ \left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)\mathrm{Sin}^2\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right), \quad (6.5.12)$$

$$\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}2\alpha_q\right) = \mathrm{Cos}^2\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right) + \mathrm{Sin}^2\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right). \quad (6.5.13)$$

$$\mathrm{Tg}\left(\sqrt{-\omega}2\alpha_q\right) = \frac{2\,\mathrm{Tg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right) + \left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)\mathrm{Tg}^2\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)}{1 - \mathrm{Tg}^2\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)}, \quad (6.5.14)$$

$$\mathrm{Ctg}\left(\sqrt{-\omega}2\alpha_q\right) = \frac{\mathrm{Ctg}^2\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right) - 1}{2\mathrm{Ctg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right) + \left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)}. \quad (6.5.15)$$

4. Сумма функций:

$$\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q1}\right)+\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q2}\right)=$$

$$=2\,\mathrm{Sin}\left[\sqrt{-\omega}\left(\frac{\alpha_{q1}+\alpha_{q2}}{2}\right)\right]\mathrm{Cos}\left[\sqrt{-\omega}\left(\frac{\alpha_{q1}-\alpha_{q2}}{2}\right)\right]+$$

$$+\frac{\varepsilon}{\sqrt{-\omega}}\,\mathrm{Sin}\left[\sqrt{-\omega}\left(\frac{\alpha_{q1}+\alpha_{q2}}{2}\right)\right]\mathrm{Sin}\left[\sqrt{-\omega}\left(\frac{\alpha_{q1}-\alpha_{q2}}{2}\right)\right], \qquad (6.5.16)$$

$$\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q1}\right)+\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q2}\right)=$$

$$=-2\mathrm{Cos}\left[\sqrt{-\omega}\left(\frac{\alpha_{q1}+\alpha_{q2}}{2}\right)\right]\mathrm{Cos}\left[\sqrt{-\omega}\left(\frac{\alpha_{q1}-\alpha_{q2}}{2}\right)\right]+$$

$$+\frac{\varepsilon}{\sqrt{-\omega}}\mathrm{Cos}\left[\sqrt{-\omega}\left(\frac{\alpha_{q1}+\alpha_{q2}}{2}\right)\right]\mathrm{Sin}\left[\sqrt{-\omega}\left(\frac{\alpha_{q1}-\alpha_{q2}}{2}\right)\right], \qquad (6.5.17)$$

$$\mathrm{Tg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q1}\right)+\mathrm{Tg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q2}\right)=$$

$$=\frac{\mathrm{Sin}\left[\sqrt{-\omega}\left(\alpha_{q1}+\alpha_{q2}\right)\right]-\left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q1}\right)\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q2}\right)}{\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q1}\right)\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q2}\right)}, \qquad (6.5.18)$$

$$\mathrm{Ctg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q1}\right)+\mathrm{Ctg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q2}\right)=$$

$$=\frac{\mathrm{Sin}\left[\sqrt{-\omega}\left(\alpha_{q1}+\alpha_{q2}\right)\right]-\left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q1}\right)\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q2}\right)}{\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q1}\right)\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_{q2}\right)}. \qquad (6.5.19)$$

5. Обратные функции:

$$\mathrm{ArcSin}\,x=\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2/\left(2\sqrt{-\omega}\right)^2}}\arcsin\left[x\sqrt{1-\varepsilon^2/\left(2\sqrt{-\omega}\right)^2}\right], \qquad (6.5.20)$$

$$\mathrm{ArcCos}\,x=\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2/\left(2\sqrt{-\omega}\right)^2}}\arccos\left[x\sqrt{1-\varepsilon^2/\left(2\sqrt{-\omega}\right)^2}\right], \qquad (6.5.21)$$

$$\mathrm{ArcTg}\,x=\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2/\left(2\sqrt{-\omega}\right)^2}}\mathrm{arctg}\left(\frac{x\sqrt{1-\varepsilon^2/\left(2\sqrt{-\omega}\right)^2}}{1+x\varepsilon/2\sqrt{-\omega}}\right), \qquad (6.5.22)$$

$$\mathrm{ArcCtg}x=\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2\Big/\left(2\sqrt{-\omega}\right)^2}}\,\mathrm{arcctg}\left(\frac{x\sqrt{1-\varepsilon^2\Big/\left(2\sqrt{-\omega}\right)^2}}{x+\varepsilon/2\sqrt{-\omega}}\right),\quad (6.5.23)$$

6. Суммы обратных функций:

$$\mathrm{ArcSin}x+\mathrm{ArcSin}y=\mathrm{ArcSin}\left\{x\sqrt{1-\left[\;1-\varepsilon^2\Big/\left(2\sqrt{-\omega}\right)^2\right]y^2}+\right.$$

$$\left.+y\sqrt{1-\left[\;1-\varepsilon^2\Big/\left(2\sqrt{-\omega}\right)^2\right]x^2}\right\},\qquad (6.5.24)$$

$$\mathrm{Arc\,Cos}x+\mathrm{Arc\,Cos}y=\mathrm{Arc\,Cos}\left\{xy-\left[\sqrt{1-\left[1-\varepsilon^2\Big/\left(2\sqrt{-\omega}\right)^2\right]x^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{x\varepsilon}{2\sqrt{-\omega}}\right]\times\left[\sqrt{1-\left[1-\varepsilon^2\Big/\left(2\sqrt{-\omega}\right)^2\right]y^2}+\frac{y\varepsilon}{2\sqrt{-\omega}}\right]\right\},\qquad (6.5.25)$$

$$\mathrm{ArcTg}x+\mathrm{ArcTg}y=\mathrm{ArcTg}\left(\frac{x+y+\left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)xy}{1-xy}\right),\qquad (6.5.26)$$

$$\mathrm{ArcCtg}\,x+\mathrm{ArcCtg}\,y=\mathrm{Arc\,Ctg}\left(\frac{xy-1}{x+y+\left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)}\right).\qquad (6.5.27)$$

7. Производные:

$$\frac{d\,\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)}{\sqrt{-\omega}d\alpha_q}=\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)+\left(\varepsilon/\sqrt{-4\omega}\right)\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right),\quad (6.5.28)$$

$$\frac{d\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)}{\sqrt{-\omega}d\alpha_q}=\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)-\left(\varepsilon/\sqrt{-4\omega}\right)\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right),\quad (6.5.29)$$

$$\frac{d\,\mathrm{Tg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)}{\sqrt{-\omega}d\alpha_q}=\frac{1-\left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)}{\mathrm{Cos}^2\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)},\quad (6.5.30)$$

$$\frac{d\mathrm{Ctg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)}{\sqrt{-\omega}d\alpha_q}=-\frac{1-\left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)}{\mathrm{Sin}^2\left(\sqrt{-\omega}\alpha_q\right)},\quad (6.5.31)$$

$$\frac{d\,\mathrm{Arc\,Sin}x}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2\left[1-\varepsilon^2\Big/\left(2\sqrt{-\omega}\right)^2\right]}}\,, \qquad (6.5.32)$$

$$\frac{d\,\mathrm{ArcCos}\,x}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2\left[1-\varepsilon^2\Big/\left(2\sqrt{-\omega}\right)^2\right]}}\,, \qquad (6.5.33)$$

$$\frac{d\,\mathrm{ArcTg}x}{dx}=\frac{1}{1+\left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)x+x^2}\,, \qquad (6.5.34)$$

$$\frac{d\,\mathrm{ArcCtg}\,x}{dx}=-\frac{1}{1+\left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)x+x^2}\,. \qquad (6.5.35)$$

Формулы n-кратного и половинного аргумента, а также другие соотношения легко выводятся из (6.5.1) – (6.5.35).

