Глава 5

ОБЩАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ МЕР ИНФОРМАЦИЙ

Излагается основной метод, использующий групповые свойства мер информаций. Исследуются типы энтропий и информаций различия, которые вытекают из закона композиции элементов группы, учитывающего квадратичную нелинейность. Первые результаты в этом направлении были даны в монографии [21] и статьях [22-24] автора и способствовали развитию групповых методов в обобщенной теории информации. Приводится общая классификация мер информаций, доведенная до естественных границ. Изучаются представления рассматриваемых групп мер. Внесены важные идеи и получены новые глубокие результаты.

5.1. Группы и представления групп

Рассмотрим общие сведения о группах, необходимые для задач обобщенной теории информации.

Пусть имеется непустое множество элементов для независимых статистических объектов. В зависимости от приложений оно представляет совокупность энтропий, информаций различия, полунорм распределений и других величин.

Определение 1. Группой G называется множество элементов группы, если выполняются следующие условия (групповые аксиомы):

1. Определен закон композиции, то есть бинарная алгебраическая операция, которая каждой упорядоченной паре элементов A и B из G единственным образом сопоставляется определенный элемент $C = A \circ B$ из G. В общем случае $A \circ B$ и $B \circ A$ являются различными и операция, называемая произведением элементов, не обладает переместительным, или коммутативным, свойством.

2. Операция ассоциативна, то есть $(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C) = A \circ B \circ C$ для произвольных A, B и C из G.

3. В группе G имеется единичный элемент, то есть такой элемент E, что $A \circ E = E \circ A = A$ для произвольного A из G.

4. В группе G имеется обратный элемент, то есть для произвольного A из G существует такой элемент, обозначаемый в виде A^{-1}, что $A \circ A^{-1} = A^{-1} \circ A = E$.

Аксиомы 3 и 4 равносильны одной аксиоме $3'$: Для двух произвольных элементов A и B из G всегда существуют такие элементы X и Y, которые называются левым частным и правым частным при делении B на A, что $A \circ X = B$ и $Y \circ A = B$.

Из групповых аксиом следует, что в группе имеется только один единичный элемент, для каждого элемента из G существует только один обратный элемент. Если $C = A \circ B$, то $C^{-1} = B^{-1} \circ A^{-1}$ в силу ассоциативности закона композиции в группе. Всегда справедливо $A \circ B \neq A \circ C$ и , если $B \neq C$.

При выполнении коммутативности закона композиции $A \circ B \neq A \circ C$ для произвольных A и B из G имеем абелеву группу

Определение 2. Группы называются изоморфными, если каждому элементу из G взаимно однозначно поставлен в соответствие определенный элемент из $\tilde{\mathrm{G}}$ таким образом, что бинарная операция $C = A \circ B$ из G соответствует бинарной операции $\tilde{C} = \tilde{A} \circ \tilde{B}$ соответствующих элементов из $\tilde{\mathrm{G}}$.

Определение 3. Элемент A' называется сопряженным с элементом A, если справедливо равенство $A' = C^{-1} \circ A \circ C$ для A, A' и C из G.

Из приведенного определения следует, что элемент A также является сопряженным с элементом A'. Элемент, обратный элементу, сопряженному с A, является сопряженным с элементом A^{-1}, так как справедливо равенство $(A')^{-1} = C^{-1} \circ A^{-1} \circ C$. Если $A' = A$ для любого элемента C из G, то A называется самосопряженным элементом.

Определение 4. Элемент $A^{(n)} = A \circ A \circ ... \circ A$, являющийся композицией n элементов, есть n-я степень элемента A. Справедливо $A^{(n)} \circ A^{(m)} = A^{(n+m)}$, $A^{(n)} \circ A^{(-m)} = A^{(n-m)}$, $\left[A^{(n)}\right]^{(m)} = A^{(nm)}$ и $\left[A^{(-n)}\right]^{(-1)} = A^{(n)}$

с $A^{(-m)} = A^{-1} \circ A^{-1} \circ \ldots \circ A^{-1}$. В частности, $A^{(n)} \circ A^{(-n)} = A^{(0)} = E$ и при $n = 1$ имеем $A^{(1)} = A$ и $A^{(-1)} = A^{-1}$

Определение 5. Всякое непустое подмножество M группы G, которое само по себе является группой относительно бинарной операции, называется подгруппой группы G.

Поскольку к M принадлежит единица группы G, то оставшаяся часть группы G не образует группу. Сама группа G является своей подгруппой и содержит единичную подгруппу, состоящую только из элемента E. Эти подгруппы называются несобственными, а остальные подгруппы – собственными.

Определение 6. Всякая группа M конечных квадратных матриц $\mathbf{A}$, с не равным нулю определителем, на которую может быть взаимно однозначно отображена группа G, называется точным представлением группы G. Порядок n матриц из M называется степенью, или размерностью, представления.

Из определения 6 вытекает, что бинарной операции $A \circ B$ из G соответствует обычная операция умножения матриц $\mathbf{A}(A)\mathbf{A}(B) = \mathbf{A}(A \circ B)$ из M.

Наряду с представлением в виде матриц имеют место и другие представления группы G, например в виде функций $\varphi(A)$. Для них выполняется бинарная операция как обычная операция умножения $\varphi(A)\varphi(B) = \varphi(A \circ B)$ из группы F.

При выборе аддитивной записи для элементов группы G элемент E соответствует нулю группы, обозначаемому в виде 0. Для обратного элемента имеем противоположный элемент $(-a)$. Тогда групповые аксиомы запишутся так: $C = A + B$, $(A+B)+C = A+(B+C)$, $A + 0 = 0 + A = A$ и $A + (-A) = (-A) + A = 0$.

5.2. Закон композиции элементов групп мер

Рассмотрим абелеву группу энтропий с коммутативным законом композиции элементов $H_1 \circ H_2 = H_2 \circ H_1$. Положим, что в закон композиции входят только H_1, H_2 и их произведение $H_1 H_2$, определяющее квадратичную нелинейность. Приведем простой абстрактный вывод явного вида закона композиции элементов энтропий и его свойства.

Запишем закон в следующем виде:

$$H = H_1 \circ H_2 = \frac{H_1 + H_2\psi(H_1)}{1 + H_2 f(H_1)}. \qquad (5.2.1)$$

Используем условие коммутативности в (5.2.1) и получим соотношение

$$\frac{H_1 + H_2\psi(H_1)}{1 + H_2 f(H_1)} = \frac{H_2 + H_1\psi(H_2)}{1 + H_1 f(H_2)}, \qquad (5.2.2)$$

накладывающее ограничения на функции

$$\frac{\psi(H_1) - 1}{H_1} = \frac{\psi(H_2) - 1}{H_2} = \varepsilon, \qquad (5.2.3)$$

$$\frac{f(H_1)}{H_1} = \frac{f(H_2)}{H_2} = \omega. \qquad (5.2.4)$$

Здесь введены параметры ε и ω, независящие от энтропии. Подставляя функции $\psi(H_1)$ и $f(H_1)$ в (5.2.1), получим закон композиции [21, 23]

$$H = H_1 \circ H_2 = \frac{H_1 + H_2 + \varepsilon H_1 H_2}{1 + \omega H_1 H_2}, \qquad (5.2.5)$$

в котором степень неаддитивности характеризуется значениями параметров ε и ω.

Рассмотрим основные свойства определения (5.2.5).

1. Ассоциативность. Согласно аксиоме 2 выполняется свойство ассоциативности

$$H_1 \circ H_2 \circ H_3 = (H_1 \circ H_2) \circ H_3 = H_1 \circ (H_2 \circ H_3) =$$

$$= \frac{H_1 + H_2 + H_3 + \varepsilon(H_1H_2 + H_2H_3 + H_3H_1) + (\omega + \varepsilon^2)H_1H_2H_3}{1 + \omega(H_1H_2 + H_2H_3 + H_3H_1) + \varepsilon\omega H_1H_2H_3}. \qquad (5.2.6)$$

2. Единичный элемент. Согласно аксиоме 3 единичный элемент группы находим из формулы

$$H \circ E = \frac{H + E + \varepsilon HE}{1 + \omega HE} = H, \qquad (5.2.7)$$

которая дает значение $E = 0$. Таким образом, единичный элемент соответствует нулевому значению энтропии $H = 0$.

3. Обратный элемент. Согласно аксиоме 4 из формулы:

$$H \circ H^{-1} = \frac{H + H^{-1} + \varepsilon H H^{-1}}{1 + \omega H H^{-1}} = 0 \qquad (5.2.8)$$

вытекает выражение для обратного элемента

$$H^{-1} = -\frac{H}{1+\varepsilon H}, \ \left(1+\omega H H^{-1} \neq 0\right). \qquad (5.2.9)$$

4. Сопряженный элемент. Подставим в определение сопряженного элемента

$$H' = C^{-1} \circ H \circ C \qquad (5.2.10)$$

значение $C^{-1} = -C\left(1+\varepsilon C\right)^{-1}$ и получим

$$H' = H\ . \qquad (5.2.11)$$

Эта формула означает, что элементы группы энтропий являются самосопряженными.

5. Равенства. Используя закон композиции и приведенные свойства, находим следующие равенства

$$\frac{1}{(-H)} - \frac{1}{H^{-1}} = \varepsilon, \quad \left(1+\varepsilon H\right)\left(1+\varepsilon H^{-1}\right) = 1, \qquad (5.2.12)$$

$$\frac{1}{1+\omega H H^{-1}} = \frac{1+\varepsilon H}{1+\varepsilon H - \omega H^2} = \frac{1+\varepsilon H^{-1}}{1+\varepsilon H^{-1} - \omega\left(H^{-1}\right)^2}, \qquad (5.2.13)$$

$$\left(1+\varepsilon H - \omega H^2\right) = \frac{\left(1+\varepsilon H_1 - \omega H_1{}^2\right)\left(1+\varepsilon H_2 - \omega H_2{}^2\right)}{\left(1+\omega H_1 H_2\right)^2}, \qquad (5.2.14)$$

$$\frac{H}{\sqrt{1+\varepsilon H - \omega H^2}} = \frac{H_1 + H_2 + \varepsilon H_1 H_2}{\sqrt{1+\varepsilon H_1 - \omega H_1^2}\sqrt{1+\varepsilon H_2 - \omega H_2^2}}, \qquad (5.2.15)$$

$$1+\varepsilon H_1 - \omega H_1 H = \frac{1+\varepsilon H_1 - \omega H_1^2}{1+\omega H_1 H_2}, \qquad (5.2.16)$$

$$1+\varepsilon H_2 - \omega H_2 H = \frac{1+\varepsilon H_2 - \omega H_2^2}{1+\omega H_1 H_2}, \qquad (5.2.17)$$

$$1+\varepsilon H - \omega H^2 = \left(1+\varepsilon H_1 - \omega H_1 H\right)\left(1+\varepsilon H_2 - \omega H_2 H\right), \qquad (5.2.18)$$

$$\frac{1+\varepsilon H_1-\omega H_1 H}{1+\varepsilon H_1-\omega H_1^2}=\frac{1+\varepsilon H_2-\omega H_2 H}{1+\varepsilon H_2-\omega H_2^2}. \qquad (5.2.19)$$

Для трех энтропий имеем

$$\left(1+\omega H_1 H_2\right)^2\left[1+\omega\left(H_1\circ H_2\right)^2\right]$$

$$=\frac{\left(1+\varepsilon H_1-\omega H_1^2\right)\left(1+\varepsilon H_2-\omega H_2^2\right)\left(1+\varepsilon H_3-\omega H_3^2\right)}{\left[1+\omega\left(H_1H_2+H_2H_3+H_3H_1+\varepsilon H_1H_2H_3\right)\right]^2}. \qquad (5.2.20)$$

Если $H_3=H^{-1}=\left(H_1\circ H_2\right)^{-1}$, то из (5.2.20) и (5.2.6), соответственно, получим

$$\left[1+\omega\left(H_1H_2+H_2H^{-1}+H^{-1}H_1+\varepsilon H_1H_2H^{-1}\right)\right]=$$

$$=\left[\left(1+\varepsilon H_1-\omega H_1^2\right)\left(1+\varepsilon H_2-\omega H_2^2\right)\left(1+\varepsilon H^{-1}-\omega\left(H^{-1}\right)^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (5.2.21)$$

$$\left(H_1+H_2+H^{-1}\right)+\varepsilon\left(H_1H_2+H_2H^{-1}+H^{-1}H_1\right)+$$

$$+\left(\omega+\varepsilon^2\right)H_1H_2H^{-1}=0. \qquad (5.2.22)$$

Четыре энтропии удовлетворяют тождеству

$$\left(1+\omega H_1H_2\right)\left(1+\omega H_3H_4\right)\left[1+\omega\left(H_1\circ H_2\right)\left(H_3\circ H_4\right)\right]=$$

$$=\left(1+\omega H_2H_3\right)\left(1+\omega H_4H_1\right)\left[1+\omega\left(H_2\circ H_3\right)\left(H_4\circ H_1\right)\right]=$$

$$=\left(1+\omega H_3H_1\right)\left(1+\omega H_4H_2\right)\left[1+\omega\left(H_3\circ H_1\right)\left(H_4\circ H_2\right)\right]. \qquad (5.2.23)$$

В частности, при $H_1=H_3,\quad H_2=H_4$ тождество (5.2.23) принимает вид

$$\left(1+\omega H_1^2\right)\left(1+\omega H_2^2\right)\left[1+\omega\left(H_1\circ H_1\right)\left(H_2\circ H_2\right)\right]=$$

$$=\left(1+\omega H_1H_2\right)^2\left[1+\omega\left(H_1\circ H_2\right)^2\right]. \qquad (5.2.24)$$

Из (5.2.5) следует закон композиции энтропии H с H_2^{-1} и с H_1^{-1}:

$$H_1 = H \circ H_2^{-1} = \frac{H - H_2}{1 + \varepsilon H_2 - \omega H H_2}, \qquad (5.2.25)$$

$$H_2 = H_1^{-1} \circ H = \frac{H - H_1}{1 + \varepsilon H_1 - \omega H H_1}. \qquad (5.2.26)$$

Для обратных элементов имеем

$$\left(H_1 \circ H_2\right)^{-1} = H_2^{-1} H_1^{-1}, \quad \left(H_1 \circ H_2 \circ H_3\right)^{-1} = H_3^{-1} \circ H_2^{-1} \circ H_1^{-1}, \qquad (5.2.27)$$

$$\frac{1}{H_1^{-1} \circ H_2} + \frac{1}{H_2^{-1} \circ H_1} = -\varepsilon, \qquad (5.2.28)$$

$$\frac{1}{H_1 \circ H_2} + \frac{1}{H_2^{-1} \circ H_1^{-1}} = \frac{1}{H_1^{-1} \circ H_2} + \frac{1}{H_2^{-1} \circ H_1}. \qquad (5.2.29)$$

Определение 4 из разд. 5.1 позволяет получить квадрат элемента

$$H^{(2)} = H \circ H = \frac{2H + \varepsilon H^2}{1 + \omega H^2}. \qquad (5.2.30)$$

Решая уравнение (5.2.30) относительно H, находим «квадратный корень» из элемента $H \circ H$

$$H = \frac{H^{(2)}}{1 + \sqrt{1 + \varepsilon\left(H^{(2)}\right) - \omega\left(H^{(2)}\right)^2}}. \qquad (5.2.31)$$

Взаимосвязь этих элементов определяется соотношением

$$\sqrt{1 + \varepsilon\left(H^{(2)}\right) - \omega\left(H^{(2)}\right)^2} = \frac{1 + \varepsilon H - \omega H^2}{1 + \omega H^2}. \qquad (5.2.32)$$

Используя закон композиции $H = H_1 \circ H_2$, находим закон композиции квадратов элементов

$$H^{(2)} = \left(H_1 \circ H_2\right) \circ \left(H_1 \circ H_2\right) = H_1^{(2)} \circ H_2^{(2)} =$$

$$= \frac{H_1^{(2)} + H_2^{(2)} + \varepsilon H_1^{(2)} H_2^{(2)}}{1 + \omega H_1^{(2)} H_2^{(2)}}. \qquad (5.2.33)$$

В общем случае получим:

$$H^{(2n)} = H_1^{(n)} \circ H_2^{(n)} = \frac{H_1^{(n)} + H_2^{(n)} + \varepsilon H_1^{(n)} H_2^{(n)}}{1 + \omega H_1^{(n)} H_2^{(n)}}. \qquad (5.2.34)$$

Из (5.2.12) следует, что параметр ε отражает отличие обратного элемента H^{-1} от противоположного $(-H)$.

Абелева группа информаций различия определяется аналогично группе энтропий. Закон композиции информаций различия имеет вид

$$I = I_1 \circ I_2 = \frac{I_1 + I_2 - \varepsilon I_1 I_2}{1 + \omega I_1 I_2} \qquad (5.2.35)$$

и задается заменой $H \to -I$ в законе композиции энтропий.

Определение (5.2.35) удовлетворяет свойству ассоциативности

$$I_1 \circ I_2 \circ I_3 = \left(I_1 \circ I_2\right) \circ I_3 = I_1 \circ \left(I_2 \circ I_3\right) =$$

$$= \frac{I_1 + I_2 + I_3 - \varepsilon\left(I_1 I_2 + I_2 I_3 + I_3 I_1\right) + \left(\omega + \varepsilon^2\right) I_1 I_2 I_3}{1 + \omega\left(I_1 I_2 + I_2 I_3 + I_3 I_1\right) - \varepsilon\omega I_1 I_2 I_3}. \qquad (5.2.36)$$

Единичному элементу группы $E = 0$ соответствует нулевое значение информации различия $I = 0$. Обратный элемент определяется выражением $I^{-1} = -I\left(1 - \varepsilon I\right)^{-1}$. Элементы группы являются самосопряженными, то есть $I' = I$.

По аналогии с равенствами для энтропий находим следующие равенства для информаций различия

$$\frac{1}{(-I)} - \frac{1}{I^{-1}} = -\varepsilon, \quad \left(1 - \varepsilon I\right)\left(1 - \varepsilon I^{-1}\right) = 1, \qquad (5.2.37)$$

$$\frac{1}{1 + \omega I I^{-1}} = \frac{1 - \varepsilon I}{1 - \varepsilon I - \omega I^2} = \frac{1 - \varepsilon I^{-1}}{1 - \varepsilon I^{-1} - \omega\left(I^{-1}\right)^2}, \qquad (5.2.38)$$

$$\left(1 - \varepsilon I - \omega I^2\right) = \frac{\left(1 - \varepsilon I_1 - \omega I_1{}^2\right)\left(1 - \varepsilon I_2 - \omega I_2{}^2\right)}{\left(1 + \omega I_1 I_2\right)^2}, \qquad (5.2.39)$$

$$\frac{I}{\sqrt{1 - \varepsilon I - \omega I^2}} = \frac{I_1 + I_2 - \varepsilon I_1 I_2}{\sqrt{1 - \varepsilon I_1 - \omega I_1^2}\sqrt{1 - \varepsilon I_2 - \omega I_2^2}}, \qquad (5.2.40)$$

$$1-\varepsilon I_1-\omega I_1 I=\frac{1-\varepsilon I_1-\omega I_1^2}{1+\omega I_1 I_2}, \tag{5.2.41}$$

$$1-\varepsilon I_2-\omega I_2 I=\frac{1-\varepsilon I_2-\omega I_2^2}{1+\omega I_1 I_2}, \tag{5.2.42}$$

$$1-\varepsilon I-\omega I^2=\left(1-\varepsilon I_1-\omega I_1 I\right)\left(1-\varepsilon I_2-\omega I_2 I\right), \tag{5.2.43}$$

$$\frac{1-\varepsilon I_1-\omega I_1 I}{1-\varepsilon I_1-\omega I_1^2}=\frac{1-\varepsilon I_2-\omega I_2 I}{1-\varepsilon I_2-\omega I_2^2}. \tag{5.2.44}$$

$$1-\varepsilon\left(I_1\circ I_2\circ I_3\right)-\omega\left(I_1\circ I_2\circ I_3\right)^2=$$

$$=\frac{\left(1-\varepsilon I_1-\omega I_1^2\right)\left(1-\varepsilon I_2-\omega I_2^2\right)\left(1-\varepsilon I_3-\omega I_3^2\right)}{\left[1+\omega\left(I_1 I_2+I_2 I_3+I_3 I_1-\varepsilon I_1 I_2 I_3\right)\right]^2}, \tag{5.2.45}$$

$$\left[1+\omega\left(I_1 I_2+I_2 I^{-1}+I^{-1} I_1-\varepsilon I_1 I_2 I^{-1}\right)\right]=$$

$$=\left[\left(1-\varepsilon I_1-\omega I_1^2\right)\left(1-\varepsilon I_2-\omega I_2^2\right)\left(1-\varepsilon I^{-1}-\omega\left(I^{-1}\right)^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{5.2.46}$$

$$\left(I_1+I_2+I^{-1}\right)-\varepsilon\left(I_1 I_2+I_2 I^{-1}+I^{-1} I_1\right)+$$

$$+\left(\omega+\varepsilon^2\right) I_1 I_2 I^{-1}=0, \tag{5.2.47}$$

$$\left(1+\omega I_1 I_2\right)\left(1+\omega I_3 I_4\right)\left[1+\omega\left(I_1\circ I_2\right)\left(I_3\circ I_4\right)\right]=$$

$$=\left(1+\omega I_2 I_3\right)\left(1+\omega I_4 I_1\right)\left[1+\omega\left(I_2\circ I_3\right)\left(I_4\circ I_1\right)\right]=$$

$$=\left(1+\omega I_3 I_1\right)\left(1+\omega I_4 I_2\right)\left[1+\omega\left(I_3\circ I_1\right)\left(I_4\circ I_2\right)\right], \tag{5.2.48}$$

$$\left(1+\omega I_1^2\right)\left(1+\omega I_2^2\right)\left[1+\omega\left(I_1\circ I_1\right)\left(I_2\circ I_2\right)\right]=$$

$$=\left(1+\omega I_1 I_2\right)^2\left[1+\omega\left(I_1\circ I_2\right)^2\right], \tag{5.2.49}$$

$$I_1=I\circ I_2^{-1}=\frac{I-I_2}{1-\varepsilon I_2-\omega I I_2}, \tag{5.2.50}$$

$$I_2 = I_1^{-1} \circ I = \frac{I - I_1}{1 - \varepsilon I_1 - \omega I I_1}, \qquad (5.2.51)$$

$$\left(I_1 \circ I_2\right)^{-1} = I_2^{-1} I_1^{-1}, \quad \left(I_1 \circ I_2 \circ I_3\right)^{-1} = I_3^{-1} \circ I_2^{-1} \circ I_1^{-1}, \qquad (5.2.52)$$

$$\frac{1}{I_1^{-1} \circ I_2} + \frac{1}{I_2^{-1} \circ I_1} = \varepsilon, \qquad (5.2.53)$$

$$\frac{1}{I_1 \circ I_2} + \frac{1}{I_2^{-1} \circ I_1^{-1}} = \frac{1}{I_1^{-1} \circ I_2} + \frac{1}{I_2^{-1} \circ I_1}, \qquad (5.2.54)$$

$$I^{(2)} = I \circ I = \frac{2I - \varepsilon I^2}{1 + \omega I^2}, \quad I = \frac{I^{(2)}}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon\left(I^{(2)}\right) - \omega\left(I^{(2)}\right)^2}}, \qquad (5.2.55)$$

$$\sqrt{1 - \varepsilon\left(I^{(2)}\right) - \omega\left(I^{(2)}\right)^2} = \frac{1 - \varepsilon I - \omega I^2}{1 + \omega I^2}. \qquad (5.2.56)$$

$$I^{(2n)} = I_1^{(n)} \circ I_2^{(n)} = \frac{I_1^{(n)} + I_2^{(n)} - \varepsilon I_1^{(n)} I_2^{(n)}}{1 + \omega I_1^{(n)} I_2^{(n)}} \quad \left(I = I_1 \circ I_2\right) \qquad (5.2.57)$$

5.3. Группы функций мер

Представим абелевую группу энтропий мультипликативной группе функций, которые находятся в определенном соответствии с элементами энтропий. Это соответствие в виде $H \to \varphi(H)$ характеризуется следующими свойствами:

$$\varphi(H) = \varphi\left(H_1 \circ H_2\right) = \varphi\left(H_1\right)\varphi\left(H_2\right), \qquad (5.3.1)$$

$$\varphi(0) = 1, \qquad (5.3.2)$$

где единичный элемент группы функций есть постоянное значение, равное единице, при нулевом значении энтропии. Для обратной функции имеем равенство $\varphi^{-1}(H) = \varphi(H^{-1})$, вытекающее из формулы $\varphi(H)\varphi(H^{-1}) = 1$.

