Глава 4

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ХАВРДА–ЧАРВАТ–ДАРОШИ

Приводятся фундаментальные понятия и методы теории информации, основанной на статистической модели Хаврда–Чарват–Дароши. Вводятся и обсуждаются нелогарифмические меры энтропии и информации различия для неаддитивных случайных объектов с взвешенными ненормированными средними.

Результаты работ [72, 78, 101] и монография [53] заложили основы статистической модели обобщенной теории информации с неаддитивными мерами, зависящими от некоторого параметра q. Именно этой модели посвящено большое количество работ, среди которых отметим монографии [22, 55, 71, 85, 86, 93, 125] и обзоры [120, 121].

4.1. Взвешенные ненормированные средние и полунормы

Рассмотрим вероятностно-статистическое описание случайного объекта с усреднением, отличным от рассмотренных в предыдущих главах.

Приведем основные определения.

Определение 1. Взвешенное ненормированное среднее Хаврда–Чарват каждой случайной величины $T=\{T_1,\dots,T_m\}$ в состоянии с распределением $p=\{p_1,\dots,p_m\}$ равно

$$\mathbf{E}_q(T)=\sum_i^m T_i p_i^q \Big/ \sum_i^m p_i, \quad 0<\sum_i^m p_i \le 1, \tag{4.1.1}$$

где m – число возможных состояний объекта, $q\in\mathbf{R}$ и изменяется в допустимых пределах.

Если веса p_i удовлетворяют условию вероятностной нормировки

$$\sum_i^m p_i = 1, \tag{4.1.2}$$

то выражение (4.1.1) примет следующий вид

$$\mathbf{E}_q(T) = \sum_i^m T_i p_i^q . \tag{4.1.3}$$

При $p_i = 1$ из (4.1.1) имеем обычное среднее арифметическое

$$\mathbf{E}_q(T) = \frac{1}{m} \sum_i^m T_i . \tag{4.1.4}$$

Из определения 1 вытекают основные свойства.

1. Однородность. При замене p на ap $(a > 0)$ взвешенное среднее является однородным функционалом степени $q-1$ относительно p, то есть выполняется свойство однородности.

2. Ненормированность. Для неслучайной постоянной величины имеем равенство

$$\mathbf{E}_q(\mathrm{C}) = \mathrm{C} \frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i} . \tag{4.1.5}$$

При $\mathrm{C} = 1$ следует $\mathbf{E}_q(1) \neq 1$, что означает ненормированность взвешенного среднего на единицу.

3. Неаддитивность. Пусть закон сложения случайных величин $T_{12} = T_1 + T_2$ выражается в виде суммы для двух независимых объектов. Тогда, согласно условию мультипликативности $p_{ij} = p_i p_j$, получим равенство

$$\mathbf{E}_q(T_{12}) = \mathbf{E}_q(T_1) \frac{\sum_j^n p_j^q}{\sum_j^n p_j} + \mathbf{E}_q(T_2) \frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i} . \tag{4.1.6}$$

Далее положим, что случайная величина является неаддитивной согласно следующему закону

$$T_{12} = T_1 + T_2 - \varepsilon T_1 T_2, \tag{4.1.7}$$

где ε – постоянный множитель. После усреднения имеем другое равенство

$$\mathbf{E}_q\left(T_{12}\right) = \mathbf{E}_q\left(T_1\right)\frac{\sum_j^n p_j^q}{\sum_j^n p_j} + \mathbf{E}_q\left(T_2\right)\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i} - \varepsilon\mathbf{E}_q\left(T_1\right)\mathbf{E}_q\left(T_2\right). \tag{4.1.8}$$

Таким образом, для двух случаев вытекает неаддитивность средних величин вне зависимости от закона сложения случайных величин.

4. Мультипликативность. Среднее значение произведения независимых случайных величин $T_1 T_2$ для одного или двух объектов равно произведению средних значений

$$\mathbf{E}_q\left(T_1 T_2\right) = \mathbf{E}_q\left(T_1\right)\mathbf{E}_q\left(T_2\right). \tag{4.1.9}$$

5. Взвешенное ненормированное *f*-среднее. Функциональным обобщением выражения (4.1.1) является взвешенное ненормированное f -среднее

$$\mathbf{E}_f\left(T\right) = \frac{\sum_i^m T_i f\left(p_i\right)}{\sum_i^m p_i}, \tag{4.1.10}$$

где $f\left(p\right)$ имеет свойство мультипликативности $f\left(p_{ij}\right) = f\left(p_i\right) f\left(p_j\right)$.

Если $f\left(p_i\right) = p_i^q$, то выражение (4.1.10) равняется взвешенному ненормированному среднему (4.1.1). При $f\left(p_i\right) = p_i^{s_i}$ имеем

$$\mathbf{E}\left(T\right) = \frac{\sum_i^m T_i p_i^{s_i}}{\sum_i^m p_i}. \tag{4.1.11}$$

Определение 2. Отклонение случайной величины от значения

$\mathbf{E}_q(T)\, p_i^{1-q}$ есть флуктуация

$$\Delta_q T_i = T_i - \mathbf{E}_q(T)\, p_i^{1-q}, \quad \sum_i^m \left(\Delta_q T_i\right) p_i^q = 0. \qquad (4.1.12)$$

Определение 3. Начальные и центральные моменты n-го порядка случайной величины T равны

$$\alpha_{n,q} = \sum_i^m T_i^n p_i^q, \qquad (4.1.13)$$

$$\mu_{n,q} = \sum_i^m \left[T_i - \mathbf{E}_q(T)\, p_i^{1-q}\right]^n p_i^q. \qquad (4.1.14)$$

При $n = 2$ получим дисперсию

$$\mu_{2,q} = \mathbf{D}_q(T) = \sum_i^m \left[T_i - \mathbf{E}_q(T)\, p_i^{1-q}\right]^2 p_i^q =$$

$$= \sum_i^m T_i^2 p_i^q - 2\mathbf{E}_q(T)\mathbf{E}(T) + \left[\mathbf{E}_q(T)\right]^2 \sum_i^m p_i^{2-q}. \qquad (4.1.15)$$

Статистический коэффициент корреляции величин двух объектов дается выражением

$$r_q(T_1, T_2) = \frac{\mathbf{E}_q\left(\Delta_q T_1 \Delta_q T_2\right)}{\sigma_q(T_1)\sigma_q(T_2)}, \qquad (4.1.16)$$

где квадратичные отклонения

$$\sigma_q(T_1) = \left[\mathbf{D}_q(T_1)\right]^{1/2}, \quad \sigma_q(T_2) = \left[\mathbf{D}_q(T_2)\right]^{1/2}. \qquad (4.1.17)$$

6. Полунорма и среднее значение. Используя величины

$$T_1 = T, \; T_2 = p^{q/q'} = p^{q-1} \qquad (4.1.18)$$

и неравенства Гельдера (3.2.12) при $r = 1$

$$N_1(T_1 T_2) \le N_q(T_1) N_{q'}(T_2) \qquad (4.1.19)$$

получим

$$\mathbf{E}_q(T) \le N_q(T)\left[N_q(p)\right]^{q-1}. \qquad (4.1.20)$$

Минимальное среднее значение случайной величины

$$\mathbf{E}_q(T)_{\min} = \left[N_q(p)\right]^q \tag{4.1.21}$$

определяется при $T = p$ и $b = 1$ в соотношении (3.2.15), что в итоге дает выражение

$$N_q(p) = \left[\mathbf{E}_q(p)\right]^{1/q}. \tag{4.1.22}$$

Определение 4. Каждой случайной величине T и любым числам q и s, $-\infty < q < \infty$, $-\infty < s < \infty$ соответствует взвешенная ненормированная полунорма

$$N_q^s(T) = \left(\frac{\sum_i^m T_i^q p_i^s}{\sum_i^m p_i}\right)^{1/q}. \tag{4.1.23}$$

Если веса p_i удовлетворяют условию вероятностной нормировки (4.1.2), то выражение (4.1.23) примет вид

$$N_q^s(T) = \left(\sum_i^m T_i^q p_i^s\right)^{1/q}. \tag{4.1.24}$$

7. Ненормированная *f*-полунорма. Функциональным обобщением выражения (4.1.23) является взвешенная ненормированная полунорма

$$N_{q,f}(T) = \left(\frac{\sum_i^m T_i^q f(p_i)}{\sum_i^m p_i}\right)^{1/q}. \tag{4.1.25}$$

При $f(p_i) = p_i^s$ выражение (4.1.25) совпадает с (4.1.23). Если $f(p_i) = p_i^{s_i}$, то имеем следующий функционал

$$N_q(T,s) = \left(\frac{\sum_i^m T_i^q p_i^{s_i}}{\sum_i^m p_i}\right)^{1/q}. \tag{4.1.26}$$

В пределе $q \to 1$ из (4.1.25) вытекает функционал и его логарифм

$$N_f(T) = 2^{\frac{\sum_i^m (\log_2 T_i) f(p_i)}{\sum_i^m p_i}} = \left(\prod_i^m T_i^{f(p_i)}\right)^{\frac{1}{\sum_i^m p_i}}, \tag{4.1.27}$$

$$\log_2 N_f(T) = \frac{\sum_i^m (\log_2 T_i) f(p_i)}{\sum_i^m p_i}, \tag{4.1.28}$$

которые обобщают формулы (1.2.1) и (1.2.2).

Определение 5. Среднее взвешенное ненормированное с произвольной функцией $\varphi = \varphi(T)$ есть

$$A_{q,\varphi}(T) = \varphi^{-1}\left[\frac{\sum_i^m \varphi(T_i)\, p_i^q}{\sum_i^m p_i}\right], \tag{4.1.29}$$

где φ – непрерывная строго монотонная функция на $\mathbf{R}$, а φ^{-1} есть функция, обратная $\varphi(T)$. При степенной функции среднее (4.1.29) совпадает с полунормой (4.1.23). При $q = 1$ функционал (4.1.29) равняется взвешенному среднему Колмогорова–Нагумо с произвольной функцией.

Здесь дается идейная сторона обобщений и поэтому не будем приводить свойства функционалов (4.1.23), (4.1.25) и (4.1.29). Это представляет отдельный интерес и требует более детального рассмотрения.

Наконец выпишем взвешенные ненормированные средние в других важных случаях

$$\mathbf{E}_q(T) = \frac{\int_G T p^q dX}{\int_G p dX}, \quad \mathbf{E}_q(T) = \frac{\mathrm{Sp} T \rho^q}{\mathrm{Sp}\rho}. \tag{4.1.30}$$

При условии вероятностной нормировки

$$\int p dX = 1, \quad \mathrm{Sp}\rho = 1 \tag{4.1.31}$$

из (4.1.30) следуют формулы:

$$\mathbf{E}_q(T) = \int T p^q dX\ ,\ \mathbf{E}_q(T) = \mathrm{Sp} T \rho^q\ , \qquad (4.1.32)$$

где $p = p(X)$ – непрерывное распределение и ρ – оператор плотности в гильбертовом пространстве.