В случае информации различия имеем обобщенные тригонометрические функции

$$\mathrm{Tg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha'_q\right)=-\sqrt{-\omega}I\,,\ \mathrm{Ctg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha'_q\right)=\frac{1}{\mathrm{tg}\left(\sqrt{-\omega}\alpha'_q\right)}\,, \qquad (6.5.36)$$

$$\mathrm{Sin}\left(\sqrt{-\omega}\alpha'_q\right)=-\frac{\sqrt{-\omega}I}{\sqrt{1-\varepsilon I-\omega I^2}}\,,\mathrm{Cos}\left(\sqrt{-\omega}\alpha'_q\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon I-\omega I^2}}\,. \qquad (6.5.37)$$

В заключение введем представления абелевой группы энтропий функциями $\varphi_1(H)$ и $\varphi_2(H)$, которые находятся в следующем соответствии с элементами энтропий

$$\varphi_1(H)=\varphi_1(H_1\circ H_2)=\varphi_1(H_1)\varphi_2(H_2)+\varphi_1(H_2)\varphi_2(H_1)+$$
$$+\left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)\varphi_1(H_1)\varphi_1(H_2)\ , \qquad (6.5.38)$$

$$\varphi_2(H)=\varphi_2(H_1\circ H_2)=\varphi_2(H_1)\varphi_2(H_2)+\varphi_1(H_1)\varphi_1(H_2). \qquad (6.5.39)$$

Функции с условиями $\varphi_1(0)=0$ и $\varphi_2(0)=1$ удовлетворяют следующему равенству:

$$\varphi_2^2(H)+\left(\varepsilon/\sqrt{-\omega}\right)\varphi_1(H)\varphi_2(H)+\varphi_1^2(H)=1\,. \qquad (6.5.40)$$

Тогда при известном законе композиции энтропий (6.1.1) однозначно вытекают выражения:

$$\varphi_1(H)=\frac{\sqrt{-\omega}H}{\sqrt{1+\varepsilon H-\omega H^2}},\ \varphi_2(H)=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H-\omega H^2}}, \qquad (6.5.41)$$

равные обобщенным тригонометрическим функциям (6.5.1).

6.6. Геометрическое представление с евклидовым пределом для метрической функции

Согласно результатам раздела 5.3, запишем закон композиции энтропий (6.1.1) так

$$H=(H_1\circ H_2)=\frac{H_1+H_2+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)H_1H_2}{1-(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)H_1H_2/2} \qquad (6.6.1)$$

и, подставляя в обобщенные тригонометрические функции значение энтропии (5.5.112) с $\lambda=-1$ для закона композиции (6.6.1) в виде

$$H=\frac{\mathrm{tg}\left[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2\right]}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)/2-\left[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)/2\right]\mathrm{tg}\left[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2\right]} \qquad (6.6.2)$$

с известными значениями параметров $\varepsilon=\varepsilon_1-\varepsilon_2$, $\omega=-(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)/2$ и $D<0$, получим формулы взаимосвязи с тригонометрическими (круговыми) функциями

$$\mathrm{Tg}\left[\sqrt{(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)/2}\ \ \alpha_q\right]=\sqrt{(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)/2}\times$$
$$\times\frac{\mathrm{tg}\left[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2\right]}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)/2-\left[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)/2\right]\mathrm{tg}\left[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2\right]}\ , \qquad (6.6.3)$$

$$\mathrm{Sin}\left[\sqrt{(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)/2}\ \ \alpha_q\right]=\sqrt{(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)/2}\left(\frac{\sin\left[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2\right]}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)/2}\right), \qquad (6.6.4)$$

$$\mathrm{Cos}\left[\sqrt{(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)/2}\ \ \alpha_q\right]=$$
$$=\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\cos\left[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2\right]-(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\sin\left[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\alpha_q/2\right]}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\ , \qquad (6.6.5)$$

$$\mathrm{Cos}\left[\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad \alpha_q\right]+\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}\,\mathrm{Sin}\left[\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad \alpha_q\right]=$$

$$=\cos\left[\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)\alpha_q/2\right]+\sin\left[\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)\alpha_q/2\right]\ , \qquad (6.6.6)$$

$$\mathrm{Cos}\left[\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad \alpha_q\right]-\frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}\,\mathrm{Sin}\left[\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad \alpha_q\right]=$$

$$=\cos\left[\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)\alpha_q/2\right]-\sin\left[\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)\alpha_q/2\right]\ , \qquad (6.6.7)$$

а также тождество

$$\left\{\mathrm{Cos}\left[\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad \alpha_q\right]+\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}\,\mathrm{Sin}\left[\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad \alpha_q\right]\right\}^2+$$

$$+\left\{\mathrm{Cos}\left[\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad \alpha_q\right]-\frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}\,\mathrm{Sin}\left[\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad \alpha_q\right]\right\}^2=1\ . \qquad (6.6.8)$$

Из (6.6.3) – (6.6.5) вытекают равенства

$$\mathrm{Sin}\left(\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad \alpha_q\right)+\mathrm{Sin}\left(-\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad \alpha_q\right)=0\ , \qquad (6.6.9)$$

$$\mathrm{Cos}\left(\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad \alpha_q\right)-\mathrm{Cos}\left(-\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad \alpha_q\right)=$$

$$=-\left(\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}\right)\mathrm{Sin}\left(\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad \alpha_q\right)\ , \qquad (6.6.10)$$

$$\frac{1+\varepsilon_1\Big/\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad \mathrm{Tg}\left(\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad \alpha_q\right)}{1-\varepsilon_2\Big/\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad \mathrm{Tg}\left(\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad \alpha_q\right)}=$$

$$=\frac{1-\varepsilon_2\Big/\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad \mathrm{Tg}\left(-\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad \alpha_q\right)}{1+\varepsilon_1\Big/\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad \mathrm{Tg}\left(-\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad \alpha_q\right)}\ , \qquad (6.6.11)$$

$$\frac{1}{\mathrm{Tg}\left(\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\;\;\alpha_q\right)}+\frac{1}{\mathrm{Tg}\left(-\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\;\;\alpha_q\right)}=$$

$$=-\left(\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}\right), \qquad (6.6.12)$$

$$\mathrm{Tg}\left(\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\;\;\alpha_q\right)=$$

$$=-\frac{\mathrm{Tg}\left(-\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\;\;\alpha_q\right)}{1-\left(\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}\right)\mathrm{Tg}\left(-\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\;\;\alpha_q\right)}, \qquad (6.6.13)$$

$$\mathrm{Tg}\left(-\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\alpha_q\right)=\frac{\mathrm{Sin}\left(-\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\;\;\alpha_q\right)}{\mathrm{Cos}\left(-\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\;\;\alpha_q\right)}, \qquad (6.6.14)$$

из которых следует, что функции $\mathrm{Cos}\left(\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\;\;\alpha_q\right)$ и $\mathrm{Tg}\left(\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\alpha_q\right)$ не являются симметричными относительно замены α_q на $\left(-\alpha_q\right)$.