Покажем, что для закона композиции (5.2.5) имеют место четыре принципиально различные группы функций энтропий.

Тип I $(\omega \geq 0)$**.** Пусть уравнение $1 + \varepsilon H - \omega H^2 = 0$ имеет неравные вещественные корни, то есть для дискриминанта имеем условие $D=\varepsilon^2+4\omega>0$. Тогда справедливо равенство $\left(1+\varepsilon H-\omega H^2\right)=$ $=\left(1+\varepsilon_1 H\right)\left(1-\varepsilon_2 H\right)$, выполняемое и при $\omega=0$. Получим значения параметров и дискриминанта

$$\varepsilon=\varepsilon_1-\varepsilon_2,\ \omega=\varepsilon_1\varepsilon_2,\ D=\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)^2, \tag{5.3.3}$$

из которых следуют величины $\varepsilon_1=\left(\varepsilon+\sqrt{D}\right)/2$ и $\varepsilon_2=-\left(\varepsilon-\sqrt{D}\right)/2$.

Закон композиции (5.2.5) запишется так

$$H=\left(H_1\circ H_2\right)=\frac{H_1+H_2+\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)H_1H_2}{1+\varepsilon_1\varepsilon_2H_1H_2}. \tag{5.3.4}$$

Из него следует, что для всех независимых объектов сохраняется неравенство $\left(-1/\varepsilon_1\right)<H<\left(1/\varepsilon_2\right)$. Значения энтропий $\left(-1/\varepsilon_1\right)$ и $\left(1/\varepsilon_2\right)$ не являются элементами группы, так как обратные элементы от этих значений остаются неопределенными ввиду нарушения дополнительного условия в определении (5.2.9). Однако для них выполняются формальные соотношения

$$H\circ\left(-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)=\left(-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\ \text{при}\ H\neq\left(\frac{1}{\varepsilon_2}\right),$$

$$H\circ\left(\frac{1}{\varepsilon_2}\right)=\left(\frac{1}{\varepsilon_2}\right)\ \text{при}\ H\neq\left(-\frac{1}{\varepsilon_1}\right). \tag{5.3.5}$$

Из (5.3.5) вытекает, что величины $\left(-1/\varepsilon_1\right)$и $\left(1/\varepsilon_2\right)$ являются инвариантными для всех независимых объектов. Следовательно, инвариантными являются также параметры ε и ω. Из соотношения (5.3.5) вытекают следующие формальные равенства

$$\left(-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)^{(2)}=\left(-\frac{1}{\varepsilon_1}\right),\quad \left(\frac{1}{\varepsilon_2}\right)^{(2)}=\left(\frac{1}{\varepsilon_2}\right), \tag{5.3.6}$$

к которым добавляются еще четыре

$$\left(1+\varepsilon_1 H\right)=\frac{\left(1+\varepsilon_1 H_1\right)\left(1+\varepsilon_1 H_2\right)}{1+\omega H_1H_2},\ \frac{\left(1+\varepsilon_1 H\right)}{\left(1-\varepsilon_2 H^{-1}\right)}=-\frac{H}{H^{-1}}, \tag{5.3.7}$$

$$\left(1-\varepsilon_2 H\right)=\frac{\left(1-\varepsilon_2 H_1\right)\left(1-\varepsilon_2 H_2\right)}{1+\omega H_1 H_2},\ \frac{\left(1-\varepsilon_2 H\right)}{\left(1+\varepsilon_1 H^{-1}\right)}=-\frac{H}{H^{-1}}. \qquad (5.3.8)$$

После деления равенства (5.3.7) на (5.3.8) получим тождество

$$\left(\frac{1-\varepsilon_2 H}{1+\varepsilon_1 H}\right)=\left(\frac{1-\varepsilon_2 H_1}{1+\varepsilon_1 H_1}\right)\left(\frac{1-\varepsilon_2 H_2}{1+\varepsilon_1 H_2}\right). \qquad (5.3.9)$$

Сопоставляя (5.3.1) и (5.3.9), находим искомую функцию

$$\varphi\left(H\right)=\left(\frac{1-\varepsilon_2 H}{1+\varepsilon_1 H}\right)^{\frac{1}{a}}, \qquad (5.3.10)$$

порождающую группу. Она является степенной зависимостью от дробно-линейной функции. Здесь в степени используется функция $a=a\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2\right)$, зависящая от параметров. Из (5.3.10) следует свойство $\varphi(0)=1$.

Подставим обратный элемент

$$H^{-1}=-\frac{H}{\left[1+\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)H\right]} \qquad (5.3.11)$$

в (5.3.10) и получим функцию

$$\varphi^{-1}\left(H\right)=\varphi\left(H^{-1}\right)=\left(\frac{1-\varepsilon_2 H^{-1}}{1+\varepsilon_1 H^{-1}}\right)^{\frac{1}{a}}=\left(\frac{1+\varepsilon_1 H}{1-\varepsilon_2 H}\right)^{\frac{1}{a}}, \qquad (5.3.12)$$

которая является обратной функции для $\varphi\left(H\right)$.

Элементы группы функций энтропий являются самосопряженными в силу выполнения равенства

$$\varphi\left(H'\right)=\varphi\left(C^{-1}\right)\varphi\left(H\right)\varphi\left(C\right)=\varphi\left(H\right). \qquad (5.3.13)$$

Для определения функции $a=a\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2\right)$ рассмотрим мультипликативную группу функций энтропий, когда каждый независимый объект имеет свое значение рассматриваемых параметров. Тогда запишем следующие функции

$$\varphi_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}\left(H_1\right)=\left(\frac{1-\varepsilon_2 H_1}{1+\varepsilon_1 H_1}\right)^{\frac{1}{a}},\quad \varphi_{\tilde{\varepsilon}_1,\tilde{\varepsilon}_2}\left(H_2\right)=\left(\frac{1-\tilde{\varepsilon}_2 H_2}{1+\tilde{\varepsilon}_1 H_2}\right)^{\frac{1}{a}}, \qquad (5.3.14)$$

$$\varphi_{\varepsilon'_1,\varepsilon'_2}(H)=\left(\frac{1-\varepsilon'_2H}{1+\varepsilon'_1H}\right)^{\frac{1}{a}}. \tag{5.3.15}$$

Свойство мультипликативности

$$\varphi_{\varepsilon'_1,\varepsilon'_2}(H)=\varphi_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(H_1)\varphi_{\tilde\varepsilon_1,\tilde\varepsilon_2}(H_2) \tag{5.3.16}$$

дает равенство

$$\left(\frac{1-\varepsilon'_2H}{1+\varepsilon'_1H}\right)^{\frac{1}{a}}=\left(\frac{1-\varepsilon_2H_1}{1+\varepsilon_1H_1}\right)^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1-\tilde\varepsilon_2H_2}{1+\tilde\varepsilon_1H_2}\right)^{\frac{1}{a}}, \tag{5.3.17}$$

из которого вытекает закон композиции

$$H=H_1\circ H_2=$$

$$=\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)H_1+(\tilde\varepsilon_1+\tilde\varepsilon_2)H_2+(\varepsilon_1\tilde\varepsilon_1-\varepsilon_2\tilde\varepsilon_2)H_1H_2}{(\varepsilon'_1+\varepsilon'_2)+(\varepsilon'_2\varepsilon_1-\varepsilon'_1\varepsilon_2)H_1+(\varepsilon'_2\tilde\varepsilon_1-\varepsilon'_1\tilde\varepsilon_2)H_2+(\varepsilon'_1\tilde\varepsilon_2\varepsilon_2+\varepsilon'_2\tilde\varepsilon_1\varepsilon_1)H_1H_2}. \tag{5.3.18}$$

Теорема 1. Если группа энтропий абелева, то $\varepsilon=\tilde\varepsilon=\varepsilon'$ и $\omega=\tilde\omega=\omega'$.

Для доказательства используем условия коммутативности $H=H_1\circ H_2=H_2\circ H_1$ и свойства группы, что приводит, согласно (5.3.18), к соотношениям

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2=\tilde\varepsilon_1+\tilde\varepsilon_2=\varepsilon'_1+\varepsilon'_2, \tag{5.3.19}$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}=\frac{\tilde\varepsilon_1}{\tilde\varepsilon_2}=\frac{\varepsilon'_1}{\varepsilon'_2}. \tag{5.3.20}$$

Из (5.3.19) и (5.3.20) вытекают искомые равенства $\varepsilon_1=\tilde\varepsilon_1=\varepsilon'_1$ и $\varepsilon_2=\tilde\varepsilon_2=\varepsilon'_2$, которые доказывают теорему. В итоге выполняется свойство (5.3.1) для функции (5.3.10). Соотношение (5.3.19) в рассматриваемой теореме позволяет положить

$$a=-\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\lambda} \tag{5.3.21}$$

и, следовательно, из (5.3.10) получим:

$$\varphi(H)=\left(\frac{1-\varepsilon_2 H}{1+\varepsilon_1 H}\right)^{-\frac{\lambda}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}, \tag{5.3.22}$$

где λ есть произвольный параметр.

Тип II $(\varepsilon_1+\varepsilon_2=0)$**.** Пусть уравнение $1+\varepsilon H-\omega H^2=0$ имеет равные вещественные корни, то есть для дискриминанта выполняется условие $D=0$. Таким образом, справедливо разложение $1+\varepsilon H-\omega H^2=(1+\varepsilon_1 H)^2$ и получим значения параметров

$$\varepsilon=2\varepsilon_1, \quad \omega=-\varepsilon_1^2, \tag{5.3.23}$$

закон композиции

$$H=(H_1\circ H_2)=\frac{H_1+H_2+2\varepsilon_1 H_1 H_2}{1-\varepsilon_1^2 H_1 H_2} \tag{5.3.24}$$

и равенство

$$(1+\varepsilon_1 H)=\frac{(1+\varepsilon_1 H_1)(1+\varepsilon_1 H_2)}{1-\varepsilon_1^2 H_1 H_2}. \tag{5.3.25}$$

После деления равенства (5.3.25) на (5.3.24) вытекает соотношение

$$\frac{H}{1+\varepsilon_1 H}=\frac{H_1}{1+\varepsilon_1 H_1}+\frac{H_2}{1+\varepsilon_1 H_2}. \tag{5.3.26}$$

Из закона композиции следует неравенство $H>\left(-1/\varepsilon_1\right)$. Значение энтропии, равное $\left(-1/\varepsilon_1\right)$ является инвариантным элементом для всех независимых объектов, так как выполняется формальное соотношение

$$H\circ\left(-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)=\left(-\frac{1}{\varepsilon_1}\right) \quad \text{при } H\neq\left(-\frac{1}{\varepsilon_1}\right). \tag{5.3.27}$$

Однако обратный элемент от значения $\left(-1/\varepsilon_1\right)$ остается неопределенным, так как нарушается дополнительное условие в определении (5.2.9).

Сопоставляя (5.3.1) и (5.3.26), находим искомую функцию

$$\varphi(H)=\exp\left(-\frac{\lambda H}{1+\varepsilon_1 H}\right), \qquad (5.3.28)$$

порождающую группу, где λ есть произвольный параметр. Из (5.3.28) вытекает свойство $\varphi(0)=1$. Элементы группы функции энтропий являются самосопряженными.

Подставив обратный элемент

$$H^{-1}=-\frac{H}{1+2\varepsilon_1 H} \qquad (5.3.29)$$

в (5.3.28), получим функцию

$$\varphi^{-1}(H)=\varphi(H^{-1})=\exp\left(-\frac{\lambda H^{-1}}{1+\varepsilon_1 H^{-1}}\right)=\exp\left(\frac{\lambda H}{1+\varepsilon_1 H}\right), \qquad (5.3.30)$$

которая является обратной функцией для $\varphi(H)$.

Тип III $(\omega<0)$**.** Пусть уравнение $1+\varepsilon H-\omega H^2=0$ не имеет вещественных корней, то есть для дискриминанта выполняется условие $D=\varepsilon^2+4\omega<0$. Представим трехчлен в виде произведения

$$1+\varepsilon H-\omega H^2=f\,\overline{f}, \qquad (5.3.31)$$

где комплексное выражение $f=(1+\mathrm{i}K)/(1-\mathrm{i}b)$ содержит функции

$$K=\frac{-\omega H+\varepsilon/2}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}},\ b=-\frac{\varepsilon/2}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}. \qquad (5.3.32)$$

Делим комплексное выражение на ее сопряженное значение

$$\frac{f}{\overline{f}}=\frac{1+\mathrm{i}K}{1-\mathrm{i}b}\frac{1+\mathrm{i}b}{1-\mathrm{i}K}=\frac{1+\mathrm{i}F}{1-\mathrm{i}F} \qquad (5.3.33)$$

и определяем функцию

$$F=\frac{K+b}{1-Kb}=\frac{H\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}{1+H\varepsilon/2}. \qquad (5.3.34)$$

Справедливы следующие равенства

$$(1+\mathrm{i}F)=\frac{(1+\mathrm{i}F_1)(1+\mathrm{i}F_2)}{1-F_1F_2}, \qquad (5.3.35)$$

$$\left(1-\mathrm{i}F\right)=\frac{\left(1-\mathrm{i}F_1\right)\left(1-\mathrm{i}F_2\right)}{1-F_1F_2}, \tag{5.3.36}$$

$$\frac{1+\mathrm{i}F}{1-\mathrm{i}F}=\frac{\left(1+\mathrm{i}F_1\right)\left(1+\mathrm{i}F_2\right)}{\left(1-\mathrm{i}F_1\right)\left(1-\mathrm{i}F_2\right)}. \tag{5.3.37}$$

Из них вытекает закон композиции для функции F

$$F=F_1\circ F_2=\frac{F_1+F_2}{1-F_1F_2}, \tag{5.3.38}$$

который дает исходный закон композиции энтропий

$$H=H_1\circ H_2=\frac{H_1+H_2+\varepsilon H_1H_2}{1-\left(\sqrt{-\omega}\right)^2 H_1H_2}. \tag{5.3.39}$$

Используя тождество

$$\mathrm{arctg}F=\frac{1}{2\mathrm{i}}\ln\frac{1+\mathrm{i}F}{1-\mathrm{i}F} \tag{5.3.40}$$

и учитывая (5.3.37), находим искомую функцию

$$\varphi(H)=\exp\left[\frac{\lambda}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}\mathrm{arctg}\left(F\right)\right]=$$
$$=\exp\left[\frac{\lambda}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}\mathrm{arctg}\left(\frac{H\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}{1+H\varepsilon/2}\right)\right], \tag{5.3.41}$$

которая порождает рассматриваемую группу энтропий. Здесь λ есть произвольный параметр. Из (5.3.41) следует свойство $\varphi(0)=1$. Элементы группы функции энтропий являются самосопряженными.

Подставим обратный элемент

$$H^{-1}=-\frac{H}{1+\varepsilon H} \tag{5.3.42}$$

в (5.3.41) и получим функцию:

$$\varphi^{-1}(H)=\varphi\left(H^{-1}\right)=$$

$$=\exp\left[\frac{\lambda}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}\operatorname{arctg}\left(\frac{H^{-1}\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}{1+H^{-1}\varepsilon/2}\right)\right]= \qquad (5.3.43)$$

$$=\exp\left[-\frac{\lambda}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}\operatorname{arctg}\left(\frac{H\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}{1+H\varepsilon/2}\right)\right],$$

которая является обратной функцией для $\varphi(H)$.

Далее, представляя трехчлен в виде $1+\varepsilon H-\omega H^2=$ $=(1/2)\left[\left(1+\varepsilon_1 H\right)^2+\left(1-\varepsilon_2 H\right)^2\right]$, получим значения параметров и дискриминанта

$$\varepsilon=\varepsilon_1-\varepsilon_2,\ \omega=-\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2},\ D=-\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)^2, \qquad (5.3.44)$$

из которых следуют величины $\varepsilon_1=\left(\varepsilon+\sqrt{-D}\right)/2$ и $\varepsilon_2=-\left(\varepsilon-\sqrt{-D}\right)/2$.

Закон композиции (5.3.39), в виде

$$H=\left(H_1\circ H_2\right)=\frac{H_1+H_2+\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)H_1H_2}{1-\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)H_1H_2/2} \qquad (5.3.45)$$

вытекает, согласно (5.3.38), из соотношения

$$\frac{H}{1+H\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)/2}=\frac{\dfrac{H_1}{1+H_1\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)/2}+\dfrac{H_2}{1+H_2\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)/2}}{1-\dfrac{H_1H_2\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)^2/4}{\left[1+H_1\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)/2\right]\left[1+H_2\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)/2\right]}}. \qquad (5.3.46)$$

Справедливы равенства

$$H_+=\left(-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\circ H=\left(-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\left(\frac{1-\varepsilon_2 H}{1+\varepsilon_1 H+\left(\varepsilon_2^2-\varepsilon_1^2\right)H/2\varepsilon_1}\right), \qquad (5.3.47)$$

$$H_-=\left(\frac{1}{\varepsilon_2}\right)\circ H=\left(\frac{1}{\varepsilon_2}\right)\left(\frac{1+\varepsilon_1 H}{1-\varepsilon_2 H+\left(\varepsilon_2^2-\varepsilon_1^2\right)H/2\varepsilon_2}\right), \qquad (5.3.48)$$

$$\left(-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{\varepsilon_2}\right),\ \left(\frac{1}{\varepsilon_2}\right)^{-1}=\left(-\frac{1}{\varepsilon_1}\right),\ \left(-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\circ\left(\frac{1}{\varepsilon_2}\right)=E, \qquad (5.3.49)$$

$$H_+\circ\left(\frac{1}{\varepsilon_2}\right)=\left(-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\circ H_-=H, \qquad (5.3.50)$$

$$H_+\circ\left(H_-\right)^{-1}=\left(-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)^{(2)},\ H_-\circ\left(H_+\right)^{-1}=\left(\frac{1}{\varepsilon_2}\right)^{(2)}, \qquad (5.3.51)$$

которые означают, что в данной группе значения $\left(-1/\varepsilon_1\right)$ и $\left(1/\varepsilon_2\right)$ являются ее элементами.

Элементы (5.3.47) и (5.3.48) удовлетворяют тождествам

$$-\left(\frac{1+k^2\varepsilon_1 H_+}{1-k^{-2}\varepsilon_2 H_-}\right)=k^2\frac{H_+}{H_-},\ \frac{1}{H_-}-\frac{1}{\left(-1/\varepsilon_1\right)}=-\frac{1}{k^2}\left[\frac{1}{H_+}-\frac{1}{\left(1/\varepsilon_2\right)}\right], \qquad (5.3.52)$$

где введен коэффициент

$$k=\sqrt{\frac{1+\varepsilon_1 H}{1-\varepsilon_2 H}}. \qquad (5.3.53)$$

Тип IV. Рассмотрим специальный тип группы, в которой сопоставим функциям (5.3.22), (5.3.28) и (5.3.41) аддитивную энтропию

$$H^R=-\ln\varphi(H)=-\frac{\lambda}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\ln\left(\frac{1-\varepsilon_2 H}{1+\varepsilon_1 H}\right), \qquad (5.3.54)$$

$$H^R=-\ln\varphi(H)=\frac{\lambda H}{1+\varepsilon_1 H}, \qquad (5.3.55)$$

$$H^R=-\ln\varphi(H)=-\frac{\lambda}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}\operatorname{arctg}\left(\frac{H\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}{1+H\varepsilon/2}\right). \qquad (5.3.56)$$

Тогда такое отображение является изоморфизмом групп неаддитивных энтропий на группу аддитивных энтропий.