4.2. Аксиомы Хаврда–Чарвата и метод Дароши

Я. Хаврда, Ф. Чарват [78] и З. Дароши [72] впервые аксиоматическим подходом доказали единственность новой q-энтропии, совместимой с определением взвешенного ненормированного среднего. В работе [78] для вывода q-энтропии были сформулированы аксиомы:

1. $H_q(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ непрерывна относительно $p_1, p_2, \ldots, p_m$ в области $0 \le p_i \le 1$ и $\sum_i^m p_i = 1,\ q > 0$.

2. $H_q(1) = 0\ ,\ H_q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1$.

3. $H_q(p_1, \ldots, p_{i-1}, 0, p_{i+1}, \ldots, p_m) = H_q(p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_m)$ для всех $i = 1, \ldots, m$.

4. $H_q(p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i1}, p_{i2}, p_{i+1}, \ldots, p_m) =$

$= H_q(p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_m) + \alpha p_i^q H_q\left(\frac{p_{i1}}{p_i}, \frac{p_{i2}}{p_i}\right)$ для всех $p_{i1} + p_{i2} = p_i > 0\ ,\ i = 1, \ldots, m\ ,\ q > 0$.

Из аксиомы 4 вытекает, согласно аксиоме 2, равенство $\alpha = 1$. Также данная аксиома приводит к модифицированной аксиоме 4 (см. главу 1) системы Хинчина

$$H_q(p_{11}, \ldots, p_{1n}; p_{21}, \ldots, p_{2n}; \ldots; p_{m1}, \ldots, p_{mn}) =$$
$$= H_q(p_1, p_2, \ldots, p_m) + \sum_i^m p_i^q H_i\left(\frac{p_{i1}}{p_i}, \ldots, \frac{p_{in}}{p_i}\right), \qquad (4.2.1)$$

где p_{ij} – нормированное совместное распределение статистически зависимых объектов с

$$\sum_i^m \sum_j^n p_{ij} = 1, \quad p_i = \sum_j^n p_{ij}, \quad p_{ij} \ge 0\ . \qquad (4.2.2)$$

Аксиомами Хаврда–Чарвата q-энтропия определяется с точностью до функции $\lambda(q)$, зависящей от параметра q, и имеет следующий вид

$$H_q(p_1, \ldots, p_m) = \lambda^{-1}(q)\left(1 - \sum_i^m p_i^q\right). \tag{4.2.3}$$

Условие нормированности q-энтропии, выраженное аксиомой 2, приводит (4.2.3) к функционалу

$$H_q(p) = \frac{1}{1 - 2^{1-q}}\left(1 - \sum_i^m p_i^q\right). \tag{4.2.4}$$

При $q = 1$ из (4.2.4) следует энтропия Шеннона–Винера

$$H(p) = \lim_{q \to 1} H_q(p) = -\sum_i^m \left(\log_2 p_i\right) p_i. \tag{4.2.5}$$

З. Дароши [72] использовал при выводе q-энтропии (4.2.4) систему аксиом Фадеева (см. главу 1) с модифицированным групповым усреднением

$$H_q(p_1, \ldots, p_m) =$$
$$= \sum_{k=2}^m \left(p_1 + p_2 + \ldots + p_k\right)^q f\left(\frac{p_k}{p_1 + p_2 + \ldots + p_k}\right), \tag{4.2.6}$$

где информационная функция $f(X)$ при $m = 2$ удовлетворяет граничным условиям

$$f(0) = f(1),\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \tag{4.2.7}$$

и функциональному уравнению

$$f(x) + (1-x)^q f\left(\frac{y}{1-x}\right) = f(y) + (1-y)^q f\left(\frac{x}{1-y}\right) \tag{4.2.8}$$

для всех $(x, y) \in D$, где

$$D = \left\{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, x + y = 1\right\}. \tag{4.2.9}$$

Решением уравнения (4.2.8) является информационная функция

$$H_q(1-p, p) = f(p) = \frac{1}{1 - 2^{1-q}}\left[1 - p^q - (1-p)^q\right], \tag{4.2.10}$$

которая при $q=1$ совпадает с энтропией Шеннона–Винера

$$H(1-p,p)=\lim_{q\to 1}H_q(1-p,p)=$$
$$=-p\log_2 p-(1-p)\log_2(1-p). \quad (4.2.11)$$

Детальное исследование функционала (4.2.10), его вывод и свойства приводятся в монографии [53].

Таким образом, q-энтропия (4.2.4) по праву называется энтропией Хаврда–Чарват–Дароши.

4.3. Неравенство Гёльдера. Энтропия Хаврда–Чарват–Дароши

Развиваемая статистическая модель позволяет на основе определения полунормы случайной величины дать статистический вывод энтропии Хаврда–Чарват–Дароши [21]. Итак, запишем неравенство Гельдера

$$N_r(T_1T_2)\le N_q(T_1)N_{q'}(T_2) \quad (4.3.1)$$

для конечных значений полунорм

$$N_q(T_1)=\left(\sum_i^m T_{1i}^q p_i\right)^{1/q},\ N_{q'}(T_2)=\left(\sum_i^m T_{2i}^{q'} p_i\right)^{1/q'},$$
$$N_r(T_1T_2)=\left(\sum_i^m (T_{1i}T_{2i})^r\ p_i\right)^{1/r}. \quad (4.3.2)$$

Здесь T_1 и T_2 – произвольные случайные величины, а сопряженные показатели q и q' удовлетворяют равенству

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=\frac{1}{r},\quad 0<r<q. \quad (4.3.3)$$

Знак равенства соответствует минимальному состоянию в (4.3.1) и достигается при выполнении условия

$$T_{1i}^q=bT_{2i}^{q'}, \quad (4.3.4)$$

где значение коэффициента

$$b=\left(\sum_i^m T_{1i}^q p_i\right)\left(\sum_i^m T_{2i}^{q'} p_i\right)^{-1}. \quad (4.3.5)$$

С учетом (4.3.5) условие (4.3.4) примет следующий вид

$$\frac{T_{1i}^{q}}{\sum_{i}^{m} T_{1i}^{q}} = \frac{T_{2i}^{q'}}{\sum_{i}^{m} T_{2i}^{q'}}. \qquad (4.3.6)$$

Пусть величины T_1 и T_2, соответственно принадлежащие пространствам $\mathbf{L}^q$ и $\mathbf{L}^{q'}$, равняются

$$T_{1i} = p_i, \quad T_{2i} = \left[1+\lambda(q/r)h_{q/r}(p_i)\right]^{-1}. \qquad (4.3.7)$$

Тогда, используя (4.3.4), получим

$$p_i^q = b\left[1+\lambda(q/r)h_{q/r}(p_i)\right]^{-q'}. \qquad (4.3.8)$$

Из (4.3.8) следует соотношение

$$p_i^{1-\frac{q}{r}} = b^{-\frac{1}{q'}}\left[1+\lambda(q/r)h_{q/r}(p_i)\right]. \qquad (4.3.9)$$

Рассмотрим случай с $b=1$ и положим, что $h_{q/r}(p_i)$ есть случайная энтропия. Тогда из (4.3.9) вытекает

$$h_{q/r}(p_i) = -\lambda^{-1}(q/r)\left(1-p_i^{1-q/r}\right). \qquad (4.3.10)$$

Среднее значение величины (4.3.10) запишется так

$$H_{q/r}(p) = \mathbf{E}_{q/r}\left[h_{q/r}(p)\right] = \sum_{i}^{m} h_{q/r}(p_i)\, p_i^{q/r} =$$

$$= \lambda^{-1}(q/r)\left(1-\sum_{i}^{m} p_i^{q/r}\right). \qquad (4.3.11)$$

Учитывая условие нормированности энтропии на единицу при $m=2$ и из (4.3.11), получим [21]

$$H_{q/r}(p) = \frac{1}{1-2^{1-q/r}}\left(1-\sum_{i}^{m} p_i^{q/r}\right). \qquad (4.3.12)$$

При $r=1$ функционал (4.3.12) совпадает с энтропией Хаврда–Чарват–Дароши

$$H_q(p) = \frac{1}{1-2^{1-q}}\left(1-\sum_{i}^{m} p_i^{q}\right). \qquad (4.3.13)$$

Рассмотрим основные свойства энтропии Хаврда–Чарват–Дароши.

1. Положительность и выпуклость. Энтропия есть вещественный, неотрицательный и выпуклый функционал с максимумом (минимумом) при $q > 0$ $(q < 0)$

$$H_q(p) > 0, \tag{4.3.14}$$

$$H_q(a_1 p_1 + a_2 p_2) \le a_1 H_q(p_1) + a_2 H_q(p_2), \tag{4.3.15}$$

где $a_1 + a_2 = 1$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. Неравенство (4.3.15) есть неравенство Иенсена в теории выпуклых функций [47]. При $q = 0$ из (4.3.13) вытекает равенство $H_0(p) = m - 1$.

На рис.4.1 представлена зависимость энтропии Хаврда–Чарват–Дароши $H_q(p)$ от распределения p при значениях $m = 2$, $p_1 = p$ и $q = -1;\ -1/2;\ 0;\ 1;\ 10$.

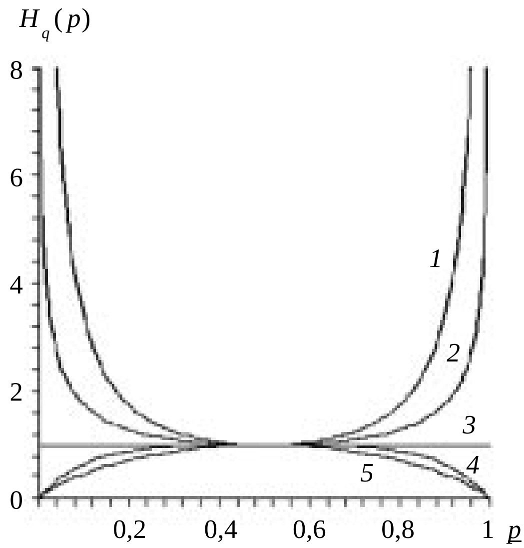


Рис. 4.1. Зависимость энтропии
Хаврда–Чарват–Дароши от распределения:
1 – (q = –1), *2* – (q = 1/2), *3* – (q = 0), *4* – (q = 1), *5* – (q = 10)

2. Неаддитивность для независимых объектов. Пусть состояние случайного объекта описывается совместным мультипликативным распределением $p_{ij} = p_i p_j$, а p_i и p_j относятся к двум независимым объектам. Общая энтропия дается выражением:

$$H_q(p_{12}) = \left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left(1-\sum_i^m\sum_j^n p_{ij}^q\right), \tag{4.3.16}$$