Учитывая формулы обобщенных тригонометрических функций, из (5.4.45) и (5.4.46) вытекают соответствующие матричные представления групп мер информаций

$$\mathbf{A}\left(\alpha_q\right)=e^{-\nu\alpha_q}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} \left[\begin{gathered}\mathrm{Cos}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}}\alpha_q\right)+\\ +\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}\mathrm{Sin}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}}\alpha_q\right)\end{gathered}\right] & \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}}\mathrm{Sin}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}}\alpha_q\right) \\ \sqrt{\frac{2}{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}}\mathrm{Sin}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}}\alpha_q\right) & \mathrm{Cos}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}}\alpha_q\right)\end{pmatrix}, \qquad (6.6.15)$$

$$\mathbf{A}\left(\alpha'_q\right) = e^{-\nu\alpha'_q} \times$$

$$\times\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Cos}\left(\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}}\alpha'_q\right) - \\ -\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}\,\mathrm{Sin}\left(\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}}\alpha'_q\right) \end{bmatrix} & -\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}}\,\mathrm{Sin}\left(\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}}\alpha'_q\right) \\ -\sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}}\,\mathrm{Sin}\left(\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}}\alpha'_q\right) & \mathrm{Cos}\left(\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}}\alpha'_q\right) \end{pmatrix}. \quad (6.6.16)$$

Далее для случая группы энтропий определим двумерное пространство с координатными осями η и ξ. Произвольная точка в этой системе координат, заданная радиус-вектором $\vec{\mathbf{R}} = (\eta, \xi)$, определяется расстоянием или длиной $\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|$ от центра координат и углом α_q, что отражается соотношениями

$$\begin{aligned} \eta &= e^{-\nu\alpha_q}\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|\mathrm{Cos}\left(\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\ \alpha_q\right), \\ \xi &= e^{-\nu\alpha_q}\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|\mathrm{Sin}\left(\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\ \alpha_q\right). \end{aligned} \qquad (6.6.17)$$

Тогда получим выражение

$$\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\| = F(\eta,\xi) = \exp\left[\frac{\nu}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\mathrm{arctg}\left(\frac{\xi\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)/2\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}{\eta+\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)\xi/2\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}\right)\right]\times$$

$$\times\sqrt{\eta^2+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}\eta\xi+\xi^2}, \qquad (6.6.18)$$

с эквивалентной формой

$$\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\| = F(\eta,\xi) = \eta\exp\left[\frac{\nu}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\mathrm{arctg}\left(\frac{H\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)/2}{1+\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)H/2}\right)\right]\times$$

$$\times\sqrt{1+\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)H+\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)H^2/2} =$$

$$= \eta\left\{\exp\left[2\nu\,\mathrm{ArcTg}\left(\sqrt{-\omega}H\right)\right]\right\}\sqrt{1+\varepsilon H-\omega H^2}\ , \qquad (6.6.19)$$

где $\mathrm{Tg}\left(\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad \alpha_q\right)=\xi/\eta=\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\quad H$.

Преобразование координат (6.6.17) при повороте системы координат на угол α_q

$$\begin{pmatrix}\xi'\\ \eta'\end{pmatrix}=e^{-\nu\alpha_q}\begin{pmatrix}\left[\begin{array}{l}\mathrm{Cos}\left(\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}}\alpha_q\right)+\\ +\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}\,\mathrm{Sin}\left(\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}}\alpha_q\right)\end{array}\right] & \mathrm{Sin}\left(\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}}\alpha_q\right)\\ \mathrm{Sin}\left(\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}}\alpha_q\right) & \mathrm{Cos}\left(\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}}\alpha_q\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\quad(6.6.20)$$

оставляет форм-инвариантным выражение (6.6.18).

Для рассматриваемой системы координат имеем вместо матрицы (5.4.41) следующее матричное представление

$$\mathbf{A}(H)=\exp\left[-\frac{2\nu}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\operatorname{arctg}\left(\frac{H\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)/2}{1+H\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)/2}\right)\right]\times$$

$$\times\begin{pmatrix}\dfrac{1+\dfrac{H\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)}{\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}}{\sqrt{1+\dfrac{H\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)}{\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}-H^2}} & \dfrac{H\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}{\sqrt{1+\dfrac{H\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)}{\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}-H^2}}\\ \dfrac{H\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}{\sqrt{1+\dfrac{H\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)}{\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}-H^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{H\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)}{\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}}-H^2}}\end{pmatrix},\quad(6.6.21)$$

которое и дает преобразование координат (6.6.20). В итоге соотношения (6.6.17) запишутся так:

$$\frac{\eta}{\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|}=\exp\left[\frac{\nu}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\operatorname{arctg}\left(\frac{H\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)}{1+\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)H/2}\right)\right]\times$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{1+\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)H+\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)H^2/2}}\ , \qquad (6.6.22)$$

$$\frac{\xi}{\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|}=\exp\left[\frac{\nu}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\operatorname{arctg}\left(\frac{H\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)}{1+\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)H/2}\right)\right]\times$$
$$\times\frac{\sqrt{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)/2}\ \ H}{\sqrt{1+\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)H+\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)H^2/2}}\ , \qquad (6.6.23)$$

а преобразования величин $\left(\eta/\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|\ ,\ \xi/\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|\right)$ посредством матрицы (6.6.21) дают новые значения энтропии, удовлетворяющей закону (5.3.4).

Аналогично определяются формулы для группы информаций различия.

Рассматриваемая двумерная геометрия мер информации есть геометрия плоского и глобально анизотропного метрического пространства Минковского [40] с метрической функцией (6.6.18). Анизотропия пространства характеризуется параметрами ν и ε. Преобразование координат (6.6.20) реализует движение пространства.

Метрическая функция плоского и глобально анизотропного пространства Минковского при условиях $\nu=r\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)/2$, $\varepsilon_2=\gamma\varepsilon_1$ и $\varepsilon_1=1-q$ имеет следующий вид

$$\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|=F\left(\eta,\xi\right)=\exp\left[\frac{r}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\xi\left(1+\gamma\right)/2\sqrt{\left(1+\gamma^2\right)/2}}{\eta+\xi\left(1-\gamma\right)/2\sqrt{\left(1+\gamma^2\right)/2}}\right)\right]\times$$
$$\times\sqrt{\eta^2+\frac{1-\gamma}{\sqrt{\left(1+\gamma^2\right)/2}}\eta\xi+\xi^2} \qquad (6.6.24)$$

для физической безразмерной энтропии в **Типе IIIC:**

$$H_{q,\gamma}^{phys}=\frac{1}{1-q}\left\{\frac{\operatorname{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{\frac{1+\gamma}{2}}\right]}{\left[\frac{1+\gamma}{2}-\frac{1-\gamma}{2}\operatorname{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{\frac{1+\gamma}{2}}\right]\right]}\right\}. \qquad (6.6.25)$$

Определим уравнение индикатрисы [40]

$$F(\eta,\xi)=1, \qquad (6.6.26)$$

которая представляет собой в двумерном пространстве выпуклую и замкнутую кривую. Радиус-вектор $\vec{\mathbf{R}}$ пересекает эту линию в одной, и только одной, точке.

На рис. 6.6 приведены индикатрисы при $r=0$. Линии *1* и *2* соответствуют $\gamma=1$ и $\gamma=1/2$. Как видно, изменение формы от окружности существенно зависит от параметра γ. Изменение параметра r приводит лишь к растяжению-сжатию исходной зависимости.