Бинарная операция элементов есть

$$H^R=H_1^R\circ H_2^R=H_1^R+H_2^R. \qquad (5.3.57)$$

Для аддитивных энтропий H^R выполняются групповые свойства

а) ассоциативность

$$\left(H_1^R + H_2^R\right) + H_3^R = H_1^R + \left(H_2^R + H_3^R\right), \qquad (5.3.58)$$

б) наличие единичного элемента

$$H^R + 0 = 0 + H^R = H^R, \qquad (5.3.59)$$

в) наличие обратного элемента

$$H^R + \left(-H^R\right) = \left(-H^R\right) + H^R = 0. \qquad (5.3.60)$$

Функция, порождающая группу аддитивных энтропий, имеет вид

$$\varphi(H) = \exp\left(\lambda H^R\right), \qquad (5.3.61)$$

где λ есть произвольный параметр. Она имеет свойство $\varphi(0)=1$ и элементы группы функции энтропий являются самосопряженными. Подставим обратный элемент $\left(-H^R\right)$ в (5.3.61) и получим обратную функцию

$$\varphi^{-1}\left(H^R\right) = \varphi\left(-H^R\right) = \exp\left(-\lambda H^R\right). \qquad (5.3.62)$$

В заключение определим группы функций информаций различия. При замене $H \to -I$ имеем три типа групп:

$$\textbf{Тип I:}\ \varphi(I) = \left(\frac{1+\varepsilon_2 I}{1-\varepsilon_1 I}\right)^{\frac{\lambda}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}, \qquad (5.3.63)$$

$$\textbf{Тип II:}\ \varphi(I) = \exp\left(\frac{\lambda I}{1-\varepsilon_1 I}\right), \qquad (5.3.64)$$

$$\textbf{Тип III:}\ \varphi(I) = \exp\left[-\frac{\lambda}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}\operatorname{arctg}\left(\frac{I\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}{1-I\varepsilon/2}\right)\right]. \qquad (5.3.65)$$

Изоморфизмом этих групп неаддитивных информаций различия на группу аддитивных информаций различия является мера

$$I^R = -\lambda^{-1}\varphi(I), \qquad (5.3.66)$$

которая соответствует четвертому типу групп функций:

$$\textbf{Тип IV: } \varphi(I) = \exp\left(-\lambda I^R\right). \tag{5.3.67}$$

Здесь не будем рассматривать свойства элементов групп информаций различия и групп их функций, так как это легко сделать по аналогии с рассмотрением свойств энтропии.

5.4. Матричное представление групп мер

Представим абелевую группу энтропий мультипликативной группе невырожденных матриц второго порядка [21]. Каждой энтропии H из множества энтропий G сопоставляется матрица $\mathbf{A}(H)$ из множества матриц M. Все матрицы, сопоставляемые различным энтропиям, различны и, следовательно, группа матриц изоморфна представляемой группе. Матрицы образуют абелеву группу по бинарной операции умножения, которая есть обычная операция умножения матриц

$$\mathbf{A}(H) = \mathbf{A}(H_1 \circ H_2) = \mathbf{A}(H_1)\mathbf{A}(H_2). \tag{5.4.1}$$

Умножение коммутативно

$$\mathbf{A}(H_1)\mathbf{A}(H_2) = \mathbf{A}(H_2)\mathbf{A}(H_1) \tag{5.4.2}$$

и ассоциативно

$$\left[\mathbf{A}(H_1)\mathbf{A}(H_2)\right]\mathbf{A}(H_3) = \mathbf{A}(H_1)\left[\mathbf{A}(H_2)\mathbf{A}(H_3)\right], \tag{5.4.3}$$

согласно свойствам матриц.

Единичным элементом в условии

$$\mathbf{A}(H)\mathbf{A}(H^{-1}) = \mathbf{A}(H^{-1})\mathbf{A}(H) = \mathbf{E} \quad \left(\det \mathbf{A}(H) \det \mathbf{A}(H^{-1}) = 1\right) \tag{5.4.4}$$

является единичная матрица

$$\mathbf{A}(0) = \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.4.5}$$

а обратная матрица имеет вид

$$\mathbf{A}^{-1}(H) = \mathbf{A}(H^{-1}) \quad \left(\mathbf{A}(H)\mathbf{A}^{-1}(H) = \mathbf{E}\right). \tag{5.4.6}$$

Исходя из условий (5.4.1) – (5.4.6), определим явный вид матрицы, порождающей группу и, соответственно, бинарную операцию для энтропий. Выбор матриц второго порядка обусловлен тем, что закон композиции должен содержать только H_1, H_2 и квадратичную нелинейность в виде произведения $H_1 H_2$. Итак, запишем матрицу в общем виде:

$$\mathbf{A}(H)=\begin{pmatrix} a(H) & b(H) \\ c(H) & d(H) \end{pmatrix}, \tag{5.4.7}$$

где функции $a=a(H), \quad b=b(H), \quad c=c(H), \quad d=d(H)$ зависят от энтропии. Матрица является неособенной, то есть ее определитель удовлетворяет условию $\det \mathbf{A}(H)\neq 0$.

Используем условие коммутативности (5.4.1) для умножения

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}. \tag{5.4.8}$$

Здесь функции с индексами 1 и 2 зависят, соответственно, от энтропий H_1 и H_2. В результате получим систему из функциональных уравнений

$$a_1a_2+b_1c_2=a_2a_1+b_2c_1, \tag{5.4.9}$$

$$c_1b_2+d_1d_2=c_2b_1+d_2d_1, \tag{5.4.10}$$

$$a_1b_2+b_1d_2=a_2b_1+b_2d_1, \tag{5.4.11}$$

$$c_1a_2+d_1c_2=c_2a_1+d_2c_1. \tag{5.4.12}$$

Уравнения (5.4.9) и (5.4.10) накладывают следующие ограничения на функции

$$\frac{b_1}{c_1}=\frac{b_2}{c_2}=\omega, \tag{5.4.13}$$

а из уравнений (5.4.11) и (5.4.12) имеем

$$\frac{a_1-d_1}{c_1}=\frac{a_2-d_2}{c_2}=\varepsilon. \tag{5.4.14}$$

Здесь введены параметры ε и ω, которые не зависят от энтропии.

Используя соотношения (5.4.13), (5.4.14), получим

$$\mathbf{A}(H)=\begin{pmatrix} d+\varepsilon c & \omega c \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{5.4.15}$$

Поскольку в закон композиции входят H_1, H_2 и H_1H_2, то имеем функциональную зависимость

$$c(H)=Hd(H). \tag{5.4.16}$$

При подстановке (5.4.16) в (5.4.15) вытекает исходная матрица

$$\mathbf{A}(H) = d(H)\begin{pmatrix} 1+\varepsilon H & \omega H \\ H & 1 \end{pmatrix} \qquad (5.4.17)$$

в виде произведения неизвестной функции $d(H)$ на матрицу, элементы которой линейно зависят от энтропии H. Определитель полученной матрицы равняется

$$\det \mathbf{A}(H) = d^2(H)\left(1+\varepsilon H - \omega H^2\right). \qquad (5.4.18)$$

Можно использовать другой вариант исходной матрицы. Так, при замене $\omega \to 1/\omega$ и $\varepsilon \to \varepsilon/\omega$ в (5.4.13) и (5.4.14), соответственно, а также с учетом $b(H) = Hd(H)$, получим матрицу

$$\mathbf{A}^T(H) = d(H)\begin{pmatrix} 1+\varepsilon H & H \\ \omega H & 1 \end{pmatrix}, \qquad (5.4.19)$$

которая является транспонированной по отношению к матрице $\mathbf{A}(H)$.

Далее умножим матрицу $\mathbf{A}(H_1)$ на матрицу $\mathbf{A}(H_2)$

$$\mathbf{A}(H_1)\mathbf{A}(H_2) = d(H_1)d(H_2)\begin{pmatrix} 1+\varepsilon H_1 & \omega H_1 \\ H_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\varepsilon H_2 & \omega H_2 \\ H_2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= d(H_1)d(H_2)\left(1+\omega H_1 H_2\right)\times$$

$$\times\begin{pmatrix} 1+\varepsilon\dfrac{H_1+H_2+\varepsilon H_1 H_2}{1+\omega H_1 H_2} & \omega\dfrac{H_1+H_2+\varepsilon H_1 H_2}{1+\omega H_1 H_2} \\ \dfrac{H_1+H_2+\varepsilon H_1 H_2}{1+\omega H_1 H_2} & 1 \end{pmatrix}, \qquad (5.4.20)$$

приравняем результат матрице $\mathbf{A}(H)$ и получим закон композиции

$$H = H_1 \circ H_2 = \frac{H_1+H_2+\varepsilon H_1 H_2}{1+\omega H_1 H_2}, \qquad (5.4.21)$$

а также равенство для функций

$$d(H) = d(H_1)d(H_2)\left(1+\omega H_1 H_2\right). \qquad (5.4.22)$$

Из закона композиции для определителей:

$$\det \mathbf{A}(H) = \det \mathbf{A}(H_1) \det \mathbf{A}(H_2) \qquad (5.4.23)$$

вытекает известное соотношение

$$\left(1+\varepsilon H - \omega H^2\right) = \frac{\left(1+\varepsilon H_1 - \omega H_1{}^2\right)\left(1+\varepsilon H_2 - \omega H_2{}^2\right)}{\left(1+\omega H_1 H_2\right)^2}. \qquad (5.4.24)$$

С учетом значения определителя (5.4.18) вычислим обратную матрицу

$$\mathbf{A}^{-1}(H) = \frac{1}{d(H)(1+\varepsilon H - \omega H^2)}\begin{pmatrix} 1 & -\omega H \\ -H & 1+\varepsilon H \end{pmatrix} \qquad (5.4.25)$$

и, согласно (5.4.6), преобразуем ее к виду

$$\mathbf{A}(H^{-1}) = d(H^{-1})\begin{pmatrix} 1+\varepsilon H^{-1} & \omega H^{-1} \\ H^{-1} & 1 \end{pmatrix}. \qquad (5.4.26)$$

Здесь взаимосвязь между энтропией H и ее обратным элементом H^{-1} дается равенствами

$$\left(1+\varepsilon H\right)\left(1+\varepsilon H^{-1}\right) = 1, \qquad (5.4.27)$$

$$d(H)d(H^{-1})\left(1+\omega H H^{-1}\right) = 1, \qquad (5.4.28)$$

из которых вытекают известные соотношения

$$H = -\frac{H^{-1}}{1+\varepsilon H^{-1}}, \quad H^{-1} = -\frac{H}{1+\varepsilon H}, \qquad (5.4.29)$$

$$\frac{1}{1+\omega H H^{-1}} = \frac{1+\varepsilon H}{1+\varepsilon H - \omega H^2} = \frac{1+\varepsilon H^{-1}}{1+\varepsilon H^{-1} - \omega\left(H^{-1}\right)^2}. \qquad (5.4.30)$$

Итак, представление абелевой группы энтропий группе матриц показывает, что для коммутативной бинарной операции $H_1 \circ H_2$ выполняется ассоциативность $\left(H_1 \circ H_2\right) \circ H_3 = H_1 \circ \left(H_2 \circ H_3\right)$. Единичному элементу в условии $H \circ E = E \circ H = E$ соответствует нулевая энтропия $H = 0$. Обратный элемент в условии $H \circ H^{-1} = H^{-1} \circ H = E$ равняется $H^{-1} = -H\left(1+\varepsilon H\right)^{-1}$.

В абелевой группе матриц остается неопределенной функция $d(H)$, для которой выполняется равенство (5.4.22). Используем (5.4.18) и перепишем матрицу (5.4.17) и ее обратную (5.4.26) следующим образом

$$\mathbf{A}(H)=\left(\frac{\det\mathbf{A}(H)}{1+\varepsilon H-\omega H^2}\right)^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1+\varepsilon H & \omega H\\ H & 1\end{pmatrix}, \tag{5.4.31}$$

$$\mathbf{A}(H^{-1})=\left(\frac{\det\mathbf{A}(H^{-1})}{1+\varepsilon H^{-1}-\omega\left(H^{-1}\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1+\varepsilon H^{-1} & \omega H^{-1}\\ H^{-1} & 1\end{pmatrix}, \tag{5.4.32}$$

где неопределенная функция $\det\mathbf{A}(H)$ удовлетворяет групповому свойству (5.4.23). Таким образом, эта функция порождает группу функций энтропий.

Введем матрицу

$$\mathbf{B}(H)=\begin{pmatrix}1+\varepsilon H & \omega H\\ H & 1\end{pmatrix},\quad \det\mathbf{B}(H)=1+\varepsilon H-\omega H^2 \tag{5.4.33}$$

и получим равенство

$$\mathbf{C}(H)=\frac{\mathbf{A}(H)}{\left[\det\mathbf{A}(H)\right]^{\frac{1}{2}}}=\frac{\mathbf{B}(H)}{\left[\det\mathbf{B}(H)\right]^{\frac{1}{2}}},\quad \det\mathbf{C}(H)=1, \tag{5.4.34}$$

где $\mathbf{C}(H)$ есть унимодулярная матрица.

Опуская вычисления, аналогично находим матричное представление группы информаций различия и в результате имеем следующую матрицу

$$\mathbf{A}(I)=\left(\frac{\det\mathbf{A}(I)}{1-\varepsilon I-\omega I^2}\right)^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1-\varepsilon I & -\omega I\\ -I & 1\end{pmatrix}. \tag{5.4.35}$$

и ее обратную

$$\mathbf{A}(I^{-1})=\left(\frac{\det\mathbf{A}(I^{-1})}{1-\varepsilon I^{-1}-\omega\left(I^{-1}\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1-\varepsilon I^{-1} & -\omega I^{-1}\\ -I^{-1} & 1\end{pmatrix}. \tag{5.4.36}$$

Для определения зависимостей определителей матриц от энтропии и информации различия используем равенства

$$\det\mathbf{A}(H)=\varphi^{2\nu}(H),\quad \det\mathbf{A}(I)=\varphi^{2\nu}(I), \tag{5.4.37}$$

$$\det \mathbf{A}(H^{-1}) = \varphi^{2\nu}(H^{-1}), \quad \det \mathbf{A}(I^{-1}) = \varphi^{2\nu}(I^{-1}), \tag{5.4.38}$$

означающие изоморфные отображения групп функций мер на группу определителей. В итоге матрицы (5.4.31) и (5.4.35) с произвольным параметром ν преобразуются к виду

$$\mathbf{A}(H) = \varphi^{\nu}(H)\begin{pmatrix} \dfrac{1+\varepsilon H}{\sqrt{1+\varepsilon H - \omega H^2}} & \dfrac{\omega H}{\sqrt{1+\varepsilon H - \omega H^2}} \\ \dfrac{H}{\sqrt{1+\varepsilon H - \omega H^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H - \omega H^2}} \end{pmatrix}, \tag{5.4.39}$$

$$\mathbf{A}(I) = \varphi^{\nu}(I)\begin{pmatrix} \dfrac{1-\varepsilon I}{\sqrt{1-\varepsilon I - \omega I^2}} & -\dfrac{\omega I}{\sqrt{1-\varepsilon I - \omega I^2}} \\ -\dfrac{I}{\sqrt{1-\varepsilon I - \omega I^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\varepsilon I - \omega I^2}} \end{pmatrix}. \tag{5.4.40}$$

Используя четыре типа групп функций мер и делая замену $\lambda\nu \to \nu$, получим четыре типа матриц.

Тип I:

$$\mathbf{A}(H) = \left(\frac{1-\varepsilon_2 H}{1+\varepsilon_1 H}\right)^{-\frac{\nu}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}} \times$$

$$\times\begin{pmatrix} \dfrac{1+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)H}{\sqrt{(1+\varepsilon_1 H)(1-\varepsilon_2 H)}} & \dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_2 H}{\sqrt{(1+\varepsilon_1 H)(1-\varepsilon_2 H)}} \\ \dfrac{H}{\sqrt{(1+\varepsilon_1 H)(1-\varepsilon_2 H)}} & \dfrac{1}{\sqrt{(1+\varepsilon_1 H)(1-\varepsilon_2 H)}} \end{pmatrix}, \tag{5.4.41}$$

$$\mathbf{A}(I) = \left(\frac{1+\varepsilon_2 I}{1-\varepsilon_1 I}\right)^{\frac{\nu}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}} \times$$

$$\times\begin{pmatrix} \dfrac{1-(\varepsilon_1-\varepsilon_2)I}{\sqrt{(1-\varepsilon_1 I)(1+\varepsilon_2 I)}} & -\dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_2 I}{\sqrt{(1-\varepsilon_1 I)(1+\varepsilon_2 I)}} \\ -\dfrac{I}{\sqrt{(1-\varepsilon_1 I)(1+\varepsilon_2 I)}} & \dfrac{1}{\sqrt{(1-\varepsilon_1 I)(1+\varepsilon_2 I)}} \end{pmatrix}. \tag{5.4.42}$$

Тип II:

$$\mathbf{A}(H)=\exp\left(-\frac{\nu H}{1+\varepsilon_1 H}\right)\times\begin{pmatrix}\dfrac{1+2\varepsilon_1 H}{1+\varepsilon_1 H} & -\dfrac{\varepsilon_1^2 H}{1+\varepsilon_1 H}\\ \dfrac{H}{1+\varepsilon_1 H} & \dfrac{1}{1+\varepsilon_1 H}\end{pmatrix}, \tag{5.4.43}$$

$$\mathbf{A}(I)=\exp\left(\frac{\nu I}{1-\varepsilon_1 I}\right)\times\begin{pmatrix}\dfrac{1-2\varepsilon_1 I}{1-\varepsilon_1 I} & \dfrac{\varepsilon_1^2 I}{1-\varepsilon_1 I}\\ -\dfrac{I}{1-\varepsilon_1 I} & \dfrac{1}{1-\varepsilon_1 I}\end{pmatrix}. \tag{5.4.44}$$

Тип III:

$$\mathbf{A}(H)=\exp\left[\frac{\nu}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}\operatorname{arctg}\left(\frac{H\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}{1+H\varepsilon/2}\right)\right]\times$$
$$\times\begin{pmatrix}\dfrac{1+\varepsilon H}{\sqrt{1+\varepsilon H-\omega H^2}} & \dfrac{\omega H}{\sqrt{1+\varepsilon H-\omega H^2}}\\ \dfrac{H}{\sqrt{1+\varepsilon H-\omega H^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon H-\omega H^2}}\end{pmatrix}, \tag{5.4.45}$$

$$\mathbf{A}(I)=\exp\left[-\frac{\nu}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}\operatorname{arctg}\left(\frac{I\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}{1-I\varepsilon/2}\right)\right]\times$$
$$\times\begin{pmatrix}\dfrac{1-\varepsilon I}{\sqrt{1-\varepsilon I-\omega I^2}} & -\dfrac{\omega I}{\sqrt{1-\varepsilon I-\omega I^2}}\\ -\dfrac{I}{\sqrt{1-\varepsilon I-\omega I^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\varepsilon I-\omega I^2}}\end{pmatrix}. \tag{5.4.46}$$

Тип IV:

$$\mathbf{A}(H)=\exp\left(-\nu H^R\right)\times\begin{pmatrix}1 & 0\\ H^R & 1\end{pmatrix}, \tag{5.4.47}$$

$$\mathbf{A}(I) = \exp\left(\nu I^R\right) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -I^R & 1 \end{pmatrix}. \qquad (5.4.48)$$

5.5. Классификация параметризованных энтропий и информаций различия

Исследуем статистическую структуру параметризованных мер информаций, используя их групповые свойства. Для чего рассмотрим группы полунорм

$$N_{q-1}(p) = \left(\frac{\sum\limits_{i}^{m} p_i^q}{\sum\limits_{i}^{m} p_i} \right)^{1/(q-1)}, \quad N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right) = \left(\frac{\sum\limits_{i}^{m} p_i^q u_i^{1-q}}{\sum\limits_{i}^{m} p_i} \right)^{1/(q-1)}, \qquad (5.5.1)$$

являющихся функционалами распределений.

Вначале приведем закон композиции для $N_{q-1}(p)$ в виде обычного умножения

$$N_{q-1}(p_{12}) = N_{q-1}(p_1) \circ N_{q-1}(p_2) = N_{q-1}(p_1) N_{q-1}(p_2), \qquad (5.5.2)$$

что определяется свойством мультипликативности полунормы. Значения полунорм

$$N = N_{q-1}(p_{12}) = \left(\frac{\sum\limits_{i}^{m} \sum\limits_{j}^{n} p_{ij}^q}{\sum\limits_{i}^{m} \sum\limits_{j}^{n} p_{ij}} \right)^{1/(q-1)}, \qquad (5.5.3)$$

$$N_1 = N_{q-1}(p_1) = \left(\frac{\sum\limits_{i}^{m} p_{1i}^q}{\sum\limits_{i}^{m} p_{1i}} \right)^{1/(q-1)}, \quad N_2 = N_{q-1}(p_2) = \left(\frac{\sum\limits_{j}^{n} p_{2j}^q}{\sum\limits_{i}^{n} p_{2j}} \right)^{1/(q-1)} \qquad (5.5.4)$$

зависят от совместного распределения общего объекта $p_{ij} = p_i p_j$ и распределений независимых объектов p_i и p_j.