где условие нормировки

$$\sum_i^m\sum_j^n p_{ij} = \sum_i^m p_i = \sum_j^n p_j = 1. \tag{4.3.17}$$

После подстановки распределения p_{ij} в (4.3.16) получим свойство неаддитивности для энтропии двух независимых объектов

$$H_q(p_{12}) = H_q(p_1) + H_q(p_2) + \left(2^{1-q}-1\right)H_q(p_1)H_q(p_2), \tag{4.3.18}$$

где

$$H_q(p_1) = \frac{\left(1-\sum_i^m p_i^q\right)}{\left(1-2^{1-q}\right)}, \quad H_q(p_2) = \frac{\left(1-\sum_j^n p_j^q\right)}{\left(1-2^{1-q}\right)}. \tag{4.3.19}$$

Для случая $k \geq 2$ независимых объектов формула (4.3.18) принимает следующий вид

$$\begin{aligned} H_q(p_{12\ldots k}) &= \sum_{r=1}^k H_q(p_r) + \left(2^{1-q}-1\right)\sum_{r=1}^{k-1} H_q(p_r)H_q(p_k) + \\ &+ \left(2^{1-q}-1\right)^2 \sum_{r=1}^{k-2} H_q(p_r)H_q(p_{k-1})H_q(p_k) + \ldots + \\ &+ \left(2^{1-q}-1\right)^{k-1} H_q(p_1)H_q(p_2)\ldots H_q(p_k) \ . \end{aligned} \tag{4.3.20}$$

Положим, что свойство неаддитивности для случайных энтропий

$$h_q(p_{ij}) = h_q(p_i) + h_q(p_j) - \left(2^{1-q}-1\right)h_q(p_i)h_q(p_j) \tag{4.3.21}$$

справедливо для произвольных независимых случайных объектов. Тогда, сравнивая равенства (4.1.7) и (4.3.21), получим значение множителя $\varepsilon = \left(2^{1-q}-1\right)$.

В итоге неаддитивность для случайных и их средних выражается соотношениями:

$$T_{12} = T_1 + T_2 - \left(2^{1-q} - 1\right) T_1 T_2, \qquad (4.3.22)$$

$$\mathbf{E}_q\left(T_{12}\right) = \mathbf{E}_q\left(T_1\right)\left[1 + \left(2^{1-q} - 1\right) H_q\left(p_2\right)\right] +$$
$$+\mathbf{E}_q\left(T_2\right)\left[1 + \left(2^{1-q} - 1\right) H_q\left(p_1\right)\right] - \left(2^{1-q} - 1\right)\mathbf{E}_q\left(T_1\right)\mathbf{E}_q\left(T_2\right). \qquad (4.3.23)$$

Для энтропий из (4.3.22) и (4.3.23) вытекают выражения (4.3.18) и (4.3.21).

3. Равенство для зависимых объектов. В общем случае зависимых объектов имеем соотношения для распределений

$$p_{ij} = p_i p_{j|i} = p_j p_{i|j}, \quad p_i = \sum_j^n p_{ij}, \quad p_j = \sum_i^m p_{ij} \qquad (4.3.24)$$

и равенство

$$h_q\left(p_{ij}\right) = h_q\left(p_i\right) + h_q\left(p_{j|i}\right) - \left(2^{1-q} - 1\right) h_q\left(p_i\right) h_q\left(p_{j|i}\right), \qquad (4.3.25)$$

где случайные энтропии

$$h_q\left(p_{j|i}\right) = \left(1 - 2^{1-q}\right)\left(1 - p_{j|i}^{1-q}\right), \qquad (4.3.26)$$

$$h_q\left(p_i\right) = \left(1 - 2^{1-q}\right)\left(1 - p_i^{1-q}\right), \; h_q\left(p_j\right) = \left(1 - 2^{1-q}\right)\left(1 - p_j^{1-q}\right). \qquad (4.3.27)$$

После усреднения (4.3.25) получим равенство для энтропий зависимых объектов

$$H_q\left(p_{12}\right) = H_q\left(p_1\right) + H_q\left(p_2 \middle| p_1\right). \qquad (4.3.28)$$

Условная энтропия с распределением $p_{2|1}$ определяется следующим образом

$$H_{qi}\left(p_{2|1}\right) = \sum_j^n h_q\left(p_{j|i}\right) p_{j|i}^q \qquad (4.3.29)$$

и ее среднее значение в (4.3.28) равно

$$H_q\left(p_2 \middle| p_1\right) = \sum_i^m p_i^q H_{qi}\left(p_{2|1}\right). \qquad (4.3.30)$$

Если $p_{2|1} = p_2$, то из (4.3.28) следует свойство неаддитивности (4.3.18). При реализации состояния с распределением p_2 получим энтропии:

$$H_q\left(p_{12}\right)=H_q\left(p_2\right)+H_q\left(p_1\middle|p_2\right), \qquad (4.3.31)$$

$$H_{qj}\left(p_{2|1}\right)=\sum_j^n h_q\left(p_{i|j}\right)p_{i|j}^q, \qquad (4.3.32)$$

$$H_q\left(p_1\middle|p_2\right)=\sum_j^n p_j^q H_{qj}\left(p_{2|1}\right). \qquad (4.3.33)$$

Приравнивая выражения (4.3.28) и (4.3.31), окончательно имеем равенство

$$H_q\left(p_1\right)+H_q\left(p_2\middle|p_1\right)=H_q\left(p_2\right)+H_q\left(p_1\middle|p_2\right), \qquad (4.3.34)$$

которое по форме совпадает с равенством (1.5.23) статистической модели Шеннона–Винера.

4. Флуктуация. Запишем, согласно (4.1.8), флуктуацию случайной энтропии

$$\Delta_q\left[h_q\left(p_i\right)\right]=h_q\left(p_i\right)-H_q\left(p\right)p_i^{1-q}. \qquad (4.3.35)$$

Выразим значение p_i^{1-q} через случайную энтропию $h_q\left(p_i\right)$ и получим равенство

$$\left[1-\left(2^{1-q}-1\right)h_q\left(p_i\right)\right]\ \left[1+\left(2^{1-q}-1\right)H_q\left(p\right)\right]=$$
$$=\left\{\ 1-\left(2^{1-q}-1\right)\Delta_q\left[h_q\left(p_i\right)\right]\right\}, \qquad (4.3.36)$$

в котором взаимосвязаны случайная и средняя энтропии с флуктуацией случайной энтропии. Из (4.3.36) вытекает следующее соотношение для среднего значения

$$\left[1+\left(2^{1-q}-1\right)H_q\left(p\right)\right]^{1/(1-q)}=$$
$$=\sum_i^m\left\{\ 1-\left(2^{1-q}-1\right)\Delta_q\left[h_q\left(p_i\right)\right]\right\}^{1/(1-q)}. \qquad (4.3.37)$$

При $q=1$ из (4.3.37) имеем формулу

$$H\left(p\right)=\log_2\sum_i^m 2^{-\Delta h\left(p_i\right)}, \qquad (4.3.38)$$

которая совпадает с известным выражением (1.5.39) для энтропии Шеннона–Винера.

Для произвольной случайной величины T и ее флуктуации

$$\Delta_q T_i = T_i - \mathbf{E}_q(T)\, p_i^{1-q} \tag{4.3.39}$$

справедливы следующие соотношения

$$\mathbf{E}_q(T) - \mathbf{E}(T) = \left(1 - 2^{1-q}\right)^{-1} \mathbf{E}_q\left[T h_q(p)\right], \tag{4.3.40}$$

$$\left\{ 1 - \left(2^{1-q} - 1\right)\Delta_q T_i \right\} = \left[\frac{1 + \left(2^{1-q} - 1\right)\mathbf{E}_q(T)}{1 + \left(2^{1-q} - 1\right) H_q(p)} \right] \times$$
$$\left\{ 1 - \left(2^{1-q} - 1\right)\Delta_q\left[h_q(p_i)\right] \right\} + \left(2^{1-q} - 1\right)\left[h_q(p_i) - T_i\right]. \tag{4.3.41}$$

5. Энтропия равновероятного состояния. Находим экстремум энтропии Хаврда–Чарват–Дароши при условии сохранения нормировки распределения p. В результате имеем равновероятное распределение

$$p_i = \frac{1}{m} \tag{4.3.42}$$

и экстремальное значение энтропии

$$H_q(p) = \frac{1 - m^{1-q}}{1 - 2^{1-q}}, \tag{4.3.43}$$

зависящее от параметра q. При $q = 1$ из (4.3.43) следует известное выражение

$$H(p) = \lim_{q \to 1} H_q(p) = \log_2 m \tag{4.3.44}$$

статистической модели Шеннона–Винера.

6. Неравенства. Энтропия удовлетворяет следующим неравенствам

$$H_q(p_{12}) \le H_q(p_1) + H_q(p_2), \tag{4.3.45}$$

$$H_q(p_2) \ge H_q\left(p_1 \middle| p_2\right),\ H_q(p_1) \ge H_q\left(p_2 \middle| p_1\right)\ (q \ge 1), \tag{4.3.46}$$

$$H_q(p) \le \frac{1 - m^{1-q}}{1 - 2^{1-q}}\ (q > 0), \tag{4.3.47}$$

$$H_q(p) \geq \frac{1-m^{1-q}}{1-2^{1-q}} \ \ (q<0), \tag{4.3.48}$$

$$H_q\left(p_1 \middle| p_2, p_3\right) \leq H\left(p_1 \middle| p_3\right) \ \ (q>0), \tag{4.3.49}$$

$$H_q\left(p_1, p_2 \middle| p_3\right) \leq H\left(p_1 \middle| p_2\right) \ \ (q>0), \tag{4.3.50}$$

$$H_q\left(p_1 \middle| p_3\right) \leq H_q\left(p_1 \middle| p_2\right) + H_q\left(p_2 \middle| p_1\right) \ \ (q \geq 1), \tag{4.3.51}$$

$$\frac{H_q\left(p_1 \middle| p_3\right)}{H_q\left(p_1, p_3\right)} \leq \frac{H_q\left(p_1 \middle| p_2\right)}{H_q\left(p_1, p_2\right)} + \frac{H_q\left(p_2 \middle| p_3\right)}{H_q\left(p_2, p_3\right)} \ \ (q \geq 1) \tag{4.3.52}$$

и другим, которые рассматриваются в обзорах [120, 121].

7. Мера статистического расстояния. Рассмотрим ненормированное среднее значение случайной энтропии $h_q(p_i)$

$$\mathbf{E}_s\left[h_q(p)\right] = \sum_i^m h_q(p_i) p_i^s = \left(1-2^{1-q}\right)^{-1} \sum_i^m \left(p_i^s - p_i^{1-q+s}\right). \tag{4.3.53}$$

Если в (4.3.53) положить $1-q=r-s$, то получим соответствующую энтропию [112, 113]

$$H_s^r(p) = -2^{1-r} \mathbf{E}_s\left[h_q(p)\right] = \left(2^{1-s} - 2^{1-r}\right)^{-1} \sum_i^m \left(p_i^s - p_i^r\right), \tag{4.3.54}$$

которая является мерой статистического расстояния между p_i^s и p_i^r. Другие средние и меры приводятся в [63].