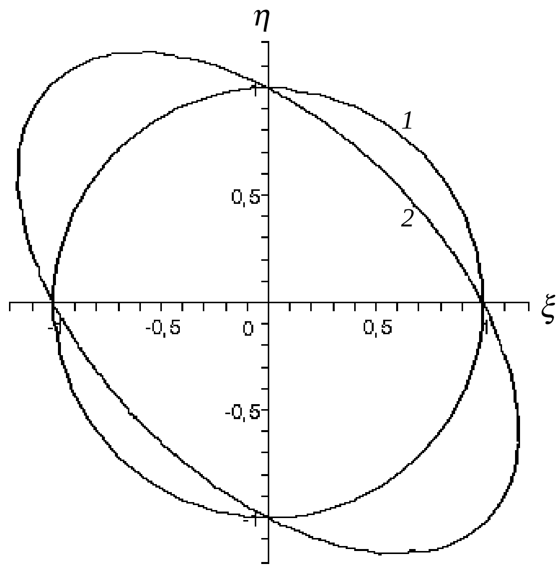


Рис. 6.6. Индикатрисы для **Типа IIIC**:
1 – $(\gamma=1)$, *2* – $(\gamma=1/2)$

Если $r=0$ и $\gamma=1$, то индикатриса является единичной окружностью. Из (6.6.24) вытекает метрическая функция, равная длине радиус-вектора в изотропной псевдоевклидовой геометрии:

$$\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\| = F(\eta,\xi) = \sqrt{\eta^2+\xi^2}\ , \qquad (6.6.27)$$

а из (6.6.25) получим выражение энтропии в **Типе IIIB**

$$H_{q,\gamma}^{phys} = \frac{1}{1-q}\,\mathrm{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)\right]. \qquad (6.6.28)$$

В этом случае обобщенные тригонометрические функции совпадают с тригонометрическими (круговыми) функциями и из (6.5.1) – (6.5.4) имеем формулы

$$\sin\left[(1-q)\alpha_q\right] = \frac{(1-q)H}{\sqrt{1+(1-q)^2 H^2}} = \sin\left(\ln\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}\right), \qquad (6.6.29)$$

$$\cos\left[(1-q)\alpha_q\right] = \frac{1}{\sqrt{1+(1-q)^2 H^2}} = \cos\left(\ln\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}\right), \qquad (6.6.30)$$

$$\mathrm{tg}\left[(1-q)\alpha_q\right] = (1-q)H = \mathrm{tg}\left(\ln\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}\right), \qquad (6.6.31)$$

$$\mathrm{ctg}\left[(1-q)\alpha_q\right] = \frac{1}{(1-q)H} = \mathrm{ctg}\left(\ln\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}\right). \qquad (6.6.32)$$

В теории информации используются нормированные меры. Поэтому для них и рассмотрим отличительные свойства энтропий в анизотропном и изотропном случаях геометрий. На рис. 6.7 представлены зависимости нормированной энтропии в **Типе IIIC:**

$$H_{q,\gamma}=\frac{(1+\gamma)-(1-\gamma)\operatorname{tg}\left[(1+\gamma)(1-q)(\ln 2)/2\right]}{\operatorname{tg}\left[(1+\gamma)(1-q)(\ln 2)/2\right]}\times$$

$$\times\frac{\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(1+\gamma)\ln\left(\sum_i^m p_i^q\right)\right]}{(1+\gamma)-(1-\gamma)\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(1+\gamma)\ln\left(\sum_i^m p_i^q\right)\right]}\ ,\quad \sum_i^m p_i=1 \qquad (6.6.33)$$

от распределения при $m=2$, $q=2$ и $p_1=p$. Линии *1, 2* и *3* соответствуют значениям $\gamma=-4$, $\gamma=0$ и $\gamma=5/2$.

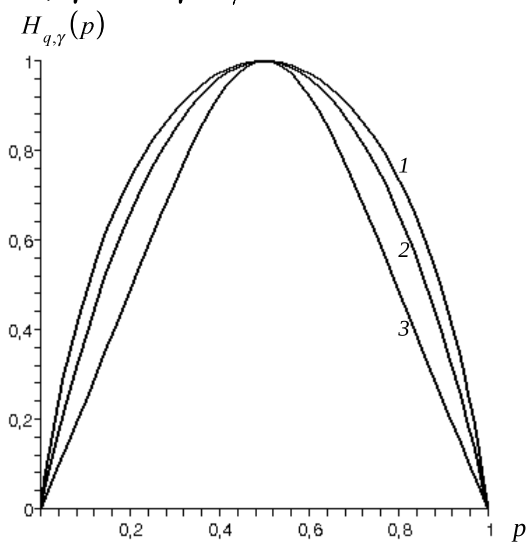


Рис. 6.7. Зависимости энтропии от распределения:
1 – $(\gamma=-4)$, *2* – $(\gamma=0)$, *3* – $(\gamma=5/2)$

6.7. Энтропия и информация различия в евклидовой геометрии мер информации

Рассмотрим некоторые свойства нормированной энтропии и информации различия

$$H_q(p)=\frac{\operatorname{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^q\right)\right]}{\operatorname{tg}\left[(1-q)\ln 2\right]},\ \sum_i^m p_i=1, \qquad (6.7.1)$$

$$I_q(p:u)=\frac{\operatorname{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right)\right]}{\operatorname{tg}\left[(q-1)\ln 2\right]},\ \sum_i^m u_i=1 \qquad (6.7.2)$$

в случае изотропной псевдоевклидовой геометрии мер информации.

1. Выпуклость и знакоопределенность. Энтропия и информация различия есть вещественные и выпуклые функционалы. Имеют место неравенства

$$H_q(p) > 0, \tag{6.7.3}$$

$$I_q(p:u) > 0 \quad (q > 0),\ I_q(p:u) < 0 \quad (q < 0), \tag{6.7.4}$$

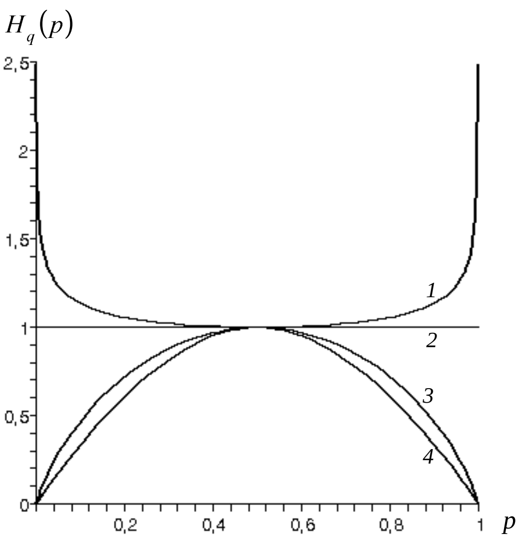
$$H_q(a_1 p_1 + a_2 p_2) \le a_1 H_q(p_1) + a_2 H_q(p_2),\ \sum_i^m p_{1i} = \sum_i^m p_{2i} = 1, \tag{6.7.5}$$

$$I_q\left[(a_1 p_1 + a_2 p_2) : u\right] \le a_1 I_q(p_1 : u) + a_2 I_q(p_2 : u), \tag{6.7.6}$$

где $a_1 + a_2 = 1$, $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$. При $q = 0$ из (6.7.1) получим равенство

$$H_0(p) = \frac{\operatorname{tg}(\ln m)}{\operatorname{tg}(\ln 2)}. \tag{6.7.7}$$

На рис. 6.8 представлены зависимости энтропии $H_q(p)$: а) от распределения p при значениях $m = 2$, $p_1 = p$, $q = -1/9;\ 0;\ 1;\ 3/2$ и б) от числа q при $m = 2$, $p_1 = 1/4$.