Приведем основные свойства закона композиции.

1.Коммутативность. Выполняется свойство коммутативности:

$$N_{q-1}(p_1)N_{q-1}(p_2)=N_{q-1}(p_2)N_{q-1}(p_1), \qquad (5.5.5)$$

следовательно, группа является абелевой.

2.Ассоциативность. Согласно аксиоме 2 (раздел 5.1) выполняется свойство ассоциативности

$$\left[N_{q-1}(p_1)N_{q-1}(p_2)\right]N_{q-1}(p_3)=$$
$$=N_{q-1}(p_1)\left[N_{q-1}(p_2)N_{q-1}(p_3)\right]=N_{q-1}(p_1p_2p_3). \qquad (5.5.6)$$

3.Единичный элемент. Согласно аксиоме 3 (раздел 5.1) единичный элемент группы есть постоянное значение полунормы

$$N_{q-1}(1)=1, \qquad (5.5.7)$$

равное единице при $p_i=1$. Это следует из нормированности полунормы на единицу (свойство 3, раздел 3.2).

4.Обратный элемент. Согласно аксиоме 4 (раздел 5.1) из формулы взаимосвязи

$$N_{q-1}(p)N_{-q+1}\left(p^{-1}\right)=1 \qquad (5.5.8)$$

вытекает выражение обратного элемента группы полунорм

$$\left[N_{q-1}(p)\right]^{-1}=N_{-q+1}\left(p^{-1}\right). \qquad (5.5.9)$$

Энтропия каждого объекта является функцией полунормы этого объекта, то есть имеем зависимости

$$H=H(N), \quad H_1=H_1(N_1), \quad H_2=H_2(N_2). \qquad (5.5.10)$$

Для энтропий имеем известный закон композиции

$$H=H_1\circ H_2=\frac{H_1+H_2+\varepsilon H_1H_2}{1+\omega H_1H_2}, \qquad (5.5.11)$$

где параметры ε и ω не зависят от энтропий.

Дифференцируем (5.5.2) и с учетом равенств

$$\frac{dN}{dH}=\frac{dN}{dN_1}\frac{dN_1}{dH_1}\frac{dH_1}{dH}, \quad \frac{dN}{dH}=\frac{dN}{dN_2}\frac{dN_2}{dH_2}\frac{dH_2}{dH} \qquad (5.5.12)$$

получим исходное уравнение [23]

$$\left(1+\varepsilon H-\omega H^2\right)\frac{d\left[\ln N_{q-1}(p)\right]}{dH}=\lambda, \qquad (5.5.13)$$

имеющее одинаковый вид для всех рассматриваемых объектов. Здесь λ есть произвольная постоянная интегрирования, которая может зависеть от ε и ω.

Далее аналогично находим исходное уравнение для информации различия

$$\left(1-\varepsilon I-\omega I^2\right)\frac{d\left[\ln N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)\right]}{dI}=-\lambda . \qquad (5.5.14)$$

При выводе (5.5.14) используются законы композиций

$$I=I_1\circ I_2=\frac{I_1+I_2-\varepsilon I_1 I_2}{1+\omega I_1 I_2}, \qquad (5.5.15)$$

$$N_{q-1}\left(\frac{p_{12}}{u_{12}}\right)=N_{q-1}\left(\frac{p_1}{u_1}\right)N_{q-1}\left(\frac{p_2}{u_2}\right) \qquad (5.5.16)$$

для независимых объектов.

Интегрируя уравнения (5.5.13) и (5.5.14) с условиями $N_{q-1}\left(p\right)=1$ при $H=0$ и $N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)=1$ при $I=0$, различаем четыре типа решений в зависимости от значения дискриминанта $D=\varepsilon^2+4\omega$. Первые три типа следуют, если уравнения $1+\varepsilon H-\omega H^2=0$ и $1-\varepsilon I-\omega I^2=0$ имеют вещественные и различные корни, включая случай $\omega=0$, два вещественных и равных, комплексные корни. Четвертый тип соответствует аддитивным законам композиций $H=H_1\circ H_2=H_1+H_2$ и $I=I_1\circ I_2=I_1+I_2$. Формально для этого типа можно в (5.5.13) и (5.5.14) принять равенство $\varepsilon=\omega=0$.

Решения рассматриваемых уравнений дают взаимосвязь $H=H\left[N_{q-1}(p)\right]$ и $I=I\left[N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)\right]$.

Рассмотрим соответствующие типы мер информаций.

Тип I. Пусть трехчлены при равенстве нулю имеют вещественные и различные корни, включая случай $\omega=0$. Запишем для трехчленов используемые ранее разложения на множители:

$$1+\varepsilon H-\omega H^2=\left[\frac{\left(1+\varepsilon_1 H\right)+\left(1-\varepsilon_2 H\right)}{2}\right]^2-$$

$$-\left[\frac{\left(1+\varepsilon_1 H\right)-\left(1-\varepsilon_2 H\right)}{2}\right]^2=\left(1+\varepsilon_1 H\right)\left(1-\varepsilon_2 H\right), \qquad (5.5.17)$$

$$1-\varepsilon I-\omega I^2=\left[\frac{\left(1-\varepsilon_1 I\right)+\left(1+\varepsilon_2 I\right)}{2}\right]^2-$$

$$-\left[\frac{\left(1-\varepsilon_1 I\right)-\left(1+\varepsilon_2 I\right)}{2}\right]^2=\left(1-\varepsilon_1 I\right)\left(1+\varepsilon_2 I\right) \quad . \qquad (5.5.18)$$

С учетом равенств $\varepsilon=\varepsilon_1-\varepsilon_2$, $\omega=\varepsilon_1\varepsilon_2$ и $D=\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)^2>0$, законы композиций мер информаций имеют вид

$$H=H_1\circ H_2=\frac{H_1+H_2+\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)H_1H_2}{1+\varepsilon_1\varepsilon_2 H_1H_2}, \qquad (5.5.19)$$

$$I=I_1\circ I_2=\frac{I_1+I_2-\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)I_1I_2}{1+\varepsilon_1\varepsilon_2 I_1I_2}. \qquad (5.5.20)$$

Решениями уравнений (5.5.13) и (5.5.14), являются следующие полунормы и меры информаций

$$N_{q-1}(p)=\left(\frac{1-\varepsilon_2 H}{1+\varepsilon_1 H}\right)^{-\frac{\lambda}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}, \quad H=\frac{1-\left[N_{q-1}(p)\right]^{-\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\lambda}}}{\varepsilon_2+\varepsilon_1\left[N_{q-1}(p)\right]^{-\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\lambda}}}, \qquad (5.5.21)$$

$$N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)=\left(\frac{1+\varepsilon_2 I}{1-\varepsilon_1 I}\right)^{\frac{\lambda}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}, \quad I=\frac{\left[N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)\right]^{-\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\lambda}}-1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1\left[N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)\right]^{-\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\lambda}}}. \qquad (5.5.22)$$

Учитывая условие нормированности энтропии

$$H_q\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=1 \qquad (5.5.23)$$

при $m = 2$, получим равенство

$$2^{\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\lambda}} = \frac{1-\varepsilon_2}{1+\varepsilon_1} \qquad (5.5.24)$$

для определения постоянной λ в (5.5.21).

Нормированная информация различия удовлетворяет условию

$$I_q\left(1,0:\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=1 \qquad (5.5.25)$$

и, соответственно, постоянная λ в (5.5.22) находится из равенства

$$2^{\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\lambda}} = \frac{1-\varepsilon_1}{1+\varepsilon_2}. \qquad (5.5.26)$$

Рассмотрим частные случаи мер информаций.

Тип IA ($\varepsilon_2 = 0$). Пусть трехчлен с $\omega = 0$ вырождается в двучлен $1+\varepsilon_1 H$. Законы композиций мер информаций запишутся так

$$H = H_1 \circ H_2 = H_1 + H_2 + \varepsilon_1 H_1 H_2, \qquad (5.5.27)$$

$$I = I_1 \circ I_2 = I_1 + I_2 - \varepsilon_1 I_1 I_2. \qquad (5.5.28)$$

1. При $\varepsilon_1/\lambda = q-1$ из (5.5.24) и (5.5.26) вытекают значения $\varepsilon_1 = 2^{1-q}-1$ для энтропии и $\varepsilon_1 = 1-2^{q-1}$ для информации различия. Если $\varepsilon_1/\lambda = r-1$, то имеют другие значения $\varepsilon_1 = 2^{1-r}-1$ и $\varepsilon_1 = 1-2^{r-1}$. Согласно (5.5.21) и (5.5.22) получим одно- и двухпараметрические энтропии

$$H_q = \frac{1}{1-2^{1-q}}\left(1-\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}\right), \qquad (5.5.29)$$

$$H_{q,r} = \frac{1}{1-2^{1-r}}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}\right)^{\frac{r-1}{q-1}}\right] \qquad (5.5.30)$$

и информации различия

$$I_q = \frac{1}{1-2^{q-1}}\left[1-\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}\right], \qquad (5.5.31)$$

$$I_{q,r} = \frac{1}{1-2^{r-1}}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}\right)^{\frac{r-1}{q-1}}\right]. \qquad (5.5.32)$$

Однопараметрические меры совпадают с энтропией Хаврда–Чарват–Дароши [78] и информацией различия Ратье–Каннаппана [101]. Двухпараметрические меры являются энтропией и информацией различия Шарма–Миттала, впервые введенные в работах [110] и [111], соответственно. Ненормированные информации различия равняются [120, 121]

$$I_q = \frac{1}{2^{1-q}-1}\left(1-\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}\right), \qquad (5.5.33)$$

$$I_{q,r} = \frac{1}{2^{1-r}-1}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}\right)^{\frac{r-1}{q-1}}\right] \qquad (5.5.34)$$

и рассматриваются в обзорах [120, 121].

2. Если $\lambda = -1$, а также $\varepsilon_1 = 1-q$ и $\varepsilon_1 = 1-r$, то имеем физические безразмерные меры информаций:

$$H_q^{phys} = \frac{1}{q-1}\left(1-\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}\right), H_{q,r}^{phys} = \frac{1}{r-1}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}\right)^{\frac{r-1}{q-1}}\right], \qquad (5.5.35)$$

$$I_q^{phys} = \frac{1}{1-q}\left(1-\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}\right), I_{q,r}^{phys} = \frac{1}{1-r}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}\right)^{\frac{r-1}{q-1}}\right], \qquad (5.5.36)$$

где однопараметрическая энтропия Вейрля впервые введена в работе [129].

3. При $\varepsilon_1/\lambda = 1-\beta$ и $q = 1/\beta$ имеем $\varepsilon_1 = 1-2^{\beta-1}$ для энтропии и $\varepsilon_1 = 1-2^{1-\beta}$ для информации различия, что дает из (5.5.21) и (5.5.22) нормированные меры информаций

$$H_\beta = \frac{1}{1-2^{\beta-1}}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^{1/\beta}}{\sum_i^m p_i}\right)^\beta\right], \qquad (5.5.37)$$

$$I_\beta = \frac{1}{1-2^{1-\beta}}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^{1/\beta} u_i^{1-1/\beta}}{\sum_i^m p_i}\right)^\beta\right]. \qquad (5.5.38)$$

Если $\lambda = -1$, $\varepsilon_1 = \beta - 1$ и $q = 1/\beta$, то имеем физические безразмерные меры

$$H_\beta^{phys} = \frac{1}{1-\beta}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^{1/\beta}}{\sum_i^m p_i}\right)^\beta\right], \qquad (5.5.39)$$

$$I_\beta^{phys} = \frac{1}{\beta-1}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^{1/\beta} u_i^{1-1/\beta}}{\sum_i^m p_i}\right)^\beta\right]. \tag{5.5.40}$$

Однопараметрическая энтропия Аримото (5.5.39) впервые введена в работе [54], а свойства мер изучены в [61, 120, 121].

Тип IB ($\varepsilon_1 = 0$). Пусть трехчлен с $\omega = 0$ вырождается в двучлен $1-\varepsilon_2 H$. Запишем законы композиции мер информации

$$H = H_1 \circ H_2 = H_1 + H_2 - \varepsilon_2 H_1 H_2, \tag{5.5.41}$$

$$I = I_1 \circ I_2 = I_1 + I_2 + \varepsilon_2 I_1 I_2. \tag{5.5.42}$$

1. При $\varepsilon_2 / \lambda = q-1$ из (5.5.24) и (5.5.26) вытекают значения $\varepsilon_2 = 1-2^{q-1}$ для энтропии и $\varepsilon_2 = 2^{1-q}-1$ для информации различия, соответственно. Если $\varepsilon_1 / \lambda = r-1$, то имеем другие значения $\varepsilon_2 = 1-2^{r-1}$ и $\varepsilon_2 = 2^{1-r}-1$. Согласно (5.5.21) и (5.5.22) получим одно- и двухпараметрические энтропии

$$H_q = \frac{1}{1-2^{q-1}}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}\right)^{-1}\right], \tag{5.5.43}$$

$$H_{q,r} = \frac{1}{1-2^{r-1}}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}\right)^{\frac{1-r}{q-1}}\right] \tag{5.5.44}$$

и информации различия

$$I_q = \frac{1}{2^{q-1}-1}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}\right)^{-1}\right], \tag{5.5.45}$$

$$I_{q,r}=\frac{1}{2^{r-1}-1}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}\right)^{\frac{1-r}{q-1}}\right].\qquad(5.5.46)$$

2. Если $\lambda=-1$, а также $\varepsilon_2=1-q$ и $\varepsilon_2=1-r$, то из (5.5.21) и (5.5.22) следуют физические безразмерные меры информаций

$$H_q^{phys}=\frac{1}{1-q}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}\right)^{-1}\right], H_{q,r}^{phys}=\frac{1}{1-r}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}\right)^{\frac{1-r}{q-1}}\right],\qquad(5.5.47)$$

$$I_q^{phys}=\frac{1}{q-1}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}\right)^{-1}\right], I_{q,r}^{phys}=\frac{1}{r-1}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}\right)^{\frac{1-r}{q-1}}\right].\qquad(5.5.48)$$

Однопараметрическая энтропия Ландсберга–Ведрала (5.5.47) впервые введена в работах [89, 90], где дается классификация мер, проведенная феноменологическим путем. Остальные меры информаций впервые вводятся в работах автора [21, 23].

3. При $\varepsilon_2/\lambda=1-\beta$ и $q=1/\beta$ имеем $\varepsilon_2=1-2^{1-\beta}$ для энтропии и $\varepsilon_2=1-2^{\beta-1}$ для информации различия, что дает из (5.5.21) и (5.5.22) нормированные меры информаций

$$H_\beta=\frac{1}{1-2^{1-\beta}}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^{1/\beta}}{\sum_i^m p_i}\right)^{-\beta}\right],\qquad(5.5.49)$$

$$I_\beta = \frac{1}{1-2^{\beta-1}}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^{1/\beta}u_i^{1-1/\beta}}{\sum_i^m p_i}\right)^{-\beta}\right]. \qquad (5.5.50)$$

Если $\lambda=-1$, $\varepsilon_2=\beta-1$ и $q=1/\beta$, то имеем физические безразмерные меры

$$H_\beta^{phys} = \frac{1}{\beta-1}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^{1/\beta}}{\sum_i^m p_i}\right)^{-\beta}\right], \qquad (5.5.51)$$

$$I_\beta^{phys} = \frac{1}{1-\beta}\left[1-\left(\frac{\sum_i^m p_i^{1/\beta}u_i^{1-1/\beta}}{\sum_i^m p_i}\right)^{-\beta}\right]. \qquad (5.5.52)$$

Тип IC ($\varepsilon=0$). Пусть трехчлен вырождается в двучлен $1-\omega H^2$, который при равенстве нулю имеет два противоположных корня и, следовательно, справедливы равенства $\varepsilon_1=\varepsilon_2$, $\omega=\varepsilon_1^2$. Законы композиции меры информаций запишутся так

$$H = H_1 \circ H_2 = \frac{H_1+H_2}{1+\varepsilon_1^2 H_1 H_2}, \qquad (5.5.53)$$

$$I = I_1 \circ I_2 = \frac{I_1+I_2}{1+\varepsilon_1^2 I_1 I_2}. \qquad (5.5.54)$$

1. При $\varepsilon_1/\lambda=1-q$ и $\varepsilon_1/\lambda=1-r$ из (5.5.24) вытекают, соответственно, значения параметров для энтропии

$$\varepsilon_1 = \frac{1-2^{2(1-q)}}{1+2^{2(1-q)}}, \quad \varepsilon_1 = \frac{1-2^{2(1-r)}}{1+2^{2(1-r)}}. \qquad (5.5.55)$$

Для информации различия имеем, согласно (5.5.26), значения параметров, совпадающие с (5.5.55). В итоге из (5.5.21) и (5.5.22) вытекают одно- и двухпараметрические энтропии:

$$H_q = \frac{1+2^{2(1-q)}}{1-2^{2(1-q)}}\left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)^2}{1+\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)^2}\right], \tag{5.5.56}$$

$$H_{q,r} = \frac{1+2^{2(1-r)}}{1-2^{2(1-r)}}\left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{\frac{2(r-1)}{q-1}}}{1+\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{\frac{2(r-1)}{q-1}}}\right] \tag{5.5.57}$$

и информации различия

$$I_q = \frac{2^{2(1-q)}+1}{2^{2(1-q)}-1}\left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^2}{1+\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^2}\right] \tag{5.5.58}$$

$$I_{q,r} = \frac{2^{2(1-r)}+1}{2^{2(1-r)}-1}\left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{\frac{2(r-1)}{q-1}}}{1+\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{\frac{2(r-1)}{q-1}}}\right]. \tag{5.5.59}$$

2. Если $\lambda = -1$, а также $\varepsilon_1 = q-1$ и $\varepsilon_1 = r-1$, то из (5.5.21) и (5.5.22) следуют физические безразмерные энтропии

$$H_q^{phys} = \frac{1}{q-1}\left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)^2}{1+\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)^2}\right], \tag{5.5.60}$$

$$H_{q,r}^{phys} = \frac{1}{r-1}\left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{\frac{2(r-1)}{q-1}}}{1+\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{\frac{2(r-1)}{q-1}}}\right] \qquad (5.5.61)$$

и информации различия

$$I_q^{phys} = \frac{1}{1-q}\left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^2}{1+\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^2}\right], \qquad (5.5.62)$$

$$I_{q,r}^{phys} = \frac{1}{1-r}\left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{\frac{2(r-1)}{q-1}}}{1+\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{\frac{2(r-1)}{q-1}}}\right]. \qquad (5.5.63)$$

3. При $\varepsilon_1/\lambda = 1-\beta$ и $q = 1/\beta$ имеем из (5.5.24) значение параметра для энтропии и информации различия

$$\varepsilon_1 = \frac{1-2^{2(1-\beta)}}{1+2^{2(1-\beta)}}, \qquad (5.5.64)$$

а из (5.5.21) и (5.5.22) вытекают нормированные меры информаций

$$H_\beta = \frac{1+2^{2(1-\beta)}}{1-2^{2(1-\beta)}}\left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{2\beta}}{1+\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{2\beta}}\right], \qquad (5.5.65)$$

$$I_\beta = \frac{1+2^{2(\beta-1)}}{1-2^{2(\beta-1)}} \left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} u_i^{1-1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i \right)^{2\beta}}{1+\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} u_i^{1-1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i \right)^{2\beta}} \right]. \quad (5.5.66)$$

Если $\lambda = -1$, $\varepsilon_1 = \beta - 1$ и $q = 1/\beta$, то имеем физические безразмерные меры информации

$$H_\beta^{phys} = \frac{1}{\beta-1} \left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i \right)^{2\beta}}{1+\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i \right)^{2\beta}} \right], \quad (5.5.67)$$

$$I_\beta^{phys} = \frac{1}{1-\beta} \left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} u_i^{1-1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i \right)^{2\beta}}{1+\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} u_i^{1-1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i \right)^{2\beta}} \right]. \quad (5.5.68)$$

Тип ID ($\varepsilon_2 = \gamma\varepsilon_1$). Пусть трехчлены равняются $1+\varepsilon H - \omega H^2 = (1+\varepsilon_1 H)(1-\gamma\varepsilon_1 H)$ и $1-\varepsilon I - \omega I^2 = (1-\varepsilon_1 I)(1+\gamma\varepsilon_1 I)$, то есть при равенстве их нулю имеем пропорциональные корни. Законы композиций мер информаций запишутся так

$$H = H_1 \circ H_2 = \frac{H_1 + H_2 + (1-\gamma)\varepsilon_1 H_1 H_2}{1+\gamma\varepsilon_1^2 H_1 H_2}, \quad (5.5.69)$$

$$I = I_1 \circ I_2 = \frac{I_1 + I_2 - (1-\gamma)\varepsilon_1 I_1 I_2}{1+\gamma\varepsilon_1^2 I_1 I_2}. \quad (5.5.70)$$

1. При $\varepsilon_1 / \lambda = q - 1$ из (5.5.24) и (5.5.26) следуют, соответственно, значения параметров для энтропии и информации различия

$$\varepsilon_1 = -\frac{1-2^{(1+\gamma)(1-q)}}{1+\gamma 2^{(1+\gamma)(1-q)}}, \quad \varepsilon_1 = -\frac{2^{(1+\gamma)(1-q)}-1}{1+\gamma 2^{(1+\gamma)(1-q)}}. \quad (5.5.71)$$

Согласно (5.5.21) и (5.5.22) получим двухпараметрическую энтропию:

$$H_{q,\gamma} = \frac{1+\gamma 2^{(1+\gamma)(1-q)}}{1-2^{(1+\gamma)(1-q)}} \left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i \right)^{1+\gamma}}{1+\gamma\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i \right)^{1+\gamma}} \right] \tag{5.5.72}$$

и информацию различия

$$I_{q,\gamma} = \frac{1+\gamma 2^{(1+\gamma)(1-q)}}{2^{(1+\gamma)(1-q)}-1} \left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i \right)^{1+\gamma}}{1+\gamma\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i \right)^{1+\gamma}} \right]. \tag{5.5.73}$$

2. Если $\lambda = -1$ и $\varepsilon_1 = 1-q$, то имеем физические безразмерные меры информаций

$$H_{q,\gamma}^{phys} = \frac{1}{q-1} \left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i \right)^{1+\gamma}}{1+\gamma\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i \right)^{1+\gamma}} \right], \tag{5.5.74}$$

$$I_{q,\gamma}^{phys} = \frac{1}{1-q} \left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i \right)^{1+\gamma}}{1+\gamma\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i \right)^{1+\gamma}} \right]. \tag{5.5.75}$$

3. При $\varepsilon_1 / \lambda = 1-\beta$ и $q = 1/\beta$ имеем из (5.5.24) и (5.5.26) значения параметров

$$\varepsilon_1 = -\frac{1-2^{(1+\gamma)(\beta-1)}}{1+\gamma 2^{(1+\gamma)(\beta-1)}}, \quad \varepsilon_1 = -\frac{1-2^{(1+\gamma)(1-\beta)}}{1+\gamma 2^{(1+\gamma)(1-\beta)}} \tag{5.5.76}$$

для энтропии и информации различия, соответственно. Согласно (5.5.21) и (5.5.22) получим двухпараметрическую энтропию:

$$H_{\beta,\gamma} = \frac{1+\gamma 2^{(1+\gamma)(\beta-1)}}{1-2^{(1+\gamma)(\beta-1)}} \left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i \right)^{(1+\gamma)\beta}}{1+\gamma\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i \right)^{(1+\gamma)\beta}} \right] \quad (5.5.77)$$

и информацию различия

$$I_{\beta,\gamma} = \frac{1+\gamma 2^{(1+\gamma)(1-\beta)}}{1-2^{(1+\gamma)(1-\beta)}} \left[\frac{1-\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} u_i^{1-1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i \right)^{(1+\gamma)\beta}}{1+\gamma\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} u_i^{1-1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i \right)^{(1+\gamma)\beta}} \right]. \quad (5.5.78)$$

Тип ID обобщает **Тип IA** и **Тип IC**, так как они соответствуют значениям параметра $\gamma = 0$ и $\gamma = 1$, соответственно.