8. Нормированность и размерность. При $m=2$ и равновероятными значениями распределения $p_1 = p_2 = 1/2$ энтропия удовлетворяет свойству нормированности

$$H_q(p) = \left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^q - \left(\frac{1}{2}\right)^q\right] = 1 \tag{4.3.55}$$

и, следовательно, единицей измерения в статистической модели Хаврда–Чарват–Дароши является один бит. Функционал (4.2.3) с $\lambda = q-1$ является физической безразмерной энтропией

$$H_q^{phys}(p) = \frac{1}{q-1}\left(1 - \sum_i^m p_i^q\right). \tag{4.3.56}$$

Энтропия Хаврда–Чарват–Дароши в виде (4.3.56) впервые была приведена в работе [129] и находит широкое применение в статистической физике как физическая размерная энтропия $H_q(p) = kH_q^{phys}(p)$, которая при $q = 1$ совпадает с энтропией Больцмана–Гиббса

$$H(p) = \lim_{q\to 1} kH_q^{phys}(p) = -k\sum_i^m (\ln p_i)\, p_i \,. \qquad (4.3.57)$$

И. Вайда [123] рассматривал квадратичную энтропию $H_2^{phys}(p) = 1 - \sum_i^m p_i^2$, а также исследовал аксиомы для энтропии Хаврда–Чарват–Дароши [124].

На основе (4.3.56) автор разрабатывал теорию самоорганизации и необратимости неэкстенсивных систем [20–23]. Взаимосвязь рассматриваемых энтропий дается равенствами

$$H_q(p) = \frac{H_q^{phys}(p)}{H_q^{phys}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}, \; H_q^{phys}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{q-1}\left(1-2^{1-q}\right). \qquad (4.3.58)$$

Таким образом, энтропия Хаврда–Чарват–Дароши есть отношение безразмерной физической энтропии (4.3.56) к ее значению при равновероятном состоянии $m = 2$.

9. *f*-энтропия. Энтропия Хаврда–Чарват–Дароши представляет собой f-энтропии

$$H_f(p) = \sum_i^m f(p_i)\, p_i^q \,, \; f = \left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left(1-p_i^{q-1}\right), \qquad (4.3.59)$$

$$H_f(p) = \sum_i^m f(p_i), \; f = \left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left(p_i - p_i^q\right), \qquad (4.3.60)$$

$$H_f(p) = f\left[N_{q-1}(p)\right] \,, \; f = \left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left\{ 1-\left[N_{q-1}(p)\right]^{q-1}\right\}. \qquad (4.3.61)$$

Выражение (4.3.59) совпадает со средним значением случайной энтропии, функция $f(p)$ в (4.3.60) является информационной, а (4.3.61) есть функция полунормы распределения.

4.4. Аксиомы и информация различия Ратье–Каннаппана. Ненормированная информация различия

Дальнейшее развитие статистической модели Хаврда–Чарват–Дароши состояло в нахождении информаций различия. П.Н. Ратье и П. Каннаппан сформулировали следующие аксиомы [101]

1. При $m \geq 2$

$$I_q\left(p_1,\ldots,p_m : u_1,\ldots,u_m\right)=$$
$$=I_q\left(p_1+p_2,p_3,\ldots,p_m : u_1+u_2,u_3,\ldots,u_m\right)+$$
$$+\left(p_1+p_2\right)^q\left(u_1+u_2\right)^q I_q\left(\frac{p_1}{p_1+p_2},\frac{p_2}{p_1+p_2}:\frac{u_1}{u_1+u_2},\frac{u_2}{u_1+u_2}\right), \qquad (4.4.1)$$

где $p_1+p_2>0$, $u_1+u_2>0$.

2. $I_q\left(p_1,\ldots,p_m : u_1,\ldots,u_m\right)$ симметрична относительно $p_1,\ldots,p_m$ и $u_1,\ldots,u_m$.

3. $I_q\left(1,0:\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=1$ – условие нормированности. (4.4.2)

Таким образом, используются аксиомы Фаддеева с модифицированным выражением (4.4.1). Далее применяется метод информационной функции Дароши, которая удовлетворяет граничным условиям

$$f\left(0,0\right)=f\left(1,1\right)=0, \quad f\left(0,\frac{1}{2}\right)=f\left(1,\frac{1}{2}\right)=1 \qquad (4.4.3)$$

и функциональному уравнению

$$f\left(x,y\right)+\left(1-x\right)^q\left(1-y\right)^{1-q} f\left(\frac{z}{1-x},\frac{t}{1-y}\right)=$$
$$=f\left(z,t\right)+\left(1-z\right)^q\left(1-t\right)^{1-q} f\left(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-t}\right) \qquad (4.4.4)$$

для всех $\left(x,y,z,t\right)\in\left[0,1\right)$, где $x+z\leq 1$, $y+t\leq 1$.

В итоге решением уравнения (4.4.4) с условиями (4.4.3) является функция, равная информации различия Ратье–Каннаппана:

$$I_q(1-p, p:1-u, u)=$$
$$=\left(1-2^{q-1}\right)^{-1}\left[1-p^q u^{1-q}-(1-p)^q(1-u)^{1-q}\right]. \qquad (4.4.5)$$

Используя аксиому 2, функционал (4.4.5) представляется в общем виде

$$I_q(p:u)=\left(1-2^{q-1}\right)^{-1}\left[1-\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right]. \qquad (4.4.6)$$

Групповое усреднение по Дароши запишется так

$$I_q(p:u)=\sum_{k=2}^m \left(p_1+p_2+\ldots+p_k\right)^q\left(u_1+u_2+\ldots+u_k\right)^{1-q}\times$$
$$\times f_q\left(\frac{p_k}{p_1+p_2+\ldots+p_k}, \frac{u_k}{u_1+u_2+\ldots+u_k}\right). \qquad (4.4.7)$$

Если использовать систему аксиом Хинчина, то аксиома для совместного распределения статистически зависимых объектов принимает вид [101]

$$I_q\left(p_{11},\ldots,p_{mn}:u_{11},\ldots,u_{mn}\right)=I_q\left(p_1,\ldots,p_m:u_1,\ldots,u_m\right)+$$
$$+\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} I_i\left(\frac{p_{i1}}{p_i},\ldots,\frac{p_{im}}{p_i}:\frac{u_{i1}}{u_i},\ldots,\frac{u_{im}}{u_i}\right), \qquad (4.4.8)$$

где p_{ij} и u_{ij} есть нормированные распределения с

$$\sum_i^m\sum_j^n p_{ij}=\sum_i^m\sum_j^n u_{ij}=1,\; p_i=\sum_j^n p_{ij},\; u_i=\sum_j^n u_{ij}. \qquad (4.4.9)$$

В (4.4.7) используется взвешенное ненормированное среднее

$$\mathbf{E}_q(T)=\frac{\sum_i^m T_i p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i} \qquad (4.4.10)$$

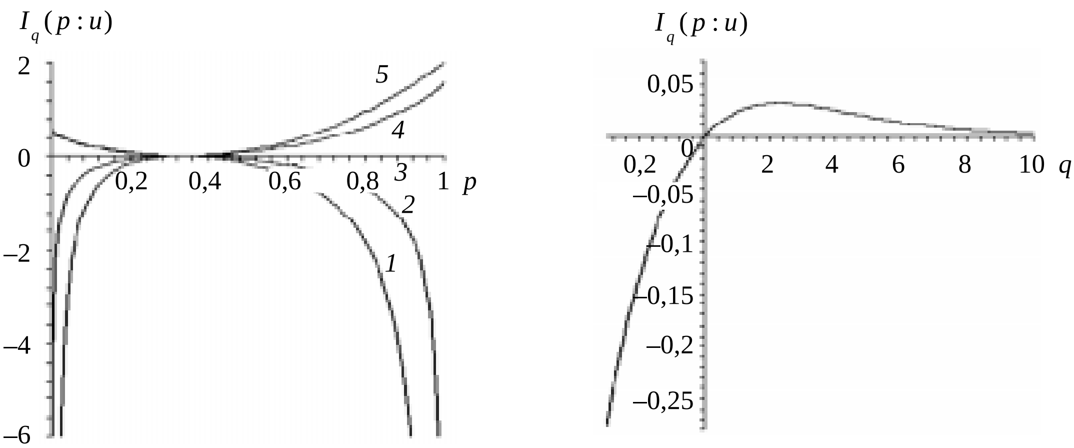
с весом $p_i^q u_i^{1-q}$ и нормировками $\sum_i^m p_i=\sum_i^m u_i=1$.

Такая система аксиом дает функционал [116]:

$$I_q(p:u)=\lambda^{-1}(q)\left(1-\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right), \tag{4.4.11}$$

где $\lambda(q)$ есть нормировочный множитель. При выполнении нормированности (4.4.2) из (4.4.11) вытекает значение $\lambda(q)=\left(1-2^{q-1}\right)$. В пределе $q\to 1$ информация различия Ратье–Каннаппана совпадает с информацией различия Кульбака–Лейблера.

На рис.4.2 приведены зависимости информации различия Ратье–Каннаппана $I_q(p:u)$: а) от распределения при значениях $m=2$, $p_1=p$, $u_1=1/3$ и $q=-1;\ -1/2;\ 0;\ 1;\ 2$ и б) от числа q при $m=2$, $p_1=1/4$ и $u_1=1/3$.



а *б*

Рис. 4.2. Зависимости информации различия Ратье–Каннаппана:
а – от распределения: *1* – (q = –1), *2* – (q = –1/2), *3* – (q = 0),
4 – (q = 1), *5* – (q = 2) и *б* от числа q

Введем меру статистической неточности известной формулой (1.8.58) взаимосвязи с энтропией и информацией различия

$$H_q(p:u)=H_q(p)+I_q(p:u)=$$
$$=\left(1-2^{q-1}\right)^{-1}\left[\sum_i^m p_i^q-\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right]+\left(1-\sum_i^m p_i^q\right). \tag{4.4.12}$$

При $q=1$ из (4.4.12) вытекает мера неточности Керриджа:

$$H\left(p:u\right)=\lim_{q\to 1}H_q\left(p:u\right)=-\sum_i^m\left(\log_2 u_i\right)p_i\,. \qquad (4.4.13)$$

На рис.4.3 приведены зависимости энтропии Хаврда–Чарват–Дароши $H_q\left(p\right)$, информации различия Ратье–Каннаппана $I_q\left(p:u\right)$ и меры неточности $H_q\left(p:u\right)$ в виде (4.4.12) от распределения при $m=2$, $q=2$, $p_1=p$ и а) $u_1=1/3$, б) $u_1=1/2$.