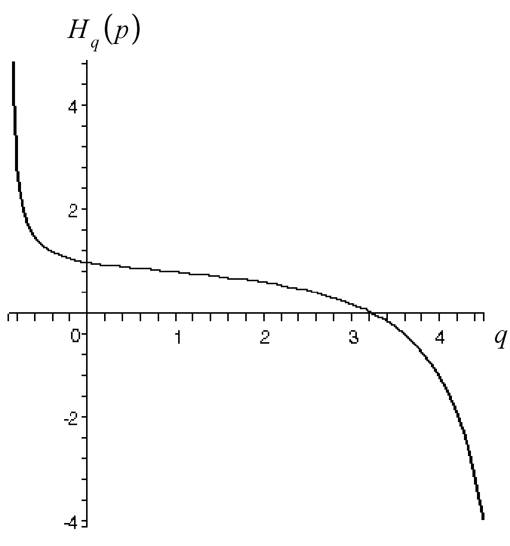
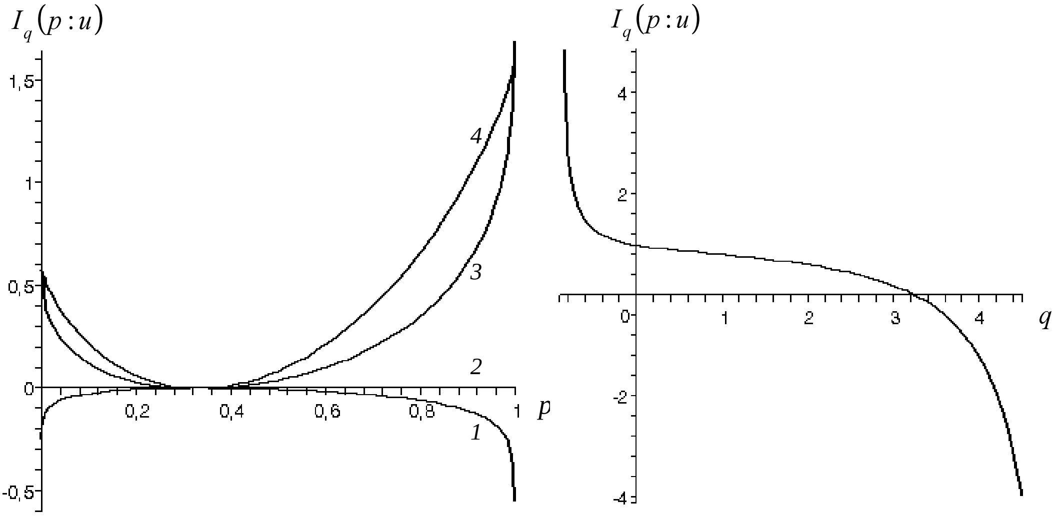


Рис. 6.8. Зависимость энтропии: *а* – от распределения:
1 – (q = –1/9); *2* – (q = 0); *3* – (q = 1); *4* – (q = 3/2) и *б* – от числа q

На рис. 6.9 приведены зависимости информации различия $I_q(p:u)$: а) от распределения при значениях $m=2$, $p_1=p$, $u_1=1/3$, $q=-1/10$; 0; $1/2$; 1 и б) от числа q при $m=2$, $p_1=1/4$, $u_1=1/3$.



а *б*

Рис. 6.9. Зависимость информации различия:
а – от распределения: *1* – ($q = -1/10$); *2* – ($q = 0$); *3* – ($q = 1/2$);
4 – ($q = 1$) и *б* – от числа q

2. Неаддитивность для независимых объектов. Пусть совместное состояние случайного объекта описывается нормированными совместными распределениями $p_{ij} = p_i p_j$ и $u_{ij} = u_i u_j$ при статистической независимости двух случайных объектов. Имеет место свойство неаддитивности мер информации

$$H_q(p_{12}) = \frac{H_q(p_1) + H_q(p_2)}{1 - \varepsilon_1^2 H_q(p_1) H_q(p_2)}, \tag{6.7.8}$$

$$I_q(p_{12}:u_{12}) = \frac{I_q(p_1:u_1) + I_q(p_2:u_2)}{1 - \varepsilon_1^2 I_q(p_1:u_1) I_q(p_2:u_2)}, \tag{6.7.9}$$

где квадрат параметра имеет значение $\varepsilon_1^2 = (1-q)^2$.

При $q=1$ из (6.7.8) и (6.7.9) следует аддитивность для энтропии Шеннона–Винера и информации различия Кульбака–Лейблера.

3. Энтропия равновероятного состояния. Экстремум энтропии при условии сохранения нормировки распределения p дает равновероятное распределение

$$p_i = \frac{1}{m}. \tag{6.7.10}$$

Экстремальное значение энтропии при равновероятном состоянии

$$H_q(p)_{ext} = \frac{\operatorname{tg}\left[(1-q)\ln m\right]}{\operatorname{tg}\left[(1-q)\ln 2\right]} \tag{6.7.11}$$

зависит от параметра q. При $q=1$ из (6.7.11) следует известное выражение

$$H_1(p)_{ext} = \lim_{q\to 1} H_q(p)_{ext} = \log_2 m. \tag{6.7.12}$$

4. Информация различия с $u_i = 1/m$. Информация различия в состоянии с распределением p относительно равновероятного состояния с $u_i = 1/m$ равняется

$$I_q(p:u) = \frac{\operatorname{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^q m_i^{q-1}\right)\right]}{\operatorname{tg}\left[(q-1)\ln 2\right]}. \tag{6.7.13}$$

Взаимосвязь между функционалами (6.7.1), (6.7.11) и (6.7.13) отражена в равенстве

$$I_q(p:u) = \frac{H_q(p)_{ext} - H_q(p)}{1+\varepsilon_1^2 H_q(p)_{ext}\, H_q(p)}. \tag{6.7.14}$$

Согласно неравенствам (6.7.4) из (6.7.14) вытекает

$$H_q(p) < H_q(p)_{ext} \quad \text{при } q>0, \tag{6.7.15}$$

$$H_q(p) > H_q(p)_{ext} \quad \text{при } q<0. \tag{6.7.16}$$

Следовательно, энтропия меньше (больше), чем энтропия равновероятного состояния при $q>0$ $(q<0)$.

5. Мера неточности. Меру статистической неточности определим функционалом

$$H_q(p:u) = \frac{H_q(p) + I_q(p:u)}{1-\varepsilon_1^2 H_q(p) I_q(p:u)}, \tag{6.7.17}$$

который соответствует закону композиции мер информации в тригонометрическом виде

$$\operatorname{tg}\left[\varepsilon_1\left(\alpha_q+\alpha'_q\right)\right]=\frac{\operatorname{tg}\left(\varepsilon_1\alpha_q\right)+\operatorname{tg}\left(\varepsilon_1\alpha'_q\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\varepsilon_1\alpha_q\right)\operatorname{tg}\left(\varepsilon_1\alpha'_q\right)} \qquad (6.7.18)$$

при сложении углов α_q и α'_q.

В пределе $q\to 1$ из (6.7.17) вытекает мера плотности Керриджа

$$H\left(p:u\right)=\lim_{q\to 1}H_q\left(p:u\right)=-\sum_i^m\left(\log_2 u_i\right)p_i\,. \qquad (6.7.19)$$

На рис. 6.10 представлены зависимости энтропии $H_q\left(p\right)$, информации различия $I_q\left(p:u\right)$ и меры неточности $H_q\left(p:u\right)$ от распределения при $m=2$, $q=2$, $p_1=p$ и а) $u_1=1/3$, б) $u_1=1/2$.