Тип II. Пусть трехчлены при равенстве нулю имеют два вещественных и равных корня. Запишем для трехчленов используемые ранее разложения на множители $1+\varepsilon H - \omega H^2 = \left(1+\varepsilon_1 H\right)^2$ и $1-\varepsilon I - \omega I^2 = \left(1-\varepsilon_1 I\right)^2$. С учетом равенств $\omega = -\varepsilon_1^2$, $D = 0$, $\varepsilon = 2\varepsilon_1$ для энтропии и $\varepsilon = -2\varepsilon_1$ для информации различия законы композиций мер информаций имеют вид:

$$H = H_1 \circ H_2 = \frac{H_1 + H_2 - 2\varepsilon_1 H_1 H_2}{1-\varepsilon_1^2 H_1 H_2}, \quad (5.5.79)$$

$$I = I_1 \circ I_2 = \frac{I_1 + I_2 + 2\varepsilon_1 I_1 I_2}{1-\varepsilon_1^2 I_1 I_2}. \quad (5.5.80)$$

Решениями уравнений (5.5.13) и (5.5.14) являются следующие полунормы и меры информаций

$$N_{q-1}(p) = \exp\left(-\frac{\lambda H}{1+\varepsilon_1 H} \right), \quad H = -\frac{\lambda^{-1} \ln N_{q-1}(p)}{1+\varepsilon_1 \lambda^{-1} \ln N_{q-1}(p)}, \quad (5.5.81)$$

$$N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right) = \exp\left(\frac{\lambda I}{1-\varepsilon_1 I} \right), \quad I = \frac{\lambda^{-1} \ln N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)}{1+\varepsilon_1 \lambda^{-1} \ln N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)}. \quad (5.5.82)$$

Учитывая условия нормированности энтропии (5.5.23) и информации различия (5.5.25), получим равенства

$$\ln 2 = \frac{\lambda}{1+\varepsilon_1}, \quad \ln 2 = \frac{\lambda}{1-\varepsilon_1} \tag{5.5.83}$$

для определения значения λ в выражениях (5.5.81) и (5.5.82), соответственно.

1. При $\varepsilon_1/\lambda = q-1$ и $\varepsilon_1/\lambda = r-1$ из (5.5.83) вытекают соответствующие значения ε_1 для энтропии и для информации различия. Согласно (5.5.81) и (5.5.82) получим одно- и двухпараметрические энтропии

$$H_q = \frac{1+(1-q)\ln 2}{(1-q)\ln 2}\left[\frac{\ln\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)}{1+\ln\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)}\right], \tag{5.5.84}$$

$$H_{q,r} = \frac{1+(1-r)\ln 2}{(1-q)\ln 2}\left[\frac{\ln\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)}{1+\ln\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{\frac{r-1}{q-1}}}\right] \tag{5.5.85}$$

и информации различия

$$I_q = \frac{1+(q-1)\ln 2}{(q-1)\ln 2}\left[\frac{\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)}{1+\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)}\right], \tag{5.5.86}$$

$$I_{q,r} = \frac{1+(r-1)\ln 2}{(q-1)\ln 2}\left[\frac{\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)}{1+\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{\frac{r-1}{q-1}}}\right]. \tag{5.5.87}$$

2. Если $\lambda = 1$, а также $\varepsilon_1 = q-1$ и $\varepsilon_1 = r-1$, то из (5.5.81) и (5.5.82)

следуют физические безразмерные энтропии

$$H_q^{phys}=\frac{1}{1-q}\left[\frac{\ln\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)}{1+\ln\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)}\right], \tag{5.5.88}$$

$$H_{q,r}^{phys}=\frac{1}{1-q}\left[\frac{\ln\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)}{1+\ln\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)^{\frac{r-1}{q-1}}}\right] \tag{5.5.89}$$

и информации различия

$$I_q^{phys}=\frac{1}{q-1}\left[\frac{\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\Big/\sum_i^m p_i\right)}{1+\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\Big/\sum_i^m p_i\right)}\right], \tag{5.5.90}$$

$$I_{q,r}^{phys}=\frac{1}{q-1}\left[\frac{\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\Big/\sum_i^m p_i\right)}{1+\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\Big/\sum_i^m p_i\right)^{\frac{r-1}{q-1}}}\right]. \tag{5.5.91}$$

Одно- и двухпараметрические энтропии впервые введены автором в работе [23].

3. При $\varepsilon_1=1-\beta$ и $q=1/\beta$ имеем соответствующие значения λ для энтропии и информации различия, что дает из (5.5.81) и (5.5.82) нормированные меры информаций

$$H_\beta=\frac{1+(\beta-1)\ln 2}{(\beta-1)\ln 2}\left[\frac{\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta}\Big/\sum_i^m p_i\right)^\beta}{1+\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta}\Big/\sum_i^m p_i\right)^\beta}\right], \tag{5.5.92}$$

$$I_\beta = \frac{1+(1-\beta)\ln 2}{(1-\beta)\ln 2}\left[\frac{\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta}u_i^{1-1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^\beta}{1+\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta}u_i^{1-1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^\beta}\right]. \qquad (5.5.93)$$

Если $\lambda = 1$, $\varepsilon_1 = 1-\beta$ и $q = 1/\beta$, то имеем физические безразмерные меры

$$H_\beta^{phys} = \frac{1}{\beta-1}\left[\frac{\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^\beta}{1+\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^\beta}\right], \qquad (5.5.94)$$

$$I_\beta^{phys} = \frac{1}{1-\beta}\left[\frac{\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta}u_i^{1-1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^\beta}{1+\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta}u_i^{1-1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^\beta}\right]. \qquad (5.5.95)$$

Тип III. Пусть трехчлены при равенстве нулю не имеют вещественных корней, то есть справедливо условие $D < 0$. Законы композиций мер информаций имеют вид

$$H = H_1 \circ H_2 = \frac{H_1 + H_2 + \varepsilon H_1 H_2}{1-\left(\sqrt{-\omega}\right)^2 H_1 H_2}, \qquad (5.5.96)$$

$$I = I_1 \circ I_2 = \frac{I_1 + I_2 - \varepsilon I_1 I_2}{1-\left(\sqrt{-\omega}\right)^2 I_1 I_2}. \qquad (5.5.97)$$

Решениями уравнений (5.5.13) и (5.5.14) являются полунормы

$$N_{q-1}(p) = \exp\left\{\frac{\lambda}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon/2-\omega H}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon/2}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}\right)\right]\right\} =$$

$$= \exp\left[\frac{\lambda}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}\operatorname{arctg}\left(\frac{H\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}{1+H\varepsilon/2}\right)\right], \tag{5.5.98}$$

$$N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right) = \exp\left\{-\frac{\lambda}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon/2+\omega I}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon/2}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}\right)\right]\right\} =$$

$$= \exp\left[-\frac{\lambda}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}\operatorname{arctg}\left(\frac{I\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}{1-I\varepsilon/2}\right)\right] \tag{5.5.99}$$

и меры информаций

$$H = \frac{\operatorname{tg}\ln\left[N_{q-1}(p)\right]^{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}/\lambda}}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}-\frac{\varepsilon}{2}\left\{\operatorname{tg}\ln\left[N_{q-1}(p)\right]^{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}/\lambda}\right\}}, \tag{5.5.100}$$

$$I = \frac{\operatorname{tg}\ln\left[N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)\right]^{-\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}/\lambda}}{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}+\frac{\varepsilon}{2}\left\{\operatorname{tg}\ln\left[N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)\right]^{-\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}/\lambda}\right\}}. \tag{5.5.101}$$

Учитывая условия нормированности энтропии и информации различия(5.5.23) и (5.5.25), получим соответствующие значения постоянных

$$\lambda = -\frac{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}\quad \ln 2}{\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{-\omega-\varepsilon^2/4}}{1+\varepsilon/2}\right)}, \tag{5.5.102}$$

$$\lambda = -\frac{\sqrt{-\omega - \varepsilon^2/4} \quad \ln 2}{\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{-\omega - \varepsilon^2/4}}{1 - \varepsilon/2}\right)}. \tag{5.5.103}$$

Запишем для трехчленов используемые ранее выражения

$$1 + \varepsilon H - \omega H^2 = \left[\frac{(1 + \varepsilon_1 H) + (1 - \varepsilon_2 H)}{2}\right]^2 +$$

$$+\left[\frac{(1 + \varepsilon_1 H) - (1 - \varepsilon_2 H)}{2}\right]^2 = \frac{1}{2}\left[(1 + \varepsilon_1 H)^2 + (1 - \varepsilon_2 H)^2\right], \tag{5.5.104}$$

$$1 - \varepsilon I - \omega I^2 = \left[\frac{(1 - \varepsilon_1 I) + (1 + \varepsilon_2 I)}{2}\right]^2 +$$

$$+\left[\frac{(1 - \varepsilon_1 I) - (1 + \varepsilon_2 I)}{2}\right]^2 = \frac{1}{2}\left[(1 - \varepsilon_1 I)^2 + (1 + \varepsilon_2 I)^2\right]. \tag{5.5.105}$$

С учетом равенств

$$\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad \omega = -\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{2}, \quad D = \varepsilon^2 + 4\omega = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 \tag{5.5.106}$$

законы композиций мер информаций имеют вид:

$$H = H_1 \circ H_2 = \frac{H_1 + H_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) H_1 H_2}{1 - (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) H_1 H_2 / 2}, \tag{5.5.107}$$

$$I = I_1 \circ I_2 = \frac{I_1 + I_2 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) I_1 I_2}{1 - (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) I_1 I_2 / 2}. \tag{5.5.108}$$

Из (5.5.98)–(5.5.101) вытекают полунормы, энтропия и информация различия

$$N_{q-1}(p) = \exp\left\{\frac{2\lambda}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \operatorname{arctg}\left[\frac{H(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2}{1 + H(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/2}\right]\right\}, \tag{5.5.109}$$

$$N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right) = \exp\left\{-\frac{2\lambda}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \operatorname{arctg}\left[\frac{I(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2}{1 - I(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/2}\right]\right\}, \tag{5.5.110}$$

$$H = \frac{2\,\mathrm{tg}\left[\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2\lambda(q-1)}\ln\left(\sum\limits_i^m p_i^q \Big/ \sum\limits_i^m p_i\right)\right]}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)-(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\,\mathrm{tg}\left[\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2\lambda(q-1)}\ln\left(\sum\limits_i^m p_i^q \Big/ \sum\limits_i^m p_i\right)\right]}, \quad (5.5.111)$$

$$I = \frac{2\,\mathrm{tg}\left[-\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2\lambda(q-1)}\ln\left(\sum\limits_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum\limits_i^m p_i\right)\right]}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\,\mathrm{tg}\left[\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2\lambda(q-1)}\ln\left(\sum\limits_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum\limits_i^m p_i\right)\right]}. \quad (5.5.112)$$

Значения постоянных в нормированных энтропии и информации различия равняются

$$\lambda = -\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\ln 2}{2\,\mathrm{arctg}\left[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\big/(2+\varepsilon_1-\varepsilon_2)\right]}, \quad (5.5.113)$$

$$\lambda = -\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\ln 2}{2\,\mathrm{arctg}\left[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\big/(2-\varepsilon_1+\varepsilon_2)\right]}. \quad (5.5.114)$$

Рассмотрим частные случаи мер информаций.

Тип IIIA ($\varepsilon_2 = 0$). Пусть трехчлены равняются $1+\varepsilon H-\omega H^2 = \frac{1}{2}\left[1+(1+\varepsilon_1 H)^2\right]$ и $1-\varepsilon I-\omega I^2 = \frac{1}{2}\left[1+(1-\varepsilon_1 I)^2\right]$. Законы композиций мер информаций запишутся так

$$H = H_1 \circ H_2 = \frac{H_1+H_2+\varepsilon_1 H_1 H_2}{1-\varepsilon_1^2 H_1 H_2/2}, \quad (5.5.115)$$

$$I = I_1 \circ I_2 = \frac{I_1+I_2-\varepsilon_1 I_1 I_2}{1-\varepsilon_1^2 I_1 I_2/2}. \quad (5.5.116)$$

1. При $\varepsilon_1/\lambda = q-1$ из (5.5.113) и (5.5.114) вытекают значения параметров

$$\varepsilon_1 = \frac{2\,\mathrm{tg}\left[(1-q)(\ln 2)/2\right]}{1-\mathrm{tg}\left[(1-q)(\ln 2)/2\right]}, \quad \varepsilon_1 = \frac{2\,\mathrm{tg}\left[(q-1)(\ln 2)/2\right]}{1+\mathrm{tg}\left[(q-1)(\ln 2)/2\right]} \quad (5.5.117)$$

для энтропии и информации различия, соответственно. Если $\varepsilon_1/\lambda = r-1$, то в (5.5.117) следует сделать замену q на r. Таким образом, из (5.5.111) и (5.5.112) получим одно- и двухпараметрические энтропии

$$H_q = \frac{1-\mathrm{tg}\left[(1-q)(\ln 2)/2\right]}{\mathrm{tg}\left[(1-q)(\ln 2)/2\right]}\left\{\frac{\mathrm{tg}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)\right]}{1-\mathrm{tg}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)\right]}\right\}, \tag{5.5.118}$$

$$H_{q,r} = \frac{1-\mathrm{tg}\left[(1-r)(\ln 2)/2\right]}{\mathrm{tg}\left[(1-r)(\ln 2)/2\right]}\left\{\frac{\mathrm{tg}\left[\frac{r-1}{2(q-1)}\ln\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)\right]}{1-\mathrm{tg}\left[\frac{r-1}{2(q-1)}\ln\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)\right]}\right\} \tag{5.5.119}$$

и информации различия

$$I_q = \frac{1+\mathrm{tg}\left[(q-1)(\ln 2)/2\right]}{\mathrm{tg}\left[(q-1)(\ln 2)/2\right]}\left\{\frac{\mathrm{tg}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)\right]}{1+\mathrm{tg}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)\right]}\right\}, \tag{5.5.120}$$

$$I_{q,r} = \frac{1+\mathrm{tg}\left[(r-1)(\ln 2)/2\right]}{\mathrm{tg}\left[(r-1)(\ln 2)/2\right]}\times$$
$$\times\left\{\frac{\mathrm{tg}\left[\frac{r-1}{2(q-1)}\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)\right]}{1+\mathrm{tg}\left[\frac{r-1}{2(q-1)}\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)\right]}\right\}\ . \tag{5.5.121}$$

2. Если $\lambda=-1$, а также $\varepsilon_1 = 1-q$ и $\varepsilon_1 = 1-r$, то имеем физические безразмерные меры информаций

$$H_q^{phys} = \frac{1}{1-q}\left\{\frac{2\,\mathrm{tg}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)\right]}{1-\mathrm{tg}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)\right]}\right\}, \tag{5.5.122}$$

$$H_{q,r}^{phys} = \frac{1}{1-r}\left\{\frac{2\,\mathrm{tg}\left[\frac{r-1}{2(q-1)}\ln\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)\right]}{1-\mathrm{tg}\left[\frac{r-1}{2(q-1)}\ln\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)\right]}\right\}, \qquad (5.5.123)$$

$$I_q^{phys} = \frac{1}{q-1}\left\{\frac{2\,\mathrm{tg}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)\right]}{1+\mathrm{tg}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)\right]}\right\}, \qquad (5.5.124)$$

$$I_{q,r}^{phys} = \frac{1}{r-1}\left\{\frac{2\,\mathrm{tg}\left[\frac{r-1}{2(q-1)}\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)\right]}{1+\mathrm{tg}\left[\frac{r-1}{2(q-1)}\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)\right]}\right\}. \qquad (5.5.125)$$

3. При $\varepsilon_1/\lambda = 1-\beta$ и $q = 1/\beta$ имеем соответствующие значения постоянных для энтропии и информации различия и в итоге из (5.5.111) и (5.5.112) получим

$$H_\beta = \frac{1-\mathrm{tg}\left[(\beta-1)(\ln 2)/2\right]}{\mathrm{tg}\left[(\beta-1)(\ln 2)/2\right]}\left\{\frac{\mathrm{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{\beta/2}\right]}{1-\mathrm{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{\beta/2}\right]}\right\}, \qquad (5.5.126)$$

$$I_\beta = \frac{1+\mathrm{tg}\left[(1-\beta)(\ln 2)/2\right]}{\mathrm{tg}\left[(1-\beta)(\ln 2)/2\right]}\times$$

$$\times\left\{\frac{\mathrm{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} u_i^{1-1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{\beta/2}\right]}{1+\mathrm{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} u_i^{1-1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{\beta/2}\right]}\right\}. \qquad (5.5.127)$$

Если $\lambda = -1$, $\varepsilon_1 = \beta - 1$ и $q = 1/\beta$, то имеем физические безразмерные меры:

$$H_\beta^{phys} = \frac{2}{\beta-1}\left\{\frac{\mathrm{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{\beta/2}\right]}{1-\mathrm{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{\beta/2}\right]}\right\}, \qquad (5.5.128)$$

$$I_\beta^{phys} = \frac{2}{1-\beta}\left\{\frac{\mathrm{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} u_i^{1-1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{\beta/2}\right]}{1+\mathrm{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} u_i^{1-1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{\beta/2}\right]}\right\}. \qquad (5.5.129)$$

Тип IIIB ($\varepsilon = 0$). Пусть трехчлены с $\omega = -\varepsilon_1^2$ вырождаются в двучлены $1-\omega H^2$ и $1-\omega I^2$. Законы композиций мер информаций запишутся так

$$H = H_1 \circ H_2 = \frac{H_1 + H_2}{1-\varepsilon_1^2 H_1 H_2}, \qquad (5.5.130)$$

$$I = I_1 \circ I_2 = \frac{I_1 + I_2}{1-\varepsilon_1^2 I_1 I_2}. \qquad (5.5.131)$$

При значениях энтропий, равных $H_1 = \left(-1\big/\sqrt{-\omega}\right)$ и $H_2 = \left(1\big/\varepsilon_1\right)$, из закона композиции (5.5.130) получим энтропии

$$H_+ = \left(-\frac{1}{\varepsilon_1}\right) \circ H = \left(-\frac{1}{\varepsilon_1}\right) \cdot \frac{1-\varepsilon_1 H}{1+\varepsilon_1 H}, \qquad (5.5.132)$$

$$H_- = H \circ \left(\frac{1}{\varepsilon_1}\right) = \left(\frac{1}{\varepsilon_1}\right) \cdot \frac{1+\varepsilon_1 H}{1-\varepsilon_1 H}. \qquad (5.5.133)$$

Из (5.5.132) и (5.5.133) вытекает, что в данной группе значения энтропий не имеют инвариантных выражений для независимых объектов. Однако для обычного произведения H_+ на H_- выполняется инвариантное соотношение

$$H_+ H_- = -\frac{1}{\varepsilon_1^2}, \qquad (5.5.134)$$

а для произведения элементов группы имеем

$$H_+ \circ H_- = \frac{2H}{1-\varepsilon_1^2 H}. \qquad (5.5.135)$$

Аналогичные выводы справедливы для информации различия.