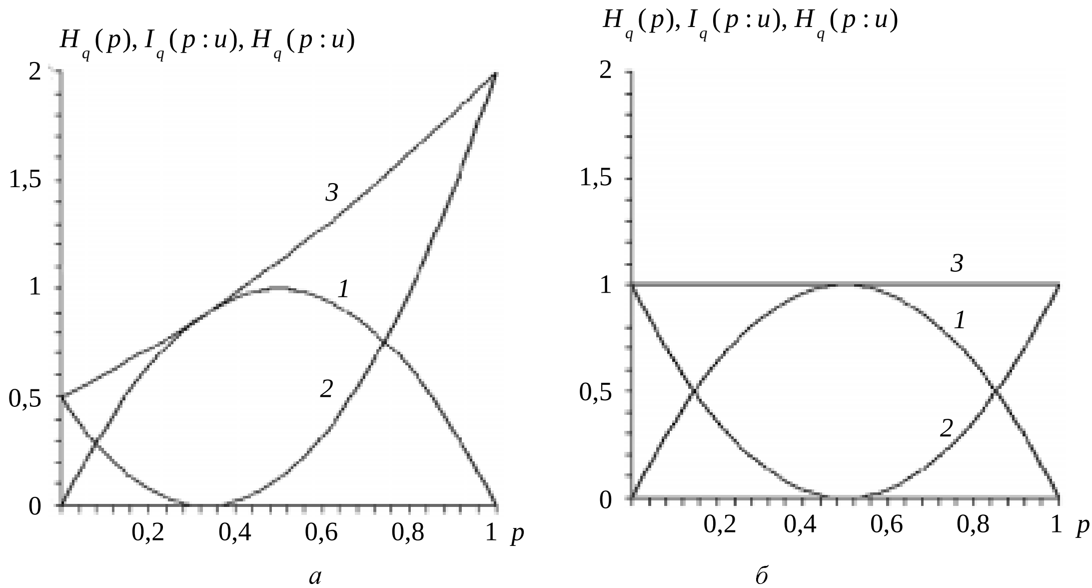


Рис.4.3. Зависимости функционалов модели Хаврда–Чарват–Дароши от распределения: *1* – энтропия $H_q\left(p\right)$, *2* – информация различия Ратье–Каннаппана $I_q\left(p:u\right)$, *3* – мера неточности $H_q\left(p:u\right)$

Выполнение условий нормированности для энтропии Харвда–Чарват–Дароши и информации различия Ратье–Каннаппана дает одинаковый характер зависимостей функционалов от распределения рассматриваемой модели с моделями Шеннона–Винера и Реньи. Однако в этой модели, согласно (4.4.12), мера неточности не является средним значением от случайной энтропии $h_q\left(u_i\right)$.

Рассмотрим другую модель, когда мера неточности записывается в виде взвешенного ненормированного среднего

$$H_q\left(p:u\right)=\sum_i^m h_q\left(u_i\right)p_i^q\,,\ h_q\left(u_i\right)=\left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left(1-u_i^{1-q}\right). \qquad (4.4.14)$$

Тогда для информации различия получим выражение:

$$I_q(p:u) = H_q(p:u) - H_q(u) = \sum_i^m I_q(p_i:u_i)\, p_i^q =$$

$$= \left(2^{1-q}-1\right)^{-1}\left(1-\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right), \tag{4.4.15}$$

отличающееся от функционала (4.4.6). При $q \to 1$ имеем предел, который равняется информации различия Кульбака–Лейблера. Случайная информация различия есть разность между случайными энтропиями

$$I_q(p_i:u_i) = -\left[h_q(p_i) - h_q(u_i)\right], \tag{4.4.16}$$

что согласуется с представлениями статистической модели Шеннона–Винера. В данной модели не выполняется аксиома 3 системы Ратье–Каннаппана. Для информации различия справедливо равенство

$$I_q\left(1,0:\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 2^{q-1}. \tag{4.4.17}$$

Поэтому функционал (4.4.15) назовем ненормированной информацией различия.

Статистический вывод двух информаций различия состоит в использовании неравенства Гельдера для полунорм [23]

$$N_q(T_1T_2) \le N_q(T_1)\, N_{q'}(T_2), \tag{4.4.18}$$

где сопряженные показатели q и q' удовлетворяют равенству

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = \frac{1}{r}. \tag{4.4.19}$$

Величины T_1 и T_2 равняются

$$T_{1i} = p_i,\; T_{2i} = \left\{1 - \lambda_1^{-1}(q/r)\left[\lambda_2(q/r)\, h_{q/r}(u_i) - I_q(p_i:u_i)\right]\right\}^{-1}, \tag{4.4.20}$$

где случайная энтропия

$$h_{q/r}(u_i) = \left(2^{1-q/r}-1\right)^{-1}\left(1-p_i^{1-q/r}\right), \tag{4.4.21}$$

а коэффициенты $\lambda_1(q/r)$, $\lambda_2(q/r)$ определяются ниже.

Минимальное состояние в (4.4.18) достигается при выполнении условия:

$$T_{1i}^{q} = bT_{2i}^{q'}, \tag{4.4.22}$$

где положим $b = 1$. Тогда из (4.4.22) имеем соотношение

$$p_i^{1-q/r} = 1 - \lambda_1^{-1}(q/r)\left[\lambda_2(q/r)h_{q/r}(u_i) - I_q(p_i : u_i)\right], \tag{4.4.23}$$

из которого вытекает значение случайной информации различия

$$I_{q/r}(p_i : u_i) = -\left[\lambda_1(q/r)\left(1 - p_i^{1-q/r}\right) - \lambda_2(q/r)h_{q/r}(u_i)\right]. \tag{4.4.24}$$

Рассмотрим два случая. В первом случае принимаем $\lambda_1(q/r) = \left(1 - 2^{q/r-1}\right)^{-1}$, $\lambda_2(q/r) = 2^{q/r-1}$ и из (4.4.24) имеем

$$I_{q/r}(p_i : u_i) = -2^{1-q}\left[h_q(p_i) - h_q(u_i)\right]. \tag{4.4.25}$$

Усредняя случайную информацию различия (4.4.25), получим функционал

$$I_{q/r}(p : u) = \sum_i^m I_{q/r}(p_i : u_i)\, p_i^{q/r} = \\ = \left(1 - 2^{q-1}\right)^{-1}\left(1 - \sum_i^m p_i^{q/r} u_i^{1-q/r}\right), \tag{4.4.26}$$

который при $r = 1$ равняется информации различия Ратье–Каннаппана.

Во втором случае случайная информация различия равняется разности случайных энтропий. Из (4.4.24) следуют значения коэффициентов $\lambda_1(q/r) = \left(2^{1-q/r} - 1\right)^{-1}$, $\lambda_2(q/r) = 1$. Находим взвешенное ненормированное среднее

$$I_{q/r}(p : u) = \sum_i^m I_{q/r}(p_i : u_i)\, p_i^{q/r} = \\ = \left(2^{1-q/r} - 1\right)^{-1}\left(1 - \sum_i^m p_i^{q/r} u_i^{1-q/r}\right), \tag{4.4.27}$$

которое при $r = 1$ совпадает с информацией различия (4.4.15), используемой в обобщенной теории информации [120, 121].

Рассмотрим основные свойства ненормированной различающей информации (4.4.15).

1. Выпуклость. Информация различия есть вещественный, выпуклый и положительный (отрицательный) функционал с минимумом (максимумом) при $q>0$ $(q<0)$.

Справедливы следующие неравенства

$$I_q(p:u) \geq 0 \quad (q>0), \tag{4.4.28}$$

$$I_q(p:u) \leq 0 \quad (q<0), \tag{4.4.29}$$

$$I_q\left[\left(a_1 p_1 + a_2 p_2\right):u\right] \leq a_1 I_q\left(p_1:u\right) + a_2 I_q\left(p_2:u\right), \tag{4.4.30}$$

где $a_1+a_2=1$ и $a_1>0$, $a_2>0$. При $p=u$ имеем равенство $I_q(p:p)=0$.

На рис.4.4 приведены зависимости энтропии Хаврда–Чарват–Дароши $H_q(p)$ и ненормированной информации различия $I_q(p:u)$ от числа q при значениях $m=2$, $p_1=1/4$, $u_1=1/3$.

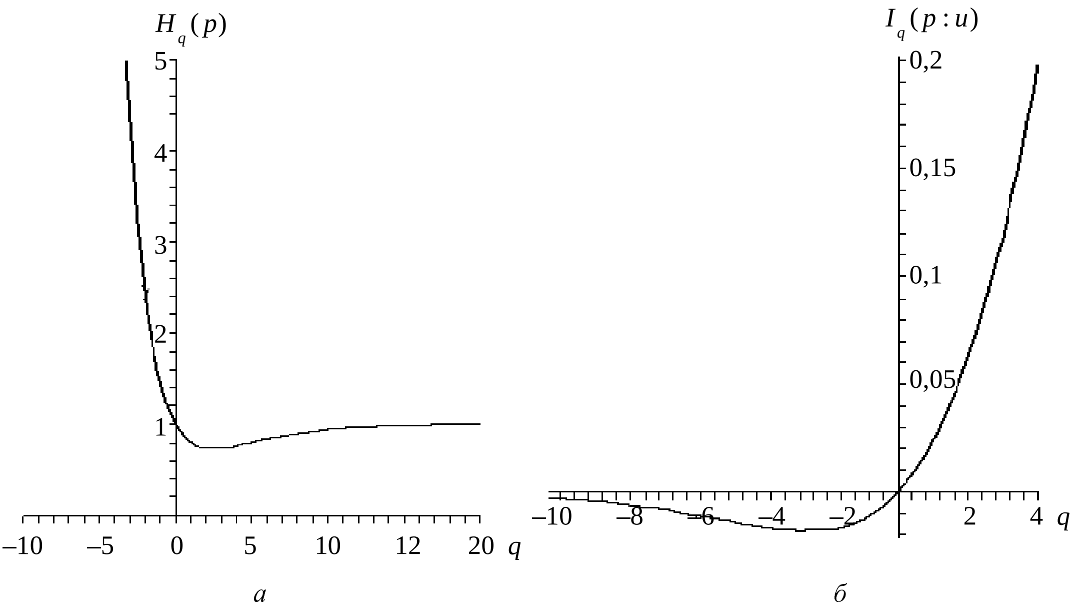


Рис. 4.4. Зависимости функционалов модели Хаврда–Чарват–Дароши от числа q:
$а - H_q(p)$, $б - I_q(p:u)$

На рис.4.5 даются зависимости ненормированной информации различия от распределения при значениях $m=2$, $p_1=1/4$, $u_1=1/3$ и $q=-1;\ -1/2;\ 0;\ 1;\ 2$.