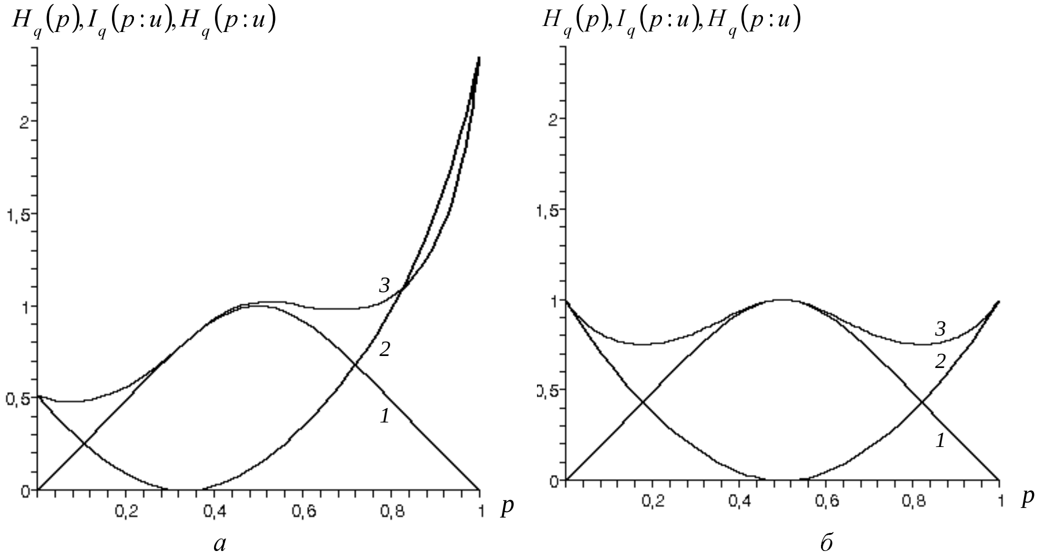


Рис. 6.10. Зависимости функционалов от распределения:
1 – энтропия $H_q\left(p\right)$, *2* – информация различия $I_q\left(p:u\right)$,
3 – мера неточности $H_q\left(p:u\right)$

6. Нормированность и размерность. Единица измерения информации в данной модели определяется одним битом. Связь между рассматриваемыми нормированными и физическими безразмерными мерами информации

$$H_q^{phys}(p)=\frac{1}{1-q}\operatorname{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^q\right)\right], \qquad (6.7.20)$$

$$I_q^{phys}(p:u)=\frac{1}{q-1}\operatorname{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right)\right] \qquad (6.7.21)$$

дается равенствами

$$H_q(p)=\frac{H_q^{phys}(p)}{H_q^{phys}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)},\ H_q^{phys}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{1-q}\operatorname{tg}\left[(1-q)\ln 2\right], \qquad (6.7.22)$$

$$I_q(p:u)=\frac{I_q^{phys}(p:u)}{I_q^{phys}\left(1,0:\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)},\ I_q^{phys}\left(1,0:\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{q-1}\operatorname{tg}\left[(q-1)\ln 2\right]. \qquad (6.7.23)$$

7. Информация Фишера. Предельное значение информации различия в случае распределений $p_i(\theta)$ и $u_i(\theta)=p_i(\theta+\delta\theta)$ имеет вид

$$I_q(\theta:\theta+\delta\theta)=\frac{\operatorname{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^q(\theta)\,p_i^{1-q}(\theta+\delta\theta)\right)\right]}{\operatorname{tg}\left[(q-1)\ln 2\right]}=$$

$$=-\frac{1}{\operatorname{tg}\left[(q-1)\ln 2\right]}\frac{(\delta\theta)^2}{2}\sum_i^m\frac{\partial^2 p^{1-q}(\theta)}{\partial\theta^2}p_i^q(\theta)=$$

$$=\frac{q(1-q)}{2\operatorname{tg}\left[(q-1)\ln 2\right]}\Gamma_{\theta\theta}(\delta\theta)^2, \qquad (6.7.24)$$

где величина

$$\Gamma_{\theta\theta}=\sum_i^m\left[\frac{\partial\ln p_i(\theta)}{\partial\theta}\right]^2 p_i(\theta) \qquad (6.7.25)$$

есть информация Фишера о величине нефлуктуирующего параметра θ в теории оценивания математической статистики [32, 33, 39, 74, 75].

8. *f*-энтропия и *f* -информация различия. Энтропия и информация различия представляют собой функции полунорм распределений:

$$H_f(p) = f\left[N_{q-1}(p)\right],\ f = \frac{\operatorname{tg}\left\{\ \ln\left[N_{q-1}(p)\right]^{q-1}\right\}}{\operatorname{tg}\left\{\ (1-q)\ln 2\right\}}, \qquad (6.7.26)$$

$$I_f(p:u) = f\left[N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)\right],\ f = \frac{\operatorname{tg}\left\{\ln\left[N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)\right]^{q-1}\right\}}{\operatorname{tg}\left\{(q-1)\ln 2\right\}}. \qquad (6.7.27)$$

6.8. Геометрические представления мер информации в моделях Хаврда–Чарват–Дароши и Реньи

Согласно результатам раздела 5.3, запишем закон композиции энтропий Хаврда–Чарват–Дароши в **Типе IA**

$$H = H_1 \circ H_2 = H_1 + H_2 + \varepsilon H_1 H_2, \qquad (6.8.1)$$

где в (5.3.4) принимается $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 = \varepsilon = 1 - q$ для физической безразмерной энтропии. Для независимых объектов справедливо неравенство $-1/\varepsilon < H < \infty$. Значение $(-1/\varepsilon)$ не является элементом группы, так как обратный элемент от этого значения остается неопределенным ввиду нарушения дополнительного условия в определении (5.2.9). Однако выполняется формальное соотношение

$$H \circ \left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) = -\frac{1}{\varepsilon} \quad \text{при } H \neq -\frac{1}{\varepsilon}, \qquad (6.8.2)$$

из которого следует, что величина $(-1/\varepsilon)$ есть инвариант для всех независимых объектов. Из (5.2.12) – (5.2.33) имеем равенства

$$\frac{1}{(-H)} - \frac{1}{H^{-1}} = \varepsilon, \quad (1+\varepsilon H)\left(1+\varepsilon H^{-1}\right) = 1, \qquad (6.8.3)$$

$$1 + \varepsilon H = \left(1+\varepsilon H_1\right)\left(1+\varepsilon H_2\right), \qquad (6.8.4)$$

$$1 + \varepsilon\left(H_1 \circ H_2 \circ H_3\right) = \left(1+\varepsilon H_1\right)\left(1+\varepsilon H_2\right)\left(1+\varepsilon H_3\right), \qquad (6.8.5)$$

$$H_1 = H \circ H_2^{-1} = \frac{H - H_2}{1+\varepsilon H_2}, \qquad (6.8.6)$$

$$H_2 = H_1^{-1} \circ H = \frac{H - H_1}{1 + \varepsilon H_1}, \tag{6.8.7}$$

$$\frac{1}{H_1^{-1} \circ H_2} + \frac{1}{H_2^{-1} \circ H_1} = -\varepsilon, \; H^{(2)} = H \circ H = 2H + \varepsilon H^2, \tag{6.8.8}$$

$$H = \frac{H^{(2)}}{1 + \sqrt{1 + \varepsilon\left(H^{(2)}\right)}}, \; \sqrt{1 + \varepsilon\left(H^{(2)}\right)} = 1 + \varepsilon H, \tag{6.8.9}$$

$$\begin{aligned} H^{(2)} &= \left(H_1 \circ H_2\right) \circ \left(H_1 \circ H_2\right) = H_1^{(2)} \circ H_2^{(2)} = \\ &= H_1^{(2)} + H_2^{(2)} + \varepsilon H_1^{(2)} H_2^{(2)} \quad . \end{aligned} \tag{6.8.10}$$