Из (5.5.98) – (5.5.101) вытекают полунормы

$$N_{q-1}(p) = \exp\left[\frac{\lambda}{\varepsilon_1}\operatorname{arctg}\left(\varepsilon_1 H\right)\right], \qquad (5.5.136)$$

$$N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right) = \exp\left[-\frac{\lambda}{\varepsilon_1}\operatorname{arctg}\left(\varepsilon_1 I\right)\right] \qquad (5.5.137)$$

и меры информации

$$H = \frac{1}{\varepsilon_1}\operatorname{tg}\ln\left[N_{q-1}(p)\right]^{\varepsilon_1/\lambda}, \qquad (5.5.138)$$

$$I = \frac{1}{\varepsilon_1}\operatorname{tg}\ln\left[N_{q-1}(p)\right]^{-\varepsilon_1/\lambda}. \qquad (5.5.139)$$

Согласно (5.5.102) или (5.5.103), имеем значение постоянной

$$\lambda = -\frac{\varepsilon_1 \ln 2}{\operatorname{arctg}\varepsilon_1}. \qquad (5.5.140)$$

1. При $\varepsilon_1/\lambda = q-1$ и $\varepsilon_1/\lambda = r-1$ с учетом (5.5.140) из (5.5.138), (5.5.139) получим одно- и двухпараметрические энтропии

$$H_q = \frac{\operatorname{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)\right]}{\operatorname{tg}\left[\left(1-q\right)\ln 2\right]}, \qquad (5.5.141)$$

$$H_{q,r} = \frac{\operatorname{tg}\left[\frac{1-r}{1-q}\ln\left(\sum_i^m p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i\right)\right]}{\operatorname{tg}\left[\left(1-r\right)\ln 2\right]} \qquad (5.5.142)$$

и информации различия:

$$I_q = \frac{\mathrm{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)\right]}{\mathrm{tg}\left[(q-1)\ln 2\right]}, \tag{5.5.143}$$

$$I_{q,r} = \frac{\mathrm{tg}\left[\frac{1-r}{1-q}\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \sum_i^m p_i\right)\right]}{\mathrm{tg}\left[(r-1)\ln 2\right]}. \tag{5.5.144}$$

2. Если $\lambda = -1$, а также $\varepsilon_1 = 1-q$ и $\varepsilon_1 = 1-r$, то из (5.5.138), (5.5.139) получим физические безразмерные меры информации

$$H_q^{phys} = \frac{1}{1-q}\mathrm{tg}\left[\ln\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}\right], \quad H_{q,r}^{phys} = \frac{1}{1-r}\mathrm{tg}\left[\frac{1-r}{1-q}\ln\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}\right], \tag{5.5.145}$$

$$I_q^{phys} = \frac{1}{q-1}\mathrm{tg}\left[\ln\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}\right], \; I_{q,r}^{phys} = \frac{1}{r-1}\mathrm{tg}\left[\frac{1-r}{1-q}\ln\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}\right]. \tag{5.5.146}$$

Одно- и двухпараметрические энтропии (5.5.145) и информации различия (5.5.146) впервые введены автором в работе [23].

3. При $\varepsilon_1/\lambda = 1-\beta$ и $q = 1/\beta$ из (5.5.138) и (5.5.139) вытекают нормированные меры информаций

$$H_\beta = \frac{1}{\mathrm{tg}\left[(\beta-1)\ln 2\right]}\mathrm{tg}\left[\ln\left(\frac{\sum_i^m p_i^{1/\beta}}{\sum_i^m p_i}\right)^\beta\right], \tag{5.5.147}$$

$$I_\beta = \frac{1}{\mathrm{tg}\left[(1-\beta)\ln 2\right]}\mathrm{tg}\left[\ln\left(\frac{\sum_i^m p_i^{1/\beta} u_i^{1-1/\beta}}{\sum_i^m p_i}\right)^\beta\right]. \tag{5.5.148}$$

Если $\varepsilon_1/\lambda = 1-\beta$, $\lambda = -1$ и $q = 1/\beta$, то имеем физические безразмерные меры информации:

$$H_\beta^{phys} = \frac{1}{\beta - 1} \operatorname{tg}\left[\ln \left(\frac{\sum_i^m p_i^{1/\beta}}{\sum_i^m p_i} \right)^\beta \right], \tag{5.5.149}$$

$$I_\beta^{phys} = \frac{1}{1 - \beta} \operatorname{tg}\left[\ln \left(\frac{\sum_i^m p_i^{1/\beta} u_i^{1-1/\beta}}{\sum_i^m p_i} \right)^\beta \right]. \tag{5.5.150}$$

Тип IIIC $\left(\varepsilon_2 = \gamma\varepsilon_1\right)$**.** Пусть трехчлены равняются

$$1 + \varepsilon H - \omega H^2 = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \varepsilon_1 H\right)^2 + \left(1 - \gamma\varepsilon_1 H\right)^2 \right], \tag{5.5.151}$$

$$1 - \varepsilon I - \omega I^2 = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \varepsilon_1 I\right)^2 + \left(1 + \gamma\varepsilon_1 I\right)^2 \right]. \tag{5.5.152}$$

Тогда, согласно (5.5.107) и (5.5.108), законы композиции мер информаций запишутся так

$$H = H_1 \circ H_2 = \frac{H_1 + H_2 + (1 - \gamma)\varepsilon_1 H_1 H_2}{1 - \left(1 + \gamma^2\right)\varepsilon_1^2 H_1 H_2 / 2}, \tag{5.5.153}$$

$$I = I_1 \circ I_2 = \frac{I_1 + I_2 - (1 - \gamma)\varepsilon_1 I_1 I_2}{1 - \left(1 + \gamma^2\right)\varepsilon_1^2 I_1 I_2 / 2}. \tag{5.5.154}$$

1. При $\varepsilon_1 / \lambda = 1 - q$ из (5.5.113) и (5.5.114) вытекают, соответственно, значения параметров для энтропии и информации различия

$$\varepsilon_1 = \frac{2 \operatorname{tg}\left[(1 + \gamma)(1 - q)(\ln 2)/2 \right]}{(1 + \gamma) - (1 - \gamma) \operatorname{tg}\left[(1 + \gamma)(1 - q)(\ln 2)/2 \right]}, \tag{5.5.155}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{2 \operatorname{tg}\left[(1 + \gamma)(q - 1)(\ln 2)/2 \right]}{(1 + \gamma) + (1 - \gamma) \operatorname{tg}\left[(1 + \gamma)(q - 1)(\ln 2)/2 \right]}. \tag{5.5.156}$$

Согласно (5.5.11) и (5.5.112) получим двухпараметрическую энтропию:

$$H_{q,\gamma}=\frac{(1+\gamma)-(1-\gamma)\operatorname{tg}\left[(1+\gamma)(1-q)(\ln 2)/2\right]}{\operatorname{tg}\left[(1+\gamma)(1-q)(\ln 2)/2\right]}\times$$

$$\times\frac{\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(1+\gamma)\ln\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]}{(1+\gamma)-(1-\gamma)\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(1+\gamma)\ln\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]}\,, \qquad (5.5.157)$$

$$I_{q,\gamma}=\frac{(1+\gamma)+(1-\gamma)\operatorname{tg}\left[(1+\gamma)(q-1)(\ln 2)/2\right]}{\operatorname{tg}\left[(1+\gamma)(q-1)(\ln 2)/2\right]}\times$$

$$\times\frac{\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(1+\gamma)\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]}{(1+\gamma)+(1-\gamma)\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(1+\gamma)\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]}\,. \qquad (5.5.158)$$

2. Если $\lambda=-1$ и $\varepsilon_1=1-q$, то имеем физические безразмерные меры информации

$$H_{q,\gamma}^{phys}=\frac{2\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(1+\gamma)\ln\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]}{(1-q)\left\{(1+\gamma)-(1-\gamma)\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(1+\gamma)\ln\left(\sum_i^m p_i^q\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]\right\}}\,, \qquad (5.5.159)$$

$$I_{q,\gamma}^{phys}=\frac{2\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(1+\gamma)\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]}{(q-1)\left\{(1+\gamma)+(1-\gamma)\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(1+\gamma)\ln\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\Big/\sum_i^m p_i\right)\right]\right\}}\,. \qquad (5.5.160)$$

3. При $\varepsilon_2/\lambda=1-\beta$ и $q=1/\beta$ имеем из (5.5.111) и (5.5.112) двухпараметрическую энтропию:

$$H_{\beta,\gamma} = \frac{2\,\mathrm{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{\frac{(1+\gamma)\beta}{2}}\right]}{\varepsilon_2\left\{(1+\gamma)-(1-\gamma)\,\mathrm{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{\frac{(1+\gamma)\beta}{2}}\right]\right\}} \qquad (5.5.161)$$

и информацию различия

$$I_{\beta,\gamma} = -\frac{2\,\mathrm{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta}u_i^{1-1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{\frac{(1+\gamma)\beta}{2}}\right]}{\varepsilon_2\left\{(1+\gamma)+(1-\gamma)\,\mathrm{tg}\left[\ln\left(\sum_i^m p_i^{1/\beta}u_i^{1-1/\beta} \Big/ \sum_i^m p_i\right)^{\frac{(1+\gamma)\beta}{2}}\right]\right\}} \qquad (5.5.162)$$

с соответствующими значениями параметров

$$\varepsilon_2 = \frac{2\,\mathrm{tg}\left[(1+\gamma)(\beta-1)(\ln 2)/2\right]}{(1+\gamma)-(1-\gamma)\,\mathrm{tg}\left[(1+\gamma)(\beta-1)(\ln 2)/2\right]}, \qquad (5.5.163)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{2\,\mathrm{tg}\left[(1+\gamma)(\beta-1)(\ln 2)/2\right]}{(1+\gamma)+(1-\gamma)\,\mathrm{tg}\left[(1+\gamma)(1-\beta)(\ln 2)/2\right]}. \qquad (5.5.164)$$

Тип IIIC обобщает **тип IA** и **тип IB**, так как они соответствуют значениям параметра $\gamma = 0$ и $\gamma = 1$.

Тип IV ($\varepsilon = \omega = 0$). Пусть трехчлен вырождается в единицу, то есть параметры равняются нулю. Законы композиции запишутся так

$$H = H_1 \circ H_2 = H_1 + H_2, \qquad (5.5.165)$$

$$I = I_1 \circ I_2 = I_1 + I_2. \qquad (5.5.166)$$

Решениями уравнений (5.5.13) и (5.5.14) являются следующие полунормы и физические безразмерные меры информаций

$$N_{q-1}(p) = \exp(\lambda H), \quad H = \lambda^{-1} \ln N_{q-1}(p), \qquad (5.5.167)$$

$$N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)=\exp\left(-\lambda I\right),\quad I=\lambda^{-1}\ln N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right). \qquad (5.5.168)$$

1. Учитывая условия нормированности энтропии (5.5.23) и информации различия (5.5.25), получим равенство

$$\lambda=-\ln 2\,. \qquad (5.5.169)$$

В итоге из (5.5.167) и (5.5.168) имеем однопараметрические меры Реньи [103, 104]

$$H_q=\frac{1}{1-q}\log_2\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i},\quad I_q=\frac{1}{q-1}\log_2\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}. \qquad (5.5.170)$$

2. Если $\lambda=-1$, то имеем известные физические безразмерные меры

$$H_q^{phys}=\frac{1}{1-q}\ln\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i},\quad I_q^{phys}=\frac{1}{q-1}\ln\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}. \qquad (5.5.171)$$

3. При $\lambda=-1$ и $q=1/\beta$ получим физические безразмерные меры

$$H_\beta^{phys}=\frac{1}{\beta-1}\ln\left(\frac{\sum_i^m p_i^{1/\beta}}{\sum_i^m p_i}\right)^\beta, \qquad (5.5.172)$$

$$I_\beta^{phys}=\frac{1}{1-\beta}\ln\left(\frac{\sum_i^m p_i^{1/\beta}u_i^{1-1/\beta}}{\sum_i^m p_i}\right)^\beta. \qquad (5.5.173)$$

В заключение отметим, что в пределах из рассматриваемых нормированных мер вытекают энтропия Шеннона–Винера и информация различия Кульбака–Лейблера

$$H(p)=\lim_{q\to1}H_q=\lim_{\substack{q\to1\\ r\to1}}H_{q,r}=\lim_{\beta\to1}H_\beta=\lim_{\substack{\beta\to1\\ \gamma\to1}}H_{\beta,\gamma}=\lim_{\substack{\beta\to1\\ \gamma\to0}}H_{\beta,\gamma}=$$

$$= \lim_{\substack{q\to 1\\ \gamma\to 1}} H_{q,\gamma} = \lim_{\substack{q\to 1\\ \gamma\to 0}} H_{q,\gamma} = -\frac{\sum_i^m \left(\log_2 p_i\right) p_i}{\sum_i^m p_i}, \qquad (5.5.174)$$

$$I\left(p:u\right) = \lim_{q\to 1} I_q = \lim_{\substack{q\to 1\\ r\to 1}} I_{q,r} = \lim_{\beta\to 1} I_\beta = \lim_{\substack{\beta\to 1\\ \gamma\to 1}} I_{\beta,\gamma} = \lim_{\substack{\beta\to 1\\ \gamma\to 0}} I_{\beta,\gamma} =$$

$$= \lim_{\substack{q\to 1\\ \gamma\to 1}} I_{q,\gamma} = \lim_{\substack{q\to 1\\ \gamma\to 0}} I_{q,\gamma} = \frac{\sum_i^m \left(\log_2 \frac{p_i}{u_i}\right) p_i}{\sum_i^m p_i}. \qquad (5.5.175)$$

Таким образом, рассматриваемым законам композиций соответствуют только четыре принципиально различных типа мер информаций. Первые три содержат в законах композиций квадратичную нелинейность, а четвертый отражает аддитивные параметризованные меры. Причем рассматриваемые типы могут содержать и другие частные случаи мер информаций.

5.6. Предельные однопараметрические меры

Рассмотрим предельные выражения двухпараметрических мер информаций $H_{q,r}(p)$ и $I_{q,r}\left(\frac{p}{u}\right)$ при $r=1$ и $q=1$. Для всех нормированных типов мер информаций при $r=1$ получим предельные однопараметрические меры

$$\lim_{r\to 1} H_{q,r} = \frac{1}{1-q}\log_2 \frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}, \qquad (5.6.1)$$

$$\lim_{r\to 1} I_{q,r} = \frac{1}{q-1}\log_2 \frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}, \qquad (5.6.2)$$

совпадающие с энтропией и информацией различия Реньи.

Если $q=1$, то используем известные соотношения:

$$\lim_{q\to 1} N_{q-1}(p) = N(p) = 2^{-H(p)} = e^{-H^{phys}(p)}, \qquad (5.6.3)$$

$$\lim_{q\to 1} N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right) = N\left(\frac{p}{u}\right) = 2^{I(p:u)} = e^{I^{phys}(p:u)} \qquad (5.6.4)$$

при нахождении мер

$$H_r = \lim_{q\to 1} H_{q,r}, \quad I_r = \lim_{q\to 1} I_{q,r}. \qquad (5.6.5)$$

Здесь энтропия Шеннона–Винера и информация различия Кульбака–Лейблера есть функционалы

$$H(p) = -\frac{\sum_i^m \left(\log_2 p_i\right) p_i}{\sum_i^m p_i}, \quad I(p:u) = \frac{\sum_i^m \left(\log_2 \frac{p_i}{u_i}\right) p_i}{\sum_i^m p_i}. \qquad (5.6.6)$$

В случае физических безразмерных мер используемый логарифм меняется на натуральный.

Свойства средних геометрических $N_{q-1}(p)$ и $N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)$ даются в разделе 1.3.

Приведем соответствующие типы мер информаций, вытекающие при $q=1$ из результатов предыдущего раздела.

Тип IA.

1. $H_r = \frac{1}{1-2^{1-r}}\left[1-2^{(1-r)H(p)}\right],\ I_r = \frac{1}{1-2^{r-1}}\left[1-2^{(r-1)I(p:u)}\right], \qquad (5.6.7)$

2. $H_r^{phys} = \frac{1}{r-1}\left[1-e^{(1-r)H^{phys}(p)}\right],\ I_r^{phys} = \frac{1}{1-r}\left[1-e^{(r-1)I^{phys}(p:u)}\right]. \qquad (5.6.8)$

Тип IB.

1. $H_r = \frac{1}{1-2^{r-1}}\left[1-2^{(r-1)H(p)}\right], \quad I_r = \frac{1}{2^{r-1}-1}\left[1-2^{(1-r)I(p:u)}\right], \qquad (5.6.9)$

2. $H_r^{phys} = \frac{1}{1-r}\left[1-e^{(r-1)H^{phys}(p)}\right], \quad I_r^{phys} = \frac{1}{r-1}\left[1-e^{(1-r)I^{phys}(p:u)}\right]. \qquad (5.6.10)$

Тип IC.

$$1\!:\; H_r = \frac{1+2^{2(1-r)}}{1-2^{2(1-r)}}\left[\frac{1-2^{2(1-r)H(p)}}{1+2^{2(1-r)H(p)}}\right],$$

$$I_r = \frac{2^{2(1-r)}+1}{2^{2(1-r)}-1}\left[\frac{1-2^{2(r-1)I(p:u)}}{1+2^{2(r-1)I(p:u)}}\right]. \tag{5.6.11}$$

$$2\!:\; H_r^{phys} = \frac{1}{r-1}\left[\frac{1-e^{2(1-r)H^{phys}(p)}}{1+e^{2(1-r)H^{phys}(p)}}\right],$$

$$I_r^{phys} = \frac{1}{1-r}\left[\frac{1-e^{2(r-1)I^{phys}(p:u)}}{1+e^{2(r-1)I^{phys}(p:u)}}\right]. \tag{5.6.12}$$

Тип II.

$$1.\; H_r = \frac{\left[1+(1-r)\ln 2\right]H(p)}{1+2^{(1-r)H(p)}}, \quad I_r = \frac{\left[1+(r-1)\ln 2\right]I(p:u)}{1+2^{(r-1)I(p:u)}}, \tag{5.6.13}$$

$$2.\; H_r^{phys} = \frac{H(p)}{1+2^{(1-r)H(p)}}, \quad I_r^{phys} = \frac{I(p:u)}{1+2^{(r-1)I(p:u)}}. \tag{5.6.14}$$

Тип IIIA.

$$1\!:\; H_r = \frac{1-\mathrm{tg}\left[(1-r)\ln 2\right]}{\mathrm{tg}\left[(1-r)\ln 2\right]}\left\{\frac{\mathrm{tg}\left[(1-r)H(p)\right]}{1-\mathrm{tg}\left[(1-r)H(p)\right]}\right\},$$

$$I_r = \frac{1+\mathrm{tg}\left[(r-1)\ln 2\right]}{\mathrm{tg}\left[(r-1)\ln 2\right]}\left\{\frac{\mathrm{tg}\left[(r-1)I(p:u)\right]}{1+\mathrm{tg}\left[(r-1)I(p:u)\right]}\right\}. \tag{5.6.15}$$

$$2\!:\; H_r^{phys} = \frac{1}{1-r}\left\{\frac{\mathrm{tg}\left[(1-r)H^{phys}(p)\right]}{1-\mathrm{tg}\left[(1-r)H^{phys}(p)\right]}\right\},$$

$$I_r^{phys} = \frac{1}{r-1}\left\{\frac{\mathrm{tg}\left[(r-1)I^{phys}(p:u)\right]}{1+\mathrm{tg}\left[(r-1)I^{phys}(p:u)\right]}\right\}. \tag{5.6.16}$$

Тип IIIB.

$$1\!:\; H_r = \frac{\mathrm{tg}\left[(1-r)H(p)\right]}{\mathrm{tg}\left[(1-r)\ln 2\right]},$$

$$I_r = \frac{\operatorname{tg}\left[(r-1)I(p:u)\right]}{\operatorname{tg}\left[(r-1)\ln 2\right]}. \tag{5.6.17}$$

$$2\colon\ H_r^{phys} = \frac{1}{1-r}\operatorname{tg}\left[(1-r)H^{phys}(p)\right],$$

$$I_r^{phys} = \frac{1}{r-1}\operatorname{tg}\left[(r-1)I^{phys}(p:u)\right]. \tag{5.6.18}$$

Отметим, что меры информаций, рассмотренные в разделе 3.5, можно представить в формах (5.6.7) – (5.6.18) при замене $H(p)$ и $I(p:u)$ на энтропию и информацию различия Реньи.

5.7. Закон композиции элементов группы случайных мер

Переходим к исследованию абелевой группы случайных энтропий $h = h(p)$ с коммутативным законом композиции элементов $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$, в который входят только $h_1 = h(p_1)$, $h_2 = h(p_2)$ и их произведения $h_1 h_2$. Приведем абстрактный вывод явного вида закона композиции элементов и его свойства. Для чего запишем закон в следующем виде

$$h = h_1 \circ h_2 = a\left[h_1 + h_2\psi(h_1)\right]. \tag{5.7.1}$$

Здесь коэффициент a не зависит от h_1 и h_2. В противном случае не будет соответствия с группой средних энтропий. Однако он может зависеть от средних энтропий, определяемых в общем случае взвешенным f-средним

$$H = \sum_i^m h(p_i) f(p_i). \tag{5.7.2}$$

Используя условие коммутативности в (5.7.1), найдем соотношения

$$a\left[h_1 + h_2\psi(h_1)\right] = a\left[h_2 + h_1\psi(h_2)\right], \tag{5.7.3}$$

из которых получим ограничения на функцию

$$\frac{1-\psi(h_1)}{h_1} = \frac{1-\psi(h_2)}{h_2} = \varepsilon. \tag{5.7.4}$$

Параметр ε не зависит от случайных энтропий. Подстановка (5.7.4) в (5.7.3) дает закон композиции [21]

$$h = h_1 \circ h_2 = a\left(h_1 + h_2 - \varepsilon h_1 h_2\right). \qquad (5.7.5)$$

Поскольку справедливо условие мультипликативности $f\left(p_{ij}\right) = f\left(p_i\right) f\left(p_j\right)$ для независимых объектов, то после усреднения (5.7.5) получим

$$H = a\left(H_1 \sum_j^n f\left(p_j\right) + H_2 \sum_i^m f\left(p_i\right) - \varepsilon H_1 H_2 \right), \qquad (5.7.6)$$

где средние энтропии

$$H_1 = \sum_i^m h\left(p_i\right) f\left(p_i\right), \quad H_2 = \sum_j^n h\left(p_j\right) f\left(p_j\right), \qquad (5.7.7)$$

$$H = \sum_i^m \sum_j^n h\left(p_{ij}\right) f\left(p_{ij}\right). \qquad (5.7.8)$$

Рассмотрим основные свойства определения (5.7.5)

1. Ассоциативность. Согласно аксиоме 2 выполняется свойство ассоциативности

$$\left(h_1 \circ h_2\right) \circ h_3 = h_1 \circ \left(h_2 \circ h_3\right) =$$

$$= \alpha\left[\alpha\left(h_1 + h_2\right) + h_3 - \varepsilon\alpha\left(h_1 h_2 + h_2 h_3 + h_3 h_1\right) + \varepsilon^2 h_1 h_2 h_3\right] =$$

$$= \alpha\left[h_1 + \alpha\left(h_2 + h_3\right) - \varepsilon\alpha\left(h_1 h_2 + h_2 h_3 + h_3 h_1\right) + \varepsilon^2 h_1 h_2 h_3\right], \qquad (5.7.9)$$

из которого вытекает равенство $a = 1$.