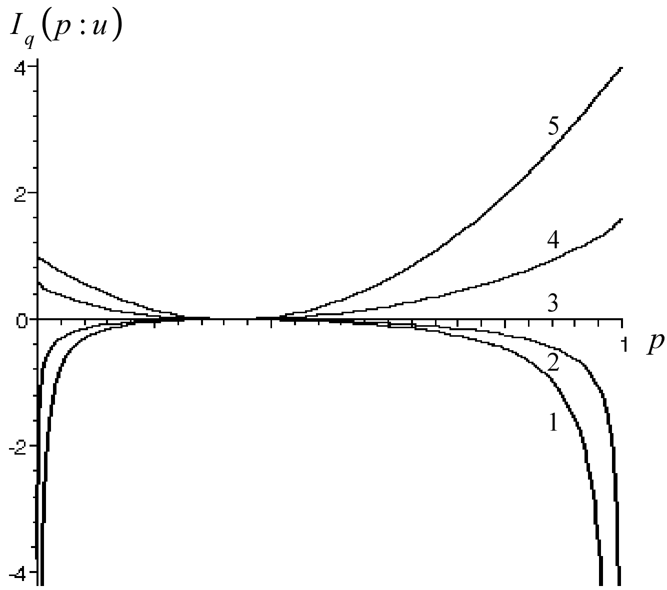


Рис. 4.5. Зависимость ненормированной
информации различия от распределения:
1 – (q = –1), *2* – (q = –1/2), *3* – (q = 0), *4* – (q = 1), *5* – (q = 2)

2. Неаддитивность для независимых объектов. Пусть состояние случайного объекта описывается нормированными совместными распределениями $p_{ij} = p_i p_j$ и $u_{ij} = u_i u_j$ при статистической независимости двух случайных объектов. Информации различия определяются выражениями

$$I_q\left(p_{12}:u_{12}\right)=\left(2^{1-q}-1\right)^{-1}\left(1-\sum_i^m\sum_j^n p_{ij}^q u_{ij}^{1-q}\right), \qquad (4.4.31)$$

$$I_q\left(p_1:u_1\right)=\left(2^{1-q}-1\right)^{-1}\left(1-\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right), \qquad (4.4.32)$$

$$I_q\left(p_2:u_2\right)=\left(2^{1-q}-1\right)^{-1}\left(1-\sum_j^n p_j^q u_j^{1-q}\right), \qquad (4.4.33)$$

для которых имеем свойство неаддитивности

$$I_q\left(p_{12}:u_{12}\right)=I_q\left(p_1:u_1\right)+I_q\left(p_2:u_2\right)+$$
$$+\left(1-2^{1-q}\right)I_q\left(p_1:u_1\right)I_q\left(p_2:u_2\right)\ , \qquad (4.4.34)$$

где параметр q характеризует степень неаддитивности информаций различия. При $q=1$ из (4.4.34) следует аддитивность для информаций различия Кульбака–Лейблера.

В случае $m \geq 2$ имеем равенство

$$I_q\left(p_{12\ldots m}:u_{12\ldots m}\right)=\sum_{i=1}^{m} I_q\left(p_i:u_i\right)+$$
$$+\left(1-2^{1-q}\right)\sum_{i=1}^{m-1} I_q\left(p_i:u_i\right)I_q\left(p_m:u_m\right)+$$
$$+\left(1-2^{1-q}\right)^2\sum_{i=1}^{m-1} I_q\left(p_i:u_i\right)I_q\left(p_{m-1}:u_{m-1}\right)I_q\left(p_m:u_m\right)+$$
$$+\ldots+\left(1-2^{1-q}\right)^{m-1} I_q\left(p_1:u_1\right)I_q\left(p_2:u_2\right)\ldots I_q\left(p_m:u_m\right) \;. \quad (4.4.35)$$

3. Равенство для зависимых объектов. В случае зависимых объектов для распределений имеем соотношения

$$p_{ij}=p_i p_{j|i}\,,\; u_{ij}=u_i u_{j|i}\,, \quad (4.4.36)$$

$$\sum_i^m\sum_j^n p_{ij}=\sum_i^m\sum_j^n u_{ij}=1,\; \sum_i^m p_i=\sum_i^m u_i=1 \quad (4.4.37)$$

и соответствующие случайные энтропии и информации различия

$$h_q\left(p_{ij}\right)=h_q\left(p_i\right)+h_q\left(p_{j|i}\right)-\left(2^{1-q}-1\right)h_q\left(p_i\right)h_q\left(p_{j|i}\right), \quad (4.4.38)$$

$$h_q\left(u_{ij}\right)=h_q\left(u_i\right)+h_q\left(u_{j|i}\right)-\left(2^{1-q}-1\right)h_q\left(u_i\right)h_q\left(u_{j|i}\right), \quad (4.4.39)$$

$$I_q\left(p_{ij}:u_{ij}\right)=-\left[h_q\left(p_{ij}\right)-h_q\left(u_{ij}\right)\right] \;. \quad (4.4.40)$$

Информация различия дается равенством

$$I_q\left(p_{12}:u_{12}\right)=I_q\left(p_1:u_1\right)+I_q\left(p_{2|1}\middle|u_{2|1}\right), \quad (4.4.41)$$

где второе слагаемое

$$I_q\left(p_{2|1}\middle|u_{2|1}\right)=\sum_i^m I_{qi}\left(p_{2|1}:u_{2|1}\right)p_i^q u_i^{1-q} \quad (4.4.42)$$

есть взвешенное ненормированное среднее (4.4.10) для условной информации различия:

$$I_{qi}\left(p_{2|1}:u_{2|1}\right)=\left(2^{1-q}-1\right)^{-1}\left(1-\sum_{j}^{n}p_{j|i}^{q}u_{j|i}^{1-q}\right). \qquad (4.4.43)$$

При $p_{2|1}=p_2$ и $u_{2|1}=u_2$ из (4.4.41) следует свойство неаддитивности (4.4.34).

Соотношение (4.4.41) представляется также в виде

$$I_q\left(p_{12}:u_{12}\right)=I_q\left(p_2:u_2\right)+I_q\left(p_{1|2}\middle|u_{1|2}\right), \qquad (4.4.44)$$

где

$$I_q\left(p_{1|2}\middle|u_{1|2}\right)=\sum_{j}^{n}I_{qj}\left(p_{1|2}:u_{1|2}\right)p_j^q u_j^{1-q}, \qquad (4.4.45)$$

$$I_{qi}\left(p_{1|2}:u_{1|2}\right)=\left(2^{1-q}-1\right)^{-1}\left(1-\sum_{i}^{m}p_{i|j}^{q}u_{i|j}^{1-q}\right). \qquad (4.4.46)$$

В итоге справедливо следующее равенство

$$I_q\left(p_1:u_1\right)-I_q\left(p_2:u_2\right)=I_q\left(p_{1|2}\middle|u_{1|2}\right)-I_q\left(p_{2|1}\middle|u_{2|1}\right). \qquad (4.4.47)$$

Для зависимых объектов с распределениями

$$p_{12}=p_1p_{2|1},\ u_{12}=u_1u_{2|1} \qquad (4.4.48)$$

получим меру информации

$$I_q\left(p_{12}:p_{12}\right)=-H_q\left(p_{12}\right)+$$

$$+\sum_{i}^{m}\sum_{j}^{n}\left[h_q\left(p_i\right)+h_q\left(p_j\right)-\left(2^{1-q}-1\right)h_q\left(p_i\right)h_q\left(p_j\right)\right]p_{ij}^{q}=$$

$$=H_q\left(p_2\right)-\sum_{i}^{m}H_{qi}\left(p_{2|1}\right)p_i^q, \qquad (4.4.49)$$

где

$$H_{qi}\left(p_{2|1}\right)=\left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left(1-\sum_{j}^{n}p_{j|i}^{q}\right). \qquad (4.4.50)$$

Выражение (4.4.49) было определено феноменологическим путем в работах [79, 90] и использовалось в теории передачи сигнала по каналам связи.

4. Флуктуация. Рассмотрим флуктуацию случайной информации различия

$$\Delta_q\left[I_q\left(p_i:u_i\right)\right]=I_q\left(p_i:u_i\right)-I_q\left(p:u\right)p_i^{1-q} \qquad (4.4.51)$$

и после преобразований получим равенство

$$\left[u_i^{1-q}+\left(2^{1-q}-1\right)I_q\left(p_i:u_i\right)\right]\ \left[1-\left(2^{1-q}-1\right)I_q\left(p:u\right)\right]\ =$$
$$=\left\{u_i^{1-q}+\left(2^{1-q}-1\right)\Delta_q\left[I_q\left(p_i:u_i\right)\right]\right\}, \qquad (4.4.52)$$

из которого вытекает искомое соотношение для среднего значения

$$\left[1-\left(2^{1-q}-1\right)I_q\left(p:u\right)\right]^{1/(1-q)}=$$
$$=\sum_i^m\left\{u_i^{1-q}+\left(2^{1-q}-1\right)\Delta_q\left[I_q\left(p_i:u_i\right)\right]\right\}^{1/(1-q)}. \qquad (4.4.53)$$

При $q=1$ из (4.4.53) получим известное выражение информации различия Кульбака–Лейблера

$$I\left(p:u\right)=\log_2\sum_i^m u_i 2^{\Delta I\left(p_i:u_i\right)}. \qquad (4.4.54)$$

Выразим информацию различия через флуктуацию случайной энтропии $\Delta_q\left[h_q\left(p_i\right)\right]$ и энтропию Хаврда–Чарват–Дароши в общем виде. Для чего перепишем случайную информацию различия следующим образом

$$I_q\left(p_i:u_i\right)=-\left[h_q\left(p_i\right)-h_q\left(u_i\right)\right]\ =$$
$$=-\left[h_q\left(p_i\right)-H_q\left(u\right)u_i^{1-q}\right]+\Delta_q\left[h_q\left(u_i\right)\right]\ . \qquad (4.4.55)$$

Усредняя (4.4.55), получим выражение

$$I_q\left(p:u\right)=\frac{-\left[H_q\left(p\right)-H_q\left(u\right)\right]+\sum_i^m\Delta_q\left[h_q\left(u_i\right)\right]p_i^q}{1+\left(2^{1-q}-1\right)H_q\left(u\right)}, \qquad (4.4.56)$$

которое отличается от соответствующей формулы (1.8.49) статистической модели Шеннона–Винера дополнительным множителем $\left[1+\left(2^{1-q}-1\right)H_q\left(u\right)\right]$, зависящим от энтропии Хаврда–Чарват–Дароши для распределения u.

Наконец, находим значение флуктуации случайной информации различия

$$\Delta_q\left[I_q\left(p_i:u_i\right)\right]=-\left\{\Delta_q\left[h_q\left(p_i\right)\right]-\Delta_q\left[h_q\left(u_i\right)\right]\right\}+$$

$$+\left(2^{1-q}-1\right)I_q\left(p:u\right)H_q\left(u\right)-\sum_i^m\Delta_q\left[h_q\left(u_i\right)\right]p_i^q\ , \qquad (4.4.57)$$

где в отличие от значения (1.8.47) имеем дополнительное слагаемое в виде произведения информации различия Ратье–Каннаппана и энтропии Хаврда–Чарват–Дароши.