Используем выражения полунормы (6.2.1) и представим энтропию Хаврда–Чарват–Дароши в виде

$$H = \frac{1}{\varepsilon}\left\{\left[N_{q-1}(p)\right]^{-\varepsilon} - 1\right\} = \frac{1}{(\varepsilon/2)} e^{\varepsilon \alpha_q/2} \sinh\left(\varepsilon \alpha_q/2\right), \tag{6.8.11}$$

что, в итоге приведет к выражениям

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon H}} = e^{-\varepsilon \alpha_q/2}, \; \frac{H}{\sqrt{1 + \varepsilon H}} = \frac{1}{(\varepsilon/2)} \sinh\left(\varepsilon \alpha_q/2\right). \tag{6.8.12}$$

Из (5.4.41) и (5.4.42) имеем матричное представление групп мер информации

$$\mathbf{A}(H) = \left(1 + \varepsilon H\right)^{-\frac{\nu}{\varepsilon}} \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \varepsilon H} & 0 \\ \dfrac{H}{\sqrt{1 + \varepsilon H}} & \dfrac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon H}} \end{pmatrix}, \tag{6.8.13}$$

$$\mathbf{A}(I) = \left(1 - \varepsilon I\right)^{\frac{\nu}{\varepsilon}} \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \varepsilon I} & 0 \\ \dfrac{I}{\sqrt{1 - \varepsilon I}} & \dfrac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon I}} \end{pmatrix}, \tag{6.8.14}$$

которое представим в тригонометрической форме:

$$\mathbf{A}\left(\alpha_q\right)=e^{-\nu\alpha_q}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} \begin{bmatrix}\cosh\left(\varepsilon\alpha_q/2\right)+\\ +\sinh\left(\varepsilon\alpha_q/2\right)\end{bmatrix}=e^{\varepsilon\alpha_q/2} & 0 \\ \dfrac{1}{(\varepsilon/2)}\sinh\left(\varepsilon\alpha_q/2\right) & \begin{bmatrix}\cosh\left(\varepsilon\alpha_q/2\right)-\\ -\sinh\left(\varepsilon\alpha_q/2\right)\end{bmatrix}=e^{-\varepsilon\alpha_q/2}\end{pmatrix}, \quad (6.8.15)$$

$$\mathbf{A}\left(\alpha'_q\right)=e^{\nu\alpha'_q}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} \begin{bmatrix}\cosh\left(\varepsilon\alpha'_q/2\right)+\\ +\sinh\left(\varepsilon\alpha'_q/2\right)\end{bmatrix}=e^{\varepsilon\alpha'_q/2} & 0 \\ -\dfrac{1}{(\varepsilon/2)}\sinh\left(\varepsilon\alpha'_q/2\right) & \begin{bmatrix}\cosh\left(\varepsilon\alpha'_q/2\right)-\\ -\sinh\left(\varepsilon\alpha'_q/2\right)\end{bmatrix}=e^{-\varepsilon\alpha'_q/2}\end{pmatrix}. \quad (6.8.16)$$

Введем представления абелевой группы энтропий функциями $\varphi_1(H)$ и $\varphi_2(H)$, которые находятся в следующем соответствии с элементами энтропий

$$\varphi_1(H)=\varphi_1\left(H_1\circ H_2\right)=\varphi_1\left(H_1\right)\varphi_2\left(H_2\right)+\varphi_1\left(H_2\right)\varphi_2\left(H_1\right), \quad (6.8.17)$$

$$\varphi_2(H)=\varphi_2\left(H_1\circ H_2\right)=\varphi_2\left(H_1\right)\varphi_2\left(H_2\right). \quad (6.8.18)$$

Функции с условиями $\varphi_1(0)=0$ и $\varphi_2(0)=1$ удовлетворяют следующему равенству

$$\varphi_2^2(H)+\varepsilon\varphi_1(H)\varphi_2(H)=1. \quad (6.8.19)$$

Тогда при известном законе композиции энтропий (6.8.1) однозначно вытекают выражения

$$\varphi_1(H)=\frac{\varepsilon H/2}{\sqrt{1+\varepsilon H}},\ \varphi_2(H)=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H}}, \quad (6.8.20)$$

равные гиперболической и показательной функциям (6.8.12).

Для энтропии Хаврда–Чарват–Дароши имеем функцию

$$H=\frac{\varphi_1(H)}{(\varepsilon/2)\varphi_2(H)}=\frac{1}{(\varepsilon/2)}\frac{\operatorname{tgh}\left(\varepsilon\alpha_q/2\right)}{1-\operatorname{tgh}\left(\varepsilon\alpha_q/2\right)}, \quad (6.8.21)$$

где гиперболический тангенс при сложении аргументов равняется

$$\operatorname{tgh}\left[\varepsilon\left(\alpha_{q1}+\alpha_{q2}\right)\Big/2\right]=\frac{\operatorname{tgh}\left(\varepsilon\alpha_{q1}/2\right)+\operatorname{tgh}\left(\varepsilon\alpha_{q2}/2\right)}{1+\operatorname{tgh}\left(\varepsilon\alpha_{q1}/2\right)\operatorname{tgh}\left(\varepsilon\alpha_{q2}/2\right)}. \qquad (6.8.22)$$

Далее для случая группы энтропий определим двумерное пространство с координатными осями η и ξ. Произвольная точка в этой системе координат, заданная радиус-вектором $\vec{\mathbf{R}}=(\eta,\xi)$, определяется расстоянием или длиной $\|\vec{\mathbf{R}}\|$ от центра координат и углом α_q, что отражается соотношениями

$$\eta=e^{-\nu\alpha_q}\|\vec{\mathbf{R}}\|\left[\cosh\left(\varepsilon\alpha_q/2\right)+\sinh\left(\varepsilon\alpha_q/2\right)\right], \qquad (6.8.23)$$

$$\xi=e^{-\nu\alpha_q}\|\vec{\mathbf{R}}\|\sinh\left(\varepsilon\alpha_q/2\right). \qquad (6.8.24)$$

Тогда получим выражение

$$\|\vec{\mathbf{R}}\|=F(\eta,\xi)=\left(\frac{\eta+\varepsilon\xi}{\eta}\right)^{\frac{\nu}{\varepsilon}}\sqrt{\eta^2+\varepsilon\eta\xi} \qquad (6.8.25)$$

с эквивалентной формой

$$\left|\vec{\mathbf{R}}\right|=\eta(1+\varepsilon H)^{\frac{\nu}{\varepsilon}}\sqrt{1+\varepsilon H}=$$
$$=\eta\left\{\exp\left[\nu\operatorname{arctgh}\left(\frac{\varepsilon H/2}{1+\varepsilon H/2}\right)\right]\right\}\sqrt{1+\varepsilon H}\ , \qquad (6.8.26)$$

где $\operatorname{tgh}\left(\varepsilon\alpha_q/2\right)\Big/\left[1-\operatorname{tgh}\left(\varepsilon\alpha_q/2\right)\right]=\xi/\eta=\varepsilon H/2$.