В итоге имеем закон композиции

$$h = h_1 \circ h_2 = h_1 + h_2 - \varepsilon h_1 h_2 \qquad (5.7.10)$$

и свойство ассоциативности

$$\left(h_1 \circ h_2\right) \circ h_3 = h_1 \circ \left(h_2 \circ h_3\right) =$$

$$= h_1 + h_2 + h_3 - \varepsilon\left(h_1 h_2 + h_2 h_3 + h_3 h_1\right) + \varepsilon^2 h_1 h_2 h_3. \qquad (5.7.11)$$

2. Единичный элемент. Согласно аксиоме 3 единичный элемент группы находим из формулы

$$h_1 \circ E = h + E - \varepsilon h E = h, \qquad (5.7.12)$$

которая дает значение $E = 0$. Таким образом, единичный элемент соответствует нулевому значению случайной энтропии $h=0$.

3. Обратный элемент. Согласно аксиоме 4 из формулы

$$h \circ h^{-1} = h + h^{-1} - \varepsilon h h^{-1} = 0 \tag{5.7.13}$$

вытекает выражение для обратного элемента

$$h^{-1} = -\frac{h}{1-\varepsilon h}. \tag{5.7.14}$$

4. Сопряженный элемент. Подставим в определение сопряженного элемента

$$h' = c^{-1} \circ h \circ c \tag{5.7.15}$$

значение $c^{-1} = -c(1-\varepsilon c)^{-1}$ и получим равенство

$$h' = h, \tag{5.7.16}$$

которое означает сопряженность элементов группы случайных энтропий.

5. Равенства. Используя закон композиции и его свойства, находим следующие равенства

$$\frac{1}{(-h)} - \frac{1}{h^{-1}} = -\varepsilon, \quad (1-\varepsilon h)\left(1-\varepsilon h^{-1}\right) = 1, \tag{5.7.17}$$

$$(1-\varepsilon h) = (1-\varepsilon h_1)(1-\varepsilon h_2), \tag{5.7.18}$$

$$1-\varepsilon(h_1 \circ h_2 \circ h_3) = (1-\varepsilon h_1)(1-\varepsilon h_2)(1-\varepsilon h_3), \tag{5.7.19}$$

$$(1-\varepsilon h_1)(1-\varepsilon h_2)\left(1-\varepsilon h^{-1}\right) = 1, \tag{5.7.20}$$

$$\begin{gathered}\left(h_1 + h_2 + h^{-1}\right) - \varepsilon\left(h_1 h_2 + h_2 h^{-1} + h^{-1} h_1\right) + \\ + \varepsilon^2 h_1 h_2 h^{-1} = 0,\end{gathered} \tag{5.7.21}$$

$$\text{в) } h_1 = h \circ h_2^{-1} = \frac{h-h_2}{1-\varepsilon h_2}, \quad h_1 = h_1^{-1} \circ h = \frac{h-h_1}{1-\varepsilon h_1}, \tag{5.7.22}$$

$$(h_1 \circ h_2)^{-1} = h_2^{-1} \circ h_1^{-1}, \quad (h_1 \circ h_2 \circ h_3)^{-1} = h_3^{-1} \circ h_2^{-1} \circ h_1^{-1}, \tag{5.7.23}$$

$$\frac{1}{h_1^{-1} \circ h_2} + \frac{1}{h_2^{-1} \circ h_1} = \varepsilon, \tag{5.7.24}$$

$$\frac{1}{h_1 \circ h_2} + \frac{1}{h_2^{-1} \circ h_1^{-1}} = \frac{1}{h_1^{-1} \circ h_2} + \frac{1}{h_2^{-1} \circ h_1}, \qquad (5.7.25)$$

$$h^{(2)} = h \circ h = 2h - \varepsilon h^2, \quad h = \frac{h^{(2)}}{1 + \sqrt{1 + \varepsilon\left(h^{(2)}\right)}}, \qquad (5.7.26)$$

$$\sqrt{1 + \varepsilon\left(h^{(2)}\right)} = 1 - \varepsilon h, \qquad (5.7.27)$$

$$h^{(2n)} = h_1^{(n)} \circ h_2^{(n)} = h_1^{(n)} + h_2^{(n)} - \varepsilon h_1^{(n)} h_2^{(n)}, \quad \left(h = h_1 \circ h_2\right). \qquad (5.7.28)$$

Абелева группа случайных информаций различия определяется аналогично приведенной группе. Закон композиции случайных информаций различия имеет вид

$$I = I_1 \circ I_2 = I_1 + I_2 + \varepsilon I_1 I_2 \qquad (5.7.29)$$

и задается заменой $h \to -I$ в законе композиций случайных энтропий. Определение (5.7.29) с $I_1 = I\left(p_{1i} : u_{1i}\right)$ и $I_2 = I\left(p_{2i} : u_{2i}\right)$ удовлетворяет свойству ассоциативности. Единичному элементу группы $E = 0$ соответствует нулевое значение случайной информации различия $I = 0$. Обратный элемент определяется выражением $I^{-1} = -I\left(1 + \varepsilon I\right)^{-1}$. Элементы группы являются самосопряженными, то есть $I' = I$.

По аналогии с равенствами для случайных энтропий находим следующие равенства для случайных информаций различия

$$\frac{1}{(-I)} - \frac{1}{I^{-1}} = \varepsilon, \quad \left(1 + \varepsilon I\right)\left(1 + \varepsilon I^{-1}\right) = 1, \qquad (5.7.30)$$

$$\left(1 + \varepsilon I\right) = \left(1 + \varepsilon I_1\right)\left(1 + \varepsilon I_2\right), \qquad (5.7.31)$$

$$1 + \varepsilon\left(I_1 \circ I_2 \circ I_3\right) = \left(1 + \varepsilon I_1\right)\left(1 - \varepsilon I_2\right)\left(1 - \varepsilon I_3\right), \qquad (5.7.32)$$

$$\left(1 + \varepsilon I_1\right)\left(1 + \varepsilon I_2\right)\left(1 + \varepsilon I^{-1}\right) = 1, \qquad (5.7.33)$$

$$\left(I_1 + I_2 + I^{-1}\right) + \varepsilon\left(I_1 I_2 + I_2 I^{-1} + I^{-1} I_1\right) + \varepsilon^2 I_1 I_2 I^{-1} = 0, \qquad (5.7.34)$$

$$I_1 = I \circ I_2^{-1} = \frac{I - I_2}{1 + \varepsilon I_2}, \quad I_1 = I_1^{-1} \circ I = \frac{I - I_1}{1 + \varepsilon I_1}, \tag{5.7.35}$$

$$\left(I_1 \circ I_2\right)^{-1} = I_2^{-1} \circ I_1^{-1}, \quad \left(I_1 \circ I_2 \circ I_3\right)^{-1} = I_3^{-1} \circ I_2^{-1} \circ I_1^{-1}, \tag{5.7.36}$$

$$\frac{1}{I_1^{-1} \circ I_2} + \frac{1}{I_2^{-1} \circ I_1} = -\varepsilon, \quad \frac{1}{I_1 \circ I_2} + \frac{1}{I_2^{-1} \circ I_1^{-1}} = \frac{1}{I_1^{-1} \circ I_2} + \frac{1}{I_2^{-1} \circ I_1}, \tag{5.7.37}$$

$$I^{(2)} = I \circ I = 2I + \varepsilon I^2, \quad I = \frac{I^{(2)}}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon I^{(2)}}}, \tag{5.7.38}$$

$$\sqrt{1 - \varepsilon I^{(2)}} = 1 + \varepsilon I, \tag{5.7.39}$$

$$I^{(2n)} = I_1^{(n)} \circ I_2^{(n)} = I_1^{(n)} + I_2^{(n)} + \varepsilon I_1^{(n)} I_2^{(n)}, \quad \left(I = I_1 \circ I_2\right). \tag{5.7.40}$$

Усредняя (5.7.10), получим закон композиции средних энтропий

$$H = H_1 \circ H_2 = H_1 \sum_j^n f\left(p_j\right) + H_2 \sum_i^m f\left(p_i\right) - \varepsilon H_1 H_2 \tag{5.7.41}$$

и свойство ассоциативности

$$H = \left(H_1 \circ H_2\right) \circ H_3 = H_1 \circ \left(H_2 \circ H_3\right) =$$

$$= H_1 \sum_j^n f\left(p_j\right) \sum_k^l f\left(p_k\right) + H_2 \sum_i^m f\left(p_i\right) \sum_k^l f\left(p_k\right) + H_3 \sum_i^m f\left(p_i\right) \sum_j^n f\left(p_j\right) -$$

$$-\varepsilon \left[H_1 H_2 \sum_k^l f\left(p_k\right) + H_2 H_3 \sum_i^m f\left(p_i\right) + H_3 H_1 \sum_j^n f\left(p_j\right) + \varepsilon^2 H_1 H_2 H_3 \right]. \tag{5.7.42}$$

Здесь имеем $f\left(p_{ijk}\right) = f\left(p_i\right) f\left(p_j\right) f\left(p_k\right)$ и энтропию

$$H_3 = \sum_k^l h\left(p_k\right) f\left(p_k\right). \tag{5.7.43}$$

Определим функцию в общем виде:

$$f\left(p_i\right)=\frac{\left[N_{q-1}(p)\right]^a p_i^b}{\sum\limits_i^m p_i}, \tag{5.7.44}$$

которая удовлетворяет свойству мультипликативности. Тогда закон композиции (5.7.41) примет следующий вид

$$H=H_1\circ H_2=$$

$$=\frac{H_1\left[N_{q-1}\left(p_2\right)\right]^a\sum\limits_j^n p_j^b}{\sum\limits_j^n p_j}+\frac{H_2\left[N_{q-1}\left(p_1\right)\right]^a\sum\limits_i^m p_i^b}{\sum\limits_i^m p_i}-\varepsilon H_1H_2 \tag{5.7.45}$$

Рассмотрим типы случайных энтропий.

Тип а). Используя известный закон (5.2.5) с $\omega=0$

$$H=H_1\circ H_2=H_1+H_2+\varepsilon H_1H_2 \tag{5.7.46}$$

приравняем его к определению (5.7.45),записанному в виде

$$H=H_1\circ H_2=H_1\left\{\frac{\left[N_{q-1}\left(p_2\right)\right]^a\sum\limits_j^n p_j^b}{\sum\limits_j^n p_j}-\varepsilon H_2\right\}+$$

$$+H_2\left\{\frac{\left[N_{q-1}\left(p_1\right)\right]^a\sum\limits_i^m p_i^b}{\sum\limits_i^m p_i}-\varepsilon H_1\right\}+\varepsilon H_1H_2. \tag{5.7.47}$$

В итоге получим полунорму и энтропию

$$N_{q-1}(p)=\left[\frac{\left(1+\varepsilon H\right)\sum\limits_i^m p_i}{\sum\limits_i^m p_i^b}\right]^{\frac{1}{a}},\quad H=\frac{1}{\varepsilon}\left\{\frac{\left[N_{q-1}(p)\right]^a\sum\limits_i^m p_i^b}{\sum\limits_i^m p_i}-1\right\}, \tag{5.7.48}$$

имеющие одинаковую форму для всех объектов.

Примем значения $a=0,\ b=q$ и получим функцию

$f(p_i) = p_i^q \Big/ \left(\sum_i^m p_i \right)$. Из выражения энтропии (5.7.48), записанного в виде усреднения

$$H_q(p) = \frac{\sum_i^m h(p_i)\, p_i^q}{\sum_i^m p_i} = \frac{1}{\varepsilon}\left(1 - \frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}\right), \qquad (5.7.49)$$

вытекает значение микроскопической энтропии

$$h_q(p_i) = \frac{1}{\varepsilon}\left(1 - p_i^{1-q}\right) \qquad (5.7.50)$$

статистической модели Хаврда–Чарват–Дароши. При $\varepsilon = 1 - q$ и $\varepsilon = 2^{1-q} - 1$ имеем из (5.7.49) физическую безразмерную и нормированную энтропию, соответственно.

Далее примем значения $a = 1 - q$, $b = q$ и получим функцию $f(p_i) = \sum_i^m p_i^q / \left(\sum_i^m p_i^q \right)$. Закон композиции энтропий (5.7.45) запишется так

$$H = H_1 \circ H_2 = H_1 + H_2 - \varepsilon H_1 H_2 \qquad (5.7.51)$$

и равняется определению (5.5.41).

Из выражения энтропии

$$H_q(p) = \frac{\sum_i^m h_q(p_i)\, p_i^q}{\sum_i^m p_i^q} = \frac{1}{\varepsilon}\left[1 - \left(\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}\right)^{-1}\right] \qquad (5.7.52)$$

имеем значение случайной энтропии, совпадающее с (5.7.49). В данной статистической модели Ландсберга–Вергала получим из (5.7.52) при $\varepsilon = 1 - q$ и $\varepsilon = 1 - 2^{q-1}$ физическую безразмерную и нормированную энтропию.

Полученные результаты показывают, что **Тип а)** определяется случайной энтропией (5.7.50). Законы композиций (5.7.46) и (5.7.51) для энтропий из **Типа 1А** и **Типа 1В** являются взвешенными ненормированным и нормированным средними, соответственно. Значения параметров a и b, отличные от указанных, приводят к энтропии $H_q(p) = f\left[N_{q-1}(p)\right]$, которая не является результатом усреднения какой-либо случайной энтропии.

Аналогичные результаты имеем для закона композиции случайных информаций различия (5.7.29). Случайная информация различия определяется в виде

$$I_q\left(p_i : u_i\right) = \frac{1}{\varepsilon}\left(1 - p_i^{1-q} u_i^{q-1}\right). \tag{5.7.53}$$

Усреднение ее с $f(p_i, u_i) = p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \left(\sum_i^m p_i\right)$ или $f(p_i, u_i) = = p_i^q u_i^{1-q} \Big/ \left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right)$ дает информации различия

$$I_q\left(p : u\right) = -\frac{1}{\varepsilon}\left(1 - \frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}\right), \tag{5.7.54}$$

$$I_q\left(p : u\right) = -\frac{1}{\varepsilon}\left[1 - \left(\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}\right)^{-1}\right] \tag{5.7.55}$$

Типа 1A и **Типа 1B**, соответственно. Параметр ε определяется нормировкой функционалов.

Тип b). Пусть $\varepsilon = 0$ и закон композиций энтропии и информаций различия имеют вид

$$H = H_1 \circ H_2 = H_1 + H_2, \tag{5.7.56}$$

$$I = I_1 \circ I_2 = I_1 + I_2. \tag{5.7.57}$$

Тогда при $\varepsilon = 2^{1-q} - 1$ или $\varepsilon = 1 - q$ из (5.7.50) и (5.7.53) имеем микроскопические меры

$$h\left(p_i\right) = -\log_2 p_i, \tag{5.7.58}$$

$$h\left(p_i : u_i\right) = -\log_2 \frac{p_i}{u_i} \tag{5.7.59}$$

и соответствующие средние значения

$$H(p)=\sum_{i}^{m}h\left(p_i\right)p_i=-\sum_{i}^{m}\left(\log_2 p_i\right)p_i\,, \tag{5.7.60}$$

$$I(p:u)=\sum_{i}^{m}I\left(p_i:u_i\right)p_i=\sum_{i}^{m}\left(\log_2\frac{p_i}{u_i}\right)p_i \tag{5.7.61}$$

статистической модели Шеннона–Винера.

Таким образом, имеем два принципиально различных типа групп случайных энтропий и информаций различия. Причем функционалы (5.7.58) и (5.7.59) являются изоморфизмами случайных неаддитивных мер на группу аддитивных мер модели Шеннона–Винера

$$h\left(p_i\right)=-\log_2 p_i=\frac{1}{q-1}\log_2\left[1+\varepsilon h_q\left(p_i\right)\right], \tag{5.7.62}$$

$$I\left(p_i:u_i\right)=\log_2\frac{p_i}{u_i}=\frac{1}{1-q}\log_2\left[1-\varepsilon I_q\left(p_i:u_i\right)\right]. \tag{5.7.63}$$

5.8. Квантовые полунормы и меры информации

Рассмотрим вероятностно-статистическое описание совокупности $N=\left\{N_1,\ldots,N_m\right\}$ случайных объектов, которые имеют множество квантовых состояний $G=\left\{G_1,\ldots,G_m\right\}$, где m – число состояний.

Выпишем квантовые физические безразмерные энтропии статистической модели Шеннона–Винера, приведенные в главе 2, для различных статистик:

а) Максвелла–Больцмана

$$H_N=-\sum_{i}^{m}\left(\ln N_i\right)N_i+\sum_{i}^{m}\left(\ln G_i\right)N_i\,, \tag{5.8.1}$$

б) Ферми–Дирака

$$H_N=-\sum_{i}^{m}\left(\ln N_i\right)N_i-\sum_{i}^{m}\left[\ln\left(G_i-N_i\right)\right]\left(G_i-N_i\right)+\sum_{i}^{m}\left(\ln G_i\right)G_i\,, \tag{5.8.2}$$

в) Бозе–Эйнштейна

$$H_N = -\sum_i^m \left(\ln N_i\right) N_i - \sum_i^m \left(\ln G_i\right) G_i + \sum_i^m \left[\ln\left(G_i + N_i\right)\right]\left(G_i + N_i\right), \quad (5.8.3)$$

г) квазиклассическая статистика

$$H_N = -\sum_i^m \left(\ln G_i\right) G_i + \sum_i^m \left(\ln N_i\right) G_i \,. \quad (5.8.4)$$

Общее значение случайной величины $T = \left\{T_1, \ldots, T_m\right\}$ по совокупности объектов равняется

$$\mathbf{E}_N\left(T\right) = \sum_i^m T_i N_i \quad \left(N = \sum_i^m N_i\right). \quad (5.8.5)$$

При $N_i << G_i$ из (5.8.2) и (5.8.3) имеем выражение (5.8.1) для статистики Максвелла–Больцмана, а при $N_i >> G_i$ из (5.8.3) вытекает выражение (5.8.4) для квазиклассической статистики. Поэтому в общем случае остановимся на статистиках Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна.

Квантовые энтропии запишем так

$$H_N = H_N\left(N\right) + H_N\left(G - N\right) - H_N\left(G\right) > 0, \quad (5.8.6)$$

$$H_N = H_N\left(N\right) + H_N\left(G\right) - H_N\left(G + N\right) > 0, \quad (5.8.7)$$

где меры

$$H_N\left(N\right) = -\sum_i^m \left(\ln N_i\right) N_i \,,\; H_N\left(G\right) = -\sum_i^m \left(\ln G_i\right) G_i \,, \quad (5.8.8)$$

$$H_N\left(G \pm N\right) = -\sum_i^m \left[\ln\left(G_i \pm N_i\right)\right]\left(G_i \pm N_i\right) \quad (5.8.9)$$

в геометрической интерпретации удовлетворяют неравенству треугольника (или неравенству Минковского).

Для других статистических моделей теории информации неравенство треугольника дает квантовые энтропии

$$H_{q,N} = H_q\left(N\right) + H_q\left(G - N\right) - H_q\left(G\right) > 0, \quad (5.8.10)$$

$$H_{q,N} = H_N\left(N\right) + H_q\left(G\right) - H_q\left(G + N\right) > 0, \quad (5.8.11)$$

зависящие от параметра q. Ясно, что приведенное неравенство справедливо и для двухпараметрических квантовых энтропий.