Информация различия, записанная в общем виде (4.4.56), использовалась автором для физических приложений [23].

5. Информация различия с $u_i=1/m$. Информация различия в состоянии с распределением p относительно равновероятного состояния с $u_i=1/m$ имеет вид

$$I_q\left(p:u\right)=\left(2^{q-1}-1\right)^{-1}\left(1-\sum_i^m p_i^q m^{q-1}\right)=$$

$$=-m^{q-1}\left\{H_q\left(p\right)-\left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left(1-m^{1-q}\right)\right\}\ . \qquad (4.4.58)$$

Согласно неравенствам (4.4.28) и (4.4.29) из (4.4.58) вытекает

$$H_q\left(p\right)<\left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left(1-m^{1-q}\right) \text{ при } q>0,$$

$$H_q\left(p\right)>\left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left(1-m^{1-q}\right) \text{ при } q<0. \qquad (4.4.59)$$

Таким образом, энтропия Хаврда–Чарват–Дароши меньше (больше), чем энтропия равновероятного состояния при $q>0$ $\left(q<0\right)$.

6. Неравенства. Информация различия удовлетворяет неравенствам

$$I_q\left(p_{12}:u_{12}\right)\le I_q\left(p_1:u_1\right)+I_q\left(p_2:u_2\right), \qquad (4.4.60)$$

$$I_q\left(p:u\right)\ge I\left(p:u\right),\ \left(q>0\right), \qquad (4.4.61)$$

$$I_q\left(p:u\right)\le I\left(p:u\right),\ \left(q<0\right), \qquad (4.4.62)$$

$$I_q\left[p\left(w\right):u\left(w\right)\right]\le I_q\left(p:u\right), \qquad (4.4.63)$$

$$p_i\left(w\right)=\sum_k^n p_k w_{ki}\ ,\ u_i\left(w\right)=\sum_k^n u_k w_{ki}\ ,\ \sum_i^m w_{ki}=1. \qquad (4.4.64)$$

Подробные сведения о неравенствах приводятся в обзорах [120, 121].

7. Негэнтропийный принцип. Пусть среднее значение флуктуации случайной энтропии $h(u_i)$ для распределения p_i удовлетворяет равенству

$$\mathbf{E}_q\left\{\Delta_q\left[h_q(u)\right]\right\} = \sum_i^m\left[h_q(u_i)-H_q(u)\,p^{1-q}\right]p_i^q = $$
$$= \sum_i^m h_q(u_i)\,p_i^q - \sum_i^m h_q(u_i)u_i^q = 0\ , \qquad (4.4.65)$$

что приводит, согласно (4.4.56), к выражению информации различия

$$I_q(p:u) = -\frac{\left[H_q(p)-H_q(u)\right]}{1+\left(1-2^{1-q}\right)H_q(u)}. \qquad (4.4.66)$$

Из (4.4.66) вытекает соотношение

$$H_q(p) = H_q(u) - I_q(p:u)\left[1+\left(1-2^{1-q}\right)H_q(u)\right]\ , \qquad (4.4.67)$$

где информация различия с точностью до множителя представлена в виде отрицательного вклада в энтропию и поэтому называется негэнтропией. Соотношение (4.4.67) представляется также в следующем виде

$$\left[1+\left(1-2^{1-q}\right)H_q(p)\right] = $$
$$=\left[1+\left(1-2^{1-q}\right)H_q(u)\right]\ \left[1-\left(1-2^{1-q}\right)I_q(p:u)\right]\ . \qquad (4.4.68)$$

В общем случае выполняется негэнтропийный принцип

$$I_q(p:u)\left[1+\left(1-2^{1-q}\right)H_q(u)\right]+\left[H_q(p)-H_q(u)\right]\ >0,\ q>0,$$

$$I_q(p:u)\left[1+\left(1-2^{1-q}\right)H_q(u)\right]+\left[H_q(p)-H_q(u)\right]\ <0,\ q<0. \qquad (4.4.69)$$

Знак неравенства соответствует необратимым процессам, происходящим в случайном объекте.

8. Расхождение. Сумма информаций различия $I_q(p:u)$ и $I_q(u:p)$ определяет выражение расхождения [64, 102]

$$J_q(p:u) = I_q(p:u) + I_q(u:p) =$$

$$= 2\left(2^{1-q}-1\right)^{-1}\left[1-\frac{1}{2}\sum_{i}^{m}\left(p_i^q u_i^{1-q}+u_i^q p_i^{1-q}\right)\right], \qquad (4.4.70)$$

которое симметрично при замене распределения p на u. Функционал (4.4.70) является выпуклым и неаддитивным для независимых объектов.

9. Мера неточности. Мера статистической неточности определяется известной формулой (1.8.58) при аддитивности мер

$$H_q(p:u) = H_q(p) + I_q(p:u) =$$
$$= \sum_{i}^{m} h_q(u_i)\, p_i^q = \left(2^{1-q}-1\right)^{-1}\left[\sum_{i}^{m} p_i^q - \sum_{i}^{m} p_i^q u_i^{1-q}\right]. \qquad (4.4.71)$$

В пределе $q \to 1$ из (4.4.71) вытекает мера неточности Керриджа

$$H(p:u) = \lim_{q\to 1} H_q(p:u) = -\sum_{i}^{m}\left(\log_2 u_i\right) p_i \,. \qquad (4.4.72)$$

Следующие выражения для меры неточности

$$H_q(p:u) = \left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left(1-\sum_{i}^{m} u_i^{q-1} p_i\right), \qquad (4.4.73)$$

$$H_q(p:u) = \left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left(1-\sum_{i}^{m} u_i^{(q-1)/q} p_i\right), \qquad (4.4.74)$$

$$H_q(p:u) = \left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left(1-\frac{\sum_{i}^{m} p_i^q}{\sum_{i}^{m} p_i^q u_i^{1-q}}\right) \qquad (4.4.75)$$

и другие, имеющие также предельное значение (4.4.72), приводятся в обзорах [120, 121].

Точное выражение меры статистической неточности дается формулой для неаддитивных мер

$$H_q(p:u) = H_q(p) + I_q(p:u) - \left(1-2^{1-q}\right) H_q(p)\, I_q(p:u) =$$
$$= \left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left[1-2\sum_{i}^{m} p_i^q + \sum_{i}^{m} p_i^q \sum_{i}^{m} p_i^q u_i^{1-q}\right]. \qquad (4.4.76)$$

На рис.4.6 представлены зависимости энтропии $H_q(p)$, ненормированной информации различия $I_q(p:u)$ и меры неточности $H_q(p:u)$ в виде (4.4.61) (кривая *3*) и в виде (4.4.76) (кривая *4*) от распределения при $m=2$, $q=2$, $p_1=p$ и а) $u_1=1/3$, б) $u_1=1/2$.

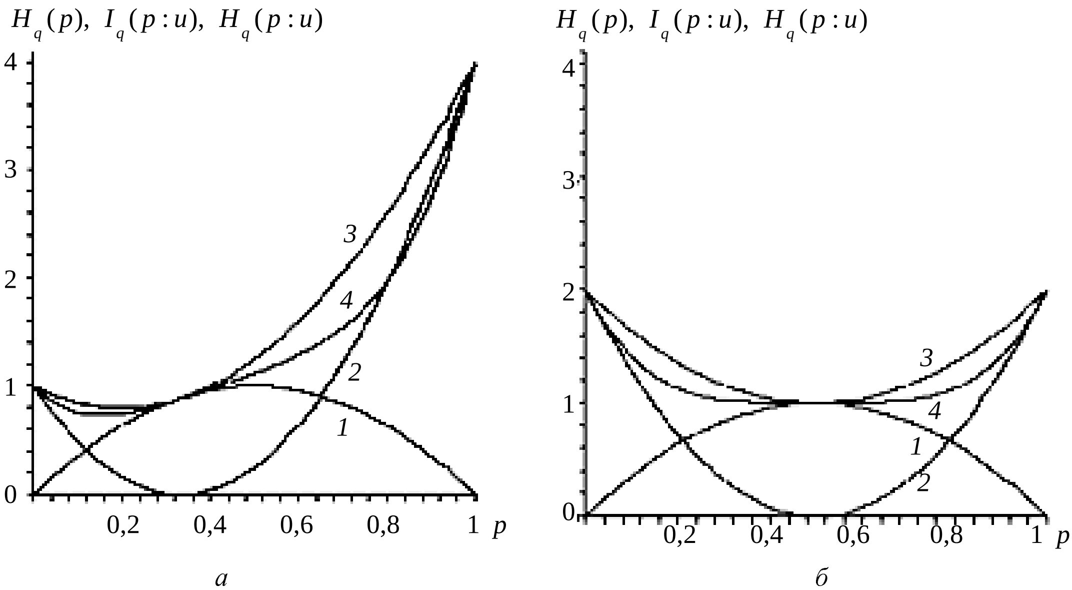


Рис.4.6. Зависимости функционалов модели Хаврда–Чарват–Дароши от распределения: *1* – энтропия $H_q(p)$, *2* – ненормированная информация различия $I_q(p:u)$, *3* и *4* – мера неточности $H_q(p:u)$

В отличие от моделей Шеннона–Винера, Реньи и Ратье–Каннаппана мера неточности при $u_1=1/2$ не представляется в виде прямой линии, что связано с ненормированностью рассматриваемой информации различия.

10. Информационный радиус. Используя неравенство (4.3.15) при $a_1=a_2=1/2$, имеем выражения информационного радиуса [63]

$$R_q(p:u)=H_q\left(\frac{p+u}{2}\right)-\frac{1}{2}\left[H_q(p)+H_q(u)\right]=$$

$$=\left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\sum_i^m\left[\frac{p_i^q+u_i^q}{2}-\left(\frac{p_i+u_i}{2}\right)^q\right]\ . \qquad (4.4.77)$$

При $q \to 1$ из (4.4.77) следует выражение (1.8.60) статистической модели Шеннона–Винера. Известно другое значение информационного радиуса [120, 121]

$$R_q(p:u) = \frac{1}{2}\left[I_q\left(p : \frac{p+u}{2} \right) + I_q\left(u : \frac{p+u}{2} \right) \right] =$$

$$= \left(1 - 2^{1-q}\right)^{-1} \sum_i^m \left[\frac{p_i^q + u_i^q}{2} \left(\frac{p_i + u_i}{2} \right)^{1-q} - 1 \right], \qquad (4.4.78)$$

которое является обобщением функционала (1.8.63).