Преобразование координат

$$\begin{pmatrix}\xi'\\ \\ \eta'\end{pmatrix}=e^{-\nu\alpha_q}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}\begin{bmatrix}\cosh\left(\varepsilon\alpha_q/2\right)+\\ +\sinh\left(\varepsilon\alpha_q/2\right)\end{bmatrix}=e^{\varepsilon\alpha_q/2} & 0\\ \frac{1}{(\varepsilon/2)}\sinh\left(\varepsilon\alpha_q/2\right) & \begin{bmatrix}\cosh\left(\varepsilon\alpha_q/2\right)-\\ -\sinh\left(\varepsilon\alpha_q/2\right)\end{bmatrix}=e^{-\varepsilon\alpha_q/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \\ \eta\end{pmatrix} \qquad (6.8.27)$$

при повороте исходной системы координат на угол α_q оставляют форм-инвариантным значение расстояния (6.8.25).

Аналогично определяются формулы для группы информаций различия.

Рассматриваемые двумерные геометрии мер информации есть геометрии плоских и глобально анизотропных метрических пространств Минковского [40] с метрической функцией (6.8.25). Анизотропия пространств характеризуется параметрами ν и ε. Преобразование координат (6.8.27) реализует движение пространства.

Метрическая функция плоского и глобально анизотропного пространства Минковского для модели Хаврда–Чарват–Дароши при условии $\nu = r\varepsilon/2$ имеет следующий вид

$$\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\| = F(\eta,\xi) = \left(\frac{\eta+\varepsilon\xi}{\eta}\right)^{r/2}\sqrt{\eta^2+\varepsilon\eta\xi}\,. \qquad (6.8.28)$$

Определим уравнение индикатрисы [40]

$$F(\eta,\xi) = 1\,. \qquad (6.8.29)$$

Если $r = 0$, то индикатриса исследуемой геометрии является кривой, уравнение которой есть

$$\xi = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{\eta} - \eta\right). \qquad (6.8.30)$$

Из (6.8.28) вытекает метрическая функция, равная длине радиус-вектора в анизотропной геометрии

$$\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\| = F(\eta,\xi) = \sqrt{\eta^2+\varepsilon\eta\xi}\,. \qquad (6.8.31)$$

На рис. 6.11 приведены индикатрисы для а) $r = 0$ и б) $r = 4/5$. Линии *1*, *2* и *3* соответствуют $q = -1/2;\ \ 1/2$ и 1.

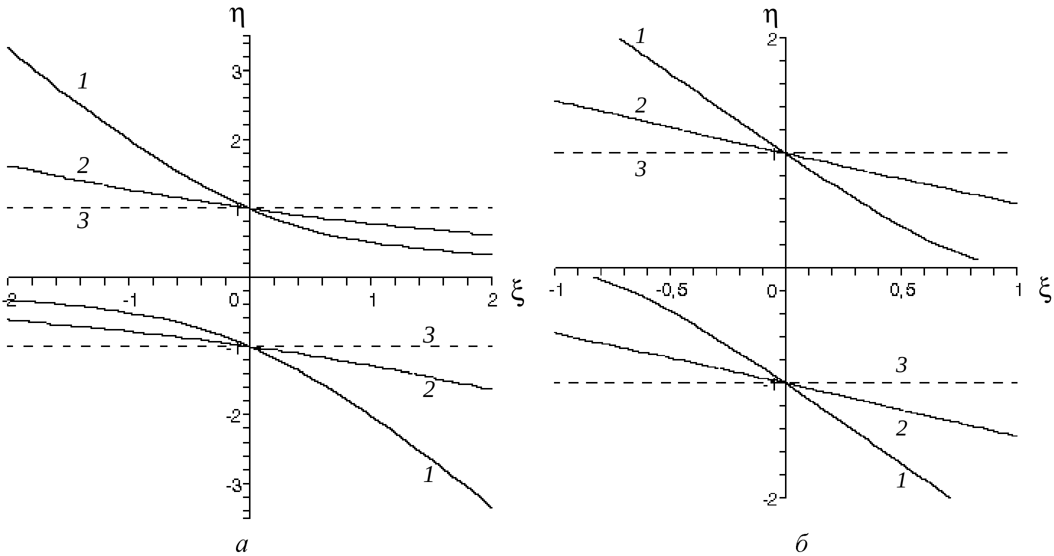


Рис. 6.11. Индикатрисы для **Типа IA**:
1 – (q = –1/2), *2* – (q = 1/2), *3* – (q = 1)

Геометрическое представление групп мер информации Реньи в **Типе IV** отображается равенствами

$$H = \alpha_q, \; I = -\alpha'_q. \tag{6.8.32}$$

Длина радиус-вектора в плоской и глобально анизотропной геометрии мер информации определяется метрической функцией

$$\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\| = F(\eta, \xi) = \sqrt{\eta^2} \exp\left(\frac{r}{2}\frac{\xi}{\eta}\right) \tag{6.8.33}$$

с эквивалентной формой

$$\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\| = \sqrt{\eta^2} \exp\left(\frac{rH}{2}\right), \tag{6.8.34}$$

где $\alpha_q = \xi/\eta$ и $\nu = r/2$.

Согласно (5.4.41), имеем преобразования координат

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = e^{-\nu\alpha_q} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha_q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \tag{6.8.35}$$

в геометрии Минковского. Преобразования реализуют движение пространства, а при $r = 0$ рассматриваемая метрическая функция совпадает с длиной радиус-вектора в галилеевой геометрии

$$\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\| = \sqrt{\eta^2}\,. \tag{6.8.36}$$

На рис. 6.12 приведена индикатрисы при $r = -2/3;\ 0;\ 1/3$.

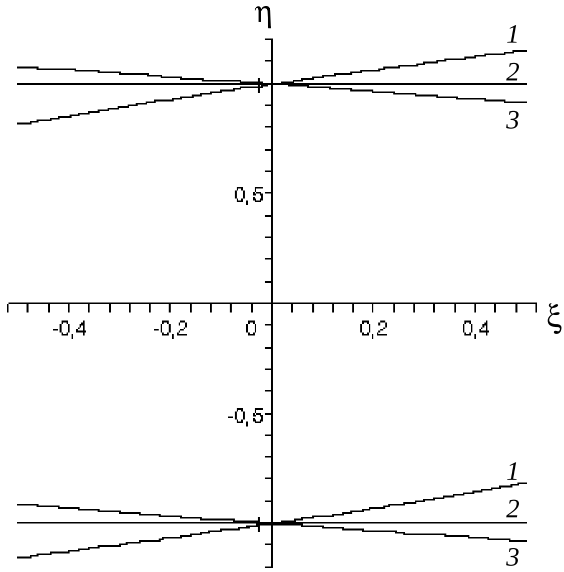


Рис. 6.12. Индикатрисы для **Типа IV**:
1 – (r = –2/3), *2* – (r = 0), *3* – (r = 1/3)

Тип II общей классификации мер информации здесь не рассматриваем, поскольку дискриминант трёхчлена $1 + \varepsilon H - \omega H^2$ (или определитель квадратичной формы) равняется нулю и имеем вырожденный случай, не представляющий интереса для физических приложений.

Приведенные геометрические представления для рассматриваемых **Типов** мер информации совпадают с двумерными пространствами Минковского в обобщениях специальной теории относительности [24, 132, 133], если величины $\eta = ct$ и $\xi = x$ характеризуют физическое время и одномерное расстояние. Закон композиции энтропий имеет одинаковую форму с законом композиции одномерных однонаправленных анизотропных скоростей в псевдоевклидовой, евклидовой и галилеевой геометриях.