Квантовые энтропии (5.8.10) и (5.8.11) соответствующих статистик зависят от квантовых полунорм распределений

$$N_{q,N}(N)=\left(\sum_i^m N_i^{q+1}\right)^{1/q},\ N_{q,N}(G)=\left(\sum_i^m G_i^{q+1}\right)^{1/q},$$

$$N_{q,N}(G\pm N)=\left[\sum_i^m\left(G_i\pm N_i\right)^{q+1}\right]^{1/q}. \qquad (5.8.12)$$

Рассмотрим, в частности, квантовые обобщения физических безразмерных энтропий для статистической модели Хаврда–Чарват–Дароши, соответствующей **Типу IA** классификации мер и играющей важную роль в современной статистической теории неаддитивных систем. Согласно (5.8.10) и (5.8.11), получим функционалы

$$H_{q,N}=\frac{1}{q-1}\left(\sum_i^m N_i-\sum_i^m N_i^q\right)+$$
$$+\frac{1}{q-1}\left[\sum_i^m\left(G_i-N_i\right)-\sum_i^m\left(G_i-N_i\right)^q\right]-\frac{1}{q-1}\left(\sum_i^m G_i-\sum_i^m G_i^q\right)=$$
$$=\frac{1}{q-1}\left[-\sum_i^m N_i^q-\sum_i^m\left(G_i-N_i\right)^q+\sum_i^m G_i^q\right], \qquad (5.8.13)$$

$$H_{q,N}=\frac{1}{q-1}\left(\sum_i^m N_i-\sum_i^m N_i^q\right)+$$
$$+\frac{1}{q-1}\left(\sum_i^m G_i-\sum_i^m G_i^q\right)-\frac{1}{q-1}\left[\sum_i^m\left(G_i+N_i\right)-\sum_i^m\left(G_i+N_i\right)^q\right]=$$
$$=\frac{1}{q-1}\left[-\sum_i^m N_i^q-\sum_i^m G_i^q+\sum_i^m\left(G_i+N_i\right)^q\right]. \qquad (5.8.14)$$

Из (5.8.13) и (5.8.1) вытекает при $N_i \ll G_i$ энтропия

$$H_{q,N}=\frac{1}{q-1}\left(\sum_i^m N_i-\sum_i^m N_i^q\right) \qquad (5.8.15)$$

для статистики Максвелла–Больцмана, а при $N_i \gg G_i$ из (5.8.14) следует энтропия для квазиклассической статистики:

$$H_{q,N}=\frac{1}{q-1}\left(\sum_i^m G_i-\sum_i^m G_i^q\right)-\frac{1}{q-1}\left(\sum_i^m G_i^q-\sum_i^m N_i^{1-q}G_i^q\right)=$$
$$=\frac{1}{q-1}\left[\sum_i^m G_i-2\sum_i^m G_i^q+\sum_i^m N_i^{1-q}G_i^q\right] \ . \qquad (5.8.16)$$

В качестве примера найдем экстремумы квантовой энтропии для рассматриваемых статистик при заданном общем значении случайной величины T и квантовой полунормы

$$\mathbf{E}_{q,N}\left(T\right)=\sum_i^m T_i N_i^q, \ N_{q,N}=\sum_i^m N_i^q \ . \qquad (5.8.17)$$

Варьируем функционал

$$\delta L=\delta H_{q,N}+\left(q-1\right)\tau\sum_i^m T_i\delta N_i^q+\left(q-1\right)\alpha\sum_i^m \delta N_i^q \qquad (5.8.18)$$

и, согласно (5.8.13) и (5.8.14), имеем условия

$$\delta L=\frac{q}{q-1}\left\{\sum_i^m\left[-N_i^{q-1}+\left(G_i-N_i\right)^{q-1}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(q-1\right)\tau N_i^{q-1}T_i+\left(q-1\right)\alpha N_i^{q-1}\right]\delta N_i\right\}=0 \ , \qquad (5.8.19)$$

$$\delta L=\frac{q}{q-1}\left\{\sum_i^m\left[-N_i^{q-1}+\left(G_i+N_i\right)^{q-1}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(q-1\right)\tau N_i^{q-1}T_i+\left(q-1\right)\alpha N_i^{q-1}\right]\delta N_i\right\}=0 \ , \qquad (5.8.20)$$

из которых вытекают равенства

$$\left(\frac{N_i}{G_i-N_i}\right)^{q-1}\left[1+\left(1-q\right)\left(\tau T_i+\alpha\right)\right]=1, \qquad (5.8.21)$$

$$\left(\frac{N_i}{G_i+N_i}\right)^{q-1}\left[1+\left(1-q\right)\left(\tau T_i+\alpha\right)\right]=1. \qquad (5.8.22)$$

В итоге получим распределения N_i по состояниям G_i:

$$N_i = \frac{G_i}{\left[1+(1-q)(\tau T_i + \alpha)\right]^{1/(q-1)} + 1}, \tag{5.8.23}$$

$$N_i = \frac{G_i}{\left[1+(1-q)(\tau T_i + \alpha)\right]^{1/(q-1)} - 1}, \tag{5.8.24}$$

и числа объектов

$$N = \sum_i^m \frac{G_i}{\left[1+(1-q)(\tau T_i + \alpha)\right]^{1/(q-1)} + 1}, \tag{5.8.25}$$

$$N = \sum_i^m \frac{G_i}{\left[1+(1-q)(\tau T_i + \alpha)\right]^{1/(q-1)} - 1}. \tag{5.8.26}$$

Учитывая (5.8.21) – (5.8.24), а также общие значения случайной величины

$$\mathbf{E}_{q,N}(T) = \sum_i^m \frac{T_i G_i}{\left[1+(1-q)(\tau T_i + \alpha)\right]^{1/(q-1)} + 1}, \tag{5.8.27}$$

$$\mathbf{E}_{q,N}(T) = \sum_i^m \frac{T_i G_i}{\left[1+(1-q)(\tau T_i + \alpha)\right]^{1/(q-1)} - 1}, \tag{5.8.28}$$

находим экстремальные значения квантовых энтропий

$$\begin{aligned} H_{q,N} = \frac{1}{q-1}\Big\{ -\sum_i^m N_i^q - \sum_i^m N_i^{q-1}(G_i - N_i) \times \\ \times \left[1+(1-q)(\tau T_i + \alpha)\right] + \sum_i^m G_i^q \Big\} = \frac{1}{q-1}\Big\{ \sum_i^m (1-q) N_i^q (\tau T_i + \alpha) - \\ - \sum_i^m N_i^{q-1} G_i \left[1+(1-q)(\tau T_i + \alpha)\right] + \sum_i^m G_i^q \Big\} = \\ = -\tau \mathbf{E}_{q,N}(T) - \alpha \sum_i^m N_i^q + \frac{1}{q-1} \sum_i^m \left[G_i^{q-1} - (G_i - N_i)^{q-1} \right] G_i \end{aligned}, \tag{5.8.29}$$

$$H_{q,N} = \frac{1}{q-1}\left\{-\sum_i^m N_i^q + \sum_i^m N_i^{q-1}\left(G_i + N_i\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left[1+(1-q)\left(\tau T_i + \alpha\right)\right] - \sum_i^m G_i^q\right\} = \frac{1}{q-1}\left\{\sum_i^m (1-q) N_i^q \left(\tau T_i + \alpha\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_i^m N_i^{q-1} G_i \left[1+(1-q)\left(\tau T_i + \alpha\right)\right] - \sum_i^m G_i^q\right\} =$$

$$= -\tau \mathbf{E}_{q,N}(T) - \alpha \sum_i^m N_i^q + \frac{1}{q-1}\sum_i^m \left[\left(G_i + N_i\right)^{q-1} - G_i^{q-1}\right] G_i \quad . \qquad (5.8.30)$$

Определим потенциалы

$$\Omega^{\text{Ф}-\text{Д}} = \frac{1}{\tau(q-1)}\sum_i^m \left[G_i^{q-1} - \left(G_i - N_i\right)^{q-1}\right] G_i =$$

$$= \frac{1}{\tau(q-1)}\sum_i^m \left\{1 - \left(\frac{N_i}{G_i}\right)^{q-1}\left[1+(1-q)\left(\tau T_i + \alpha\right)\right]\right\} G_i, \qquad (5.8.31)$$

$$\Omega^{\text{Б}-\text{Э}} = \frac{1}{\tau(q-1)}\sum_i^m \left[\left(G_i + N_i\right)^{q-1} - G_i^{q-1}\right] G_i =$$

$$= \frac{1}{\tau(q-1)}\sum_i^m \left\{\left(\frac{N_i}{G_i}\right)^{q-1}\left[1+(1-q)\left(\tau T_i + \alpha\right)\right] - 1\right\} G_i, \qquad (5.8.32)$$

которые при $q \to 1$ совпадают с выражениями (2.4.15) и (2.5.13). Тогда из (5.8.29) и (5.8.30) вытекает выражение для энтропии

$$H_{q,N} = -\tau \mathbf{E}_{q,N}(T) - \alpha \sum_i^m N_i^q + \tau\Omega, \qquad (5.8.33)$$

которое определено для статистик Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна в главе 2 с соответствующими значениями потенциала (5.8.31) и (5.8.32).

Производные потенциала равняются

$$\frac{\partial(\tau\Omega)}{\partial\tau} = \mathbf{E}_{q,N}(T), \; \frac{\partial(\tau\Omega)}{\partial\alpha} = \sum_i^m N_i^q \;, \qquad (5.8.34)$$

что приводит к дифференциальному соотношению:

$$dH_{q,N} = -\tau d\mathbf{E}_{q,N}\left(T\right) - \alpha d\left(\sum_i^m N_i^q\right). \qquad (5.8.35)$$

Распределения (5.8.23) и (5.8.24) имеют фундаментальное значение при построении квантовой статистической термодинамики равновесных неаддитивных систем для статистической модели Хаврда–Чарват–Дароши.

В случае модели Реньи, соответствующей **Типу IV** общей классификации мер информации, из (5.8.10) и (5.8.11) получим квантовые меры

$$H_{q,N} = \frac{1}{1-q}\ln\left(\frac{\sum_i^m N_i^q \sum_i^m \left(G_i - N_i\right)^q}{\sum_i^m G_i^q}\right), \qquad (5.8.36)$$

$$H_{q,N} = \frac{1}{1-q}\ln\left(\frac{\sum_i^m N_i^q \sum_i^m G_i^q}{\sum_i^m \left(G_i + N_i\right)^q}\right) \qquad (5.8.37)$$

для статистик Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна, соответственно. Аналогично находятся квантовые меры для других **типов**.

В заключение выпишем физические безразмерные квантовые информации различия статистической модели Хаврда–Чарват–Дароши для квантовых статистик Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна

$$\begin{aligned}
\left(I_{12}\right)_{q,N_1} &= \frac{1}{1-q}\left(\sum_i^m N_{1i} - \sum_i^m N_{1i}^q\right) + \frac{1}{1-q}\left(\sum_i^m N_{1i}^q - \sum_i^m N_{1i}^q N_{2i}^{1-q}\right) + \\
&+ \frac{1}{1-q}\left[\sum_i^m \left(G_i - N_{1i}\right) - \sum_i^m \left(G_i - N_{1i}\right)^q\right] + \\
&+ \frac{1}{1-q}\left[\sum_i^m \left(G_i - N_{1i}\right)^q - \sum_i^m \left(G_i - N_{1i}\right)^q \left(G_i - N_{2i}\right)^{1-q}\right] = \\
&= \frac{1}{1-q}\left(\sum_i^m N_{1i} - \sum_i^m N_{1i}^q N_{2i}^{1-q}\right) + \\
&+ \frac{1}{1-q}\left[\sum_i^m \left(G_i - N_{1i}\right) - \sum_i^m \left(G_i - N_{1i}\right)^q \left(G_i - N_{2i}\right)^{1-q}\right], \qquad (5.8.38)
\end{aligned}$$

$$\left(I_{12}\right)_{q,N_1}=\frac{1}{1-q}\left(\sum_i^m N_{1i}-\sum_i^m N_{1i}^q\right)+\frac{1}{1-q}\left(\sum_i^m N_{1i}^q-\sum_i^m N_{1i}^q N_{2i}^{1-q}\right)-$$

$$-\frac{1}{1-q}\left[\sum_i^m\left(G_i+N_{1i}\right)-\sum_i^m\left(G_i+N_{1i}\right)^q\right]-$$

$$-\frac{1}{1-q}\left[\sum_i^m\left(G_i+N_{1i}\right)^q-\sum_i^m\left(G_i+N_{1i}\right)^q\left(G_i+N_{2i}\right)^{1-q}\right]=$$

$$=\frac{1}{1-q}\left(\sum_i^m N_{1i}-\sum_i^m N_{1i}^q N_{2i}^{1-q}\right)-$$

$$-\frac{1}{1-q}\left[\sum_i^m\left(G_i+N_{1i}\right)-\sum_i^m\left(G_i+N_{1i}\right)^q\left(G_i+N_{2i}\right)^{1-q}\right], \qquad (5.8.39)$$

которые при $q\to 1$ совпадают с функционалами (2.7.13) и (2.7.16) статистической модели Шеннона–Винера. Квантовые меры неточности задаются соотношениями при аддитивности или неаддитивности энтропии и информации различия, как это было определено формулами (4.4.7) и (4.4.76) в статистической модели Шеннона–Винера.

5.9. Аксиомы и меры Шарма–Миттала

Б. Шарма и Д. Миттал в работах [110,111] развили статистическую модель с нормированными двухпараметрическими мерами информаций **Типа 1А**. Были сформулированы следующие аксиомы для энтропии [110].

1. $H_{q,r}\left(p_1,p_2,...,p_m\right)$ непрерывна и симметрична относительно $p_1,p_2,...,p_m$ в области $0\le p_i\le 1$.

2. $H_{q,r}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=1$.

3. $H_{q,r}\left(p_1,...,p_{i-1},0,p_{i+1},...,p_m\right)=H_{q,r}\left(p_1,...,p_{i-1},p_{i+1},...,p_m\right)$ для всех $i=1,...m$.

4. $H_{q,r}\left(p_{11}p_{21},...,p_{11}p_{2n},p_{12}p_{21},...,p_{12}p_{2n},...,p_{1m}p_{21},...,p_{1m}p_{2n},...\right)=$

$$=H_{q,r}\left(p_{11},...,p_{1m}\right)+H_{q,r}\left(p_{21},...,p_{2n}\right)+$$

$$+\lambda H_{q,r}\left(p_{11},...,p_{1m}\right)H_{q,r}\left(p_{21},...,p_{2n}\right),\quad \lambda\ne 0. \qquad (5.9.1)$$

5.Справедливо равенство:

$$H_{q,r}\left(p_1,p_2,\ldots,p_m\right)=\varphi^{-1}\left\{\frac{\sum\limits_i^m p_i\varphi\left[f\left(p_i\right)\right]}{\sum\limits_i^m p_i}\right\}, \qquad (5.9.2)$$

где φ есть непрерывная строго монотонная функция на $\mathbf{R}$, а φ^{-1} – функция обратная φ. Функция $f\left(p_i\right)$ удовлетворяет аксиомам

1. $f\left(p_i\right)$ непрерывна от p_i, $\quad 0\le p_i\le 1$.
2. $f\left(p_ip_j\right)=f\left(p_i\right)+f\left(p_j\right)+\lambda f\left(p_i\right)f\left(p_j\right), \quad \lambda\ne 0$.
3. $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$.

Согласно этим аксиомам, получим энтропию Шарма–Миттала

$$H_{q,r}\left(p\right)=\frac{1}{1-2^{1-r}}\left\{1-\left(\frac{\sum\limits_i^m p_i^q}{\sum\limits_i^m p_i}\right)^{\frac{r-1}{q-1}}\right\}. \qquad (5.9.3)$$

Используя аналогичные аксиомы для информаций различия [111], имеем функционал

$$I_{q,r}\left(p:u\right)=\frac{1}{1-2^{r-1}}\left[1-\left(\frac{\sum\limits_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum\limits_i^m p_i}\right)^{\frac{r-1}{q-1}}\right]. \qquad (5.9.4)$$

Рассмотрим основные свойства Шарма–Миттала.

1. Положительность и выпуклость. Энтропия есть вещественный, неотрицательный функционал

$$H_{q,r}\left(p\right)>0, \qquad (5.9.5)$$

который является вогнутым при $q>0$ с $r>q$ и $r\ge 2-1/q$. Энтропия монотонно убывает с возрастанием q при фиксированном значении r.

2. Неаддитивность для независимых объектов. Пусть состояние случайного объекта описывается совместным мультипликативным распределением вероятностей $p_{ij} = p_i p_j$, p_i и p_j относятся к разным независимым объектам. Общая энтропия дается выражением

$$H_{q,r}(p_{12}) = \frac{1}{1-2^{1-r}}\left\{1-\left(\sum_i^m \sum_j^n p_i^q p_j^q\right)^{\frac{r-1}{q-1}}\right\}, \tag{5.9.6}$$

где условие нормировки

$$\sum_i^m \sum_j^n p_{ij} = \sum_i^m p_i = \sum_j^n p_j = 1. \tag{5.9.7}$$

Тогда из (5.9.6) получим свойство неаддитивности для энтропий независимых объектов

$$H_{q,r}(p_{12}) = H_{q,r}(p_1) + H_{q,r}(p_2) + \left(2^{1-r}-1\right) H_{q,r}(p_1) H_{q,r}(p_2), \tag{5.9.8}$$

где

$$H_{q,r}(p_1) = \frac{1-\left(\sum_i^m p_i^q\right)^{\frac{r-1}{q-1}}}{1-2^{1-r}}, \quad H_{q,r}(p_2) = \frac{1-\left(\sum_j^n p_j^q\right)^{\frac{r-1}{q-1}}}{1-2^{1-r}}. \tag{5.9.9}$$

В случае $k \geq 2$ независимых объектов справедливо равенство

$$H_{q,r}(p_{12\ldots k}) = \sum_{l=1}^{k} H_{q,r}(p_l) + \left(2^{1-r}-1\right)\sum_{l=1}^{k-1} H_{q,r}(p_l) H_{q,r}(p_k) +$$

$$+\left(2^{1-r}-1\right)\sum_{l=1}^{k-2} H_{q,r}(p_l) H_{q,r}(p_{k-1}) H_{q,r}(p_k) + \ldots +$$

$$+\left(2^{1-r}-1\right) H_{q,r}(p_1) H_{q,r}(p_2) \ldots H_{q,r}(p_k). \tag{5.9.10}$$

Неаддитивность для предельных значений определяется формулой

$$H_{1,r}(p_{12}) = H_{1,r}(p_1) + H_{1,r}(p_2) + \left(2^{1-r}-1\right) H_{1,r}(p_1) H_{1,r}(p_2). \tag{5.9.11}$$

3. Равенство для зависимых объектов. В случае зависимых объектов имеем соотношения для распределений:

$$p_{ij} = p_i p_{j|i} = p_j p_{i|j}, \quad p_i = \sum_j^n p_{ij}, \quad p_j = \sum_i^m p_{ij} \qquad (5.9.12)$$

и соответствующие функционалы

$$H_{\theta,\rho}(\pi_1 | \pi_2) = \frac{1 - \left(\sum_\tau^\mu \sum_\varphi^\nu \pi_\varphi \pi_{\tau|\varphi}^\theta \right)^{\frac{\rho-1}{\theta-1}}}{1 - 2^{1-\rho}}, \qquad (5.9.13)$$

. (5.9.14)

Предельные выражения равняются

, (5.9.15)

, (5.9.16)

, (5.9.17)

, (5.9.18)

, (5.9.19)

, (5.9.20)

где и есть средние значения условной энтропии в статистической модели Шеннона–Винера.

Справедливо следующее равенство для энтропий зависимых объектов

. (5.9.21)

4. Энтропия равновероятного состояния. Экстремальное значение энтропии Шарма–Миттала при условии сохранения нормировки распределения дает равновероятное распределение

— . (5.9.22)

Значение энтропии при (5.9.22) имеет вид

——— . (5.9.23)

Если $r = 1$, то из (5.9.23) следует известное выражение

(5.9.24)

статистической модели Шеннона–Винера.

5. Неравенства. Энтропия Шарма–Миттала также удовлетворяет основным неравенствам

, (5.9.25)

$$H_{1,r}(P_{12}) \le H_{1,r}(P_1) + H_{1,r}(P_2) +$$

$$+ (2^{1-r} - 1) H_{1,r}(P_1) H_{1,r}(P_2), \qquad (5.9.26)$$

, (5.9.27)

, (5.9.28)

, (5.9.29)

, (5.9.30)

, (5.9.31)

, (5.9.32)

, (5.9.33)

. (5.9.34)

6. Нормированность и размерность. Из определения энтропии (5.9.3) имеем свойство нормированности

(5.9.35)

при и . Единица измерения информации есть один бит.

Энтропия Шарма–Миттала есть отношение физической безразмерной энтропии

(5.9.36)

на ее значение при равновероятном состоянии с . Таким образом, имеют место равенства

. (5.9.37)

7. *f*-энтропия. Энтропия Шарма–Миттала представляет собой *f*-энтропию

, (5.9.38)

где функция

(5.9.39)

зависит от полунормы распределения.

Здесь не выписаны другие свойства энтропии, основные свойства информации различия и меры неточности, а также различные функционалы, использующие рассматриваемые меры. Эти вопросы подробно изложены в различных работах (см. например [109, 117, 118, 120, 121]).

5.10. Тригонометрические меры информаций

Известны также тригонометрические меры информации, рассматриваемые в обобщенной теории информации. В одном методе используется закон композиции [107]

. (5.10.1)

Здесь энтропия и функция

, (5.10.2)

выражаются через функции и , заданные в пределах [0,1]. Определяется энтропия в виде

(5.10.3)

и функция

. (5.10.4)

В другом методе рассматриваются энтропии [107]

, (5.10.5)

, (5.10.6)

где функции h и f заданы в пределах [0,1] и находятся из уравнений

, (5.10.7)

(5.10.8)

при граничных условиях и .

В итоге получаются решения

, (5.10.9)

(5.10.10)

и, соответственно, имеем энтропии

, (5.10.11)

, (5.10.12)

, (5.10.13)

. (5.10.14)

В пределах вытекают энтропия Шеннона–Винера

(5.10.15)

и информация различия Кульбака–Лейблера

(5.10.16)

Недостатком рассматриваемых методов является то, что закон композиции энтропий не имеет в основе групповых операций, так в нем должны быть только и . Таких выражений не имеется.

В заключение выпишем, дополнительно к приведенным функциям еще две тригонометрические меры

,

, (5.10.17)

,

, (5.10.18)

зависящие от параметра и рассмотренные в работах [53] и [112, 113], соответственно.