11. Информационное расстояние. Пусть $\delta(p,u) = \frac{1}{2} I_q^2(p:u)$ есть несимметричный аналог расстояния от распределения p до u. Для такого информационного расстояния не выполняется неравенство треугольника, а имеется несимметричный аналог теоремы Пифагора

$$I_q(p:u) = I_q(p:w) + I_q(w:u), \qquad (4.4.79)$$

если выполняется равенство

$$\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} + \sum_i^m p_i^q w_i^{1-q} = \sum_i^m w_i^q u_i^{1-q}. \qquad (4.4.80)$$

12. Нормированность и размерность. Функционал (4.4.11) с $\lambda = 1 - q$ является физической безразмерной информацией различия

$$I_q^{phys}(p:u) = \frac{1}{1-q}\left(1 - \sum_i^m p_i^q u_i^{1-q} \right). \qquad (4.4.81)$$

Информацию различия Ратье–Каннаппана в виде физической размерной информации различия $I_q(p:u) = kI_q^{phys}(p:u)$ использовал автор при исследовании процессов самоорганизации и необратимости в неэкстенсивных системах [20 – 23].

Рассматриваемая информация различия не удовлетворяет условию нормированности на единицу и равняется отношению физической безразмерной информации различия на значение физической энтропии $H_q^{phys}(u)$ при равновероятном состоянии с $m = 2$. Выполняется следующее равенство:

$$I_q\left(p:u\right)=\frac{I_q^{phys}\left(p:u\right)}{H_q^{phys}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)},\tag{4.4.82}$$

где

$$H_q^{phys}\left(u\right)=\frac{1}{q-1}\left(1-\sum_i^2 u_i^q\right),\ H_q^{phys}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{q-1}\left(1-2^{1-q}\right).\tag{4.4.83}$$

Для информации различия Ратье–Каннаппана имеем

$$I_q\left(p:u\right)=\frac{I_q^{phys}\left(p:u\right)}{I_q^{phys}\left(1,0:\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)},\ I_q^{phys}\left(1,0:\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{1-q}\left(1-2^{q-1}\right).\tag{4.4.84}$$

Таким образом, отличие двух функционалов (4.4.6) и (4.4.15) состоит в разных значениях нормировочных множителей у физической безразмерной информации. В статистических моделях Шеннона–Винера и Реньи множитель имеет одинаковое значение, равное $\ln 2$.

13. Информация Фишера. Предельное значение информации различия в случае распределений $p_i\left(\theta\right)$ и $u_i\left(\theta\right)=p_i\left(\theta+\delta\theta\right)$ имеет вид

$$I_q\left(\theta:\theta+\delta\theta\right)=\frac{1}{2^{1-q}-1}\left[1-\sum_i^m p_i^q\left(\theta\right)p_i^{1-q}\left(\theta+\delta\theta\right)\right]=$$

$$=\frac{q\left(1-q\right)}{2\ln 2\left(2^{1-q}-1\right)}\Gamma_{\theta\theta}\left(\delta\theta\right)^2=\frac{\left(\delta\theta\right)^2}{2}\sum_i^m\frac{\partial^2 h_q\left[p_i\left(\theta\right)\right]}{\partial\theta^2}p_i^q\left(\theta\right),\tag{4.4.85}$$

где величина

$$\Gamma_{\theta\theta}=\sum_i^m\left[\frac{\partial\ln p_i\left(\theta\right)}{\partial\theta}\right]^2 p_i\left(\theta\right)\tag{4.4.86}$$

представляет собой меру Фишера о величине нефлуктуирующего параметра θ в теории оценивания математической статистики [32, 33, 39, 74, 75].

14. Двух и k-параметрическая информация различия. Рассмотрим взвешенное ненормированное усреднение с весом $p_i^q u_i^{-r}$. Тогда, учитывая выражение:

$$\mathbf{E}_q(T)=\frac{\sum_i^m T_i p_i^q u_i^{-r}}{\sum_i^m p_i} \quad (4.4.87)$$

и, используя аксиомы раздела 4.4, получим двухпараметрическую информацию различия

$$I_{q,D_q}(p:u)=\lambda\left(q,D_q\right)\left[1-\sum_i^m p_i^q u_i^{D_q(1-q)}\right], \quad (4.4.88)$$

где $\lambda\left(q,D_q\right)$ – нормировочный множитель и

$$D_q=\frac{\tau}{q-1}. \quad (4.4.89)$$

Физическая безразмерная информация различия имеет вид [21]

$$I_{q,D_q}^{phys}(p:u)=\frac{1}{q-1}\left[1-\sum_i^m p_i^q u_i^{D_q(1-q)}\right]. \quad (4.4.90)$$

Для нахождения $\lambda\left(q,D_q\right)$ запишем равенства

$$I_{q,D_q}(p:u)=\frac{I_{q,D_q}^{phys}(p:u)}{H_q^{phys}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)},\ H_q^{phys}(u)=\frac{1}{q-1}\left(1-\sum_i^2 u_i^q\right), \quad (4.4.91)$$

$$I_{q,D_q}(p:u)=\frac{I_{q,D_q}^{phys}(p:u)}{I_{q,D_q}^{phys}\left(1,0:\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}. \quad (4.4.92)$$

Согласно (4.4.90) – (4.4.92) получим два функционала

$$I_{q,D_q}(p:u)=\left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left[1-\sum_i^m p_i^q u_i^{D_q(1-q)}\right], \quad (4.4.93)$$

$$I_{q,D_q}(p:u)=\left(1-2^{D_q(q-1)}\right)^{-1}\left[1-\sum_i^m p_i^q u_i^{D_q(1-q)}\right], \quad (4.4.94)$$

которые при $D_q=1$ совпадают, соответственно, с функционалами (4.4.15) и (4.4.6).

Отметим, что полученные информации различия обладают всеми приведенными свойствами, для них можно ввести значения информационного радиуса, расстояния, меры расхождения, неточности и т.п.

Определим k-параметрическую физическую безразмерную информацию различия

$$I_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k}\left(p_1 : p_2 : \ldots : p_k\right)=$$

$$=\frac{1}{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k}\left(1-\sum_i^m p_{1i}^{\alpha_1} p_{2i}^{\alpha_2} \ldots p_{ki}^{\alpha_k}\right), \quad \sum_i^m p_{ri}=1, \qquad (4.4.95)$$

которая является выпуклым, неаддитивным функционалом для независимых объектов.

При $r=1,\ 2$ положим $p_{1i}=p_i$ и $p_{2i}=u_i$, а также $\alpha_1+\alpha_2=1$ с $\alpha_1=q$ и $\alpha_2=1-q$. В итоге из (4.4.95) вытекает следующая информация различия [68, 91, 125]

$$I_{q,1-q}\left(p:u\right)=\frac{1}{q\left(1-q\right)}\left(1-\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right) \qquad (4.4.96)$$

с предельными значениями при $q=0$ и $q=1$

$$I_{0,1}\left(p:u\right)=\sum_i^m\left(\log_2\frac{u_i}{p_i}\right)u_i, \qquad (4.4.97)$$

$$I_{1,0}\left(p:u\right)=\sum_i^m\left(\log_2\frac{p_i}{u_i}\right)p_i. \qquad (4.4.98)$$

15. *f*-информация различия. Информация различия представляет собой f - информации различия

$$I_f\left(p:u\right)=\sum_i^m f\left(\frac{u_i}{p_i}\right)p_i, \quad f=\frac{1-\left(\dfrac{u_i}{p_i}\right)^{1-q}}{\left(2^{1-q}-1\right)}, \qquad (4.4.99)$$

$$I_f\left(p:u\right)=\sum_i^m f\left(p_i,u_i\right), \quad f=\frac{\left(p_i-p_i^q u_i^{1-q}\right)}{\left(2^{1-q}-1\right)}, \qquad (4.4.100)$$

$$I_f(p:u) = f\left[N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)\right], \quad f = \frac{1-\left[N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)\right]^{q-1}}{\left(2^{1-q}-1\right)}. \tag{4.4.101}$$

Функция $f(p,u)$ в (4.4.100) есть информационная функция, а выражение (4.4.101) – функция от полунормы распределения.

В случае трех распределений функционалы (4.4.99), (4.4.101) примут вид

$$I_f(p:w:u) = \sum_i^m f\left(\frac{w_i}{u_i}\right)p_i, \tag{4.4.102}$$

$$I_f(p:w:u) = f\left[N_{q-1}\left(\frac{w}{u}\right)\right], \tag{4.4.103}$$

где полунорма распределения

$$N_{q-1}\left(\frac{w}{u}\right) = \sum_i^m w_i^{q-1} u_i^{1-q} p_i. \tag{4.4.104}$$

Для информации различия Ратье–Каннаппана коэффициент $\left(2^{1-q}-1\right)$ заменяется на $\left(1-2^{q-1}\right)$. Если функциональная зависимость в (4.4.103) имеет вид

$$f = \left(1-2^{q-1}\right)^{-1}\left\{1-\left[N_{q-1}\left(\frac{w}{u}\right)\right]^{q-1}\right\}, \tag{4.4.105}$$

то получим выражение

$$I_f(p:w:u) = \left(1-2^{q-1}\right)^{-1}\left(1-\sum_i^m w_i^{q-1} u_i^{1-q} p_i\right), \tag{4.4.106}$$

рассматриваемое в работе [82].

16. Квантовые информационные меры. Для квазиклассической статистики рассматривается взвешенное среднее по весам υ_i

$$H_q(p) = \frac{1}{\left(1-2^{1-q}\right)}\left(1-\frac{\sum_i^m p_i^{q-1}\upsilon_i}{\sum_i^m \upsilon_i}\right), \tag{4.4.107}$$

которое при $q \to 1$ совпадает с энтропией (2.11.14).

Квантовые информационные меры для статистики Максвелла–Больцмана имеют вид [97]

$$H_q(p:u)=\frac{1}{\left(1-2^{-q}\right)}\left(\sum_i^m p_i\upsilon_i-\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\upsilon_i\right), \qquad (4.4.108)$$

$$I_q(p:u)=\frac{1}{\left(1-2^{q-1}\right)}\left(\sum_i^m p_i\upsilon_i-\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\upsilon_i\right). \qquad (4.4.109)$$

В пределе $q\to 1$ из (4.4.108) и (4.4.109) вытекает информация различия (2.11.3) и мера неточности [114, 115].

4.5. Тип неаддитивной *q*-энтропии и *q* -информации различия

Пусть случайный объект состоит из двух независимых случайных объектов. Для значений полунорм распределений

$$N=N_{q-1}\left(p_{12}\right),\ N_1=N_{q-1}\left(p_1\right),\ N_2=N_{q-1}\left(p_2\right) \qquad (4.5.1)$$

справедливо свойство мультипликативности

$$N=N_1N_2. \qquad (4.5.2)$$

Совместное распределение есть $p_{ij}=p_ip_j$, а p_i и p_j относятся к независимым объектам.

Используем свойство неаддитивности для q-энтропии

$$H=H_1+H_2+\left(2^{1-q}-1\right)H_1H_2, \qquad (4.5.3)$$

где $H=H(N)$, $H_1=H\left(N_1\right)$ и $H_2=H\left(N_2\right)$.

После дифференцирования (4.5.2) с использованием (4.5.3) получим уравнение [22]

$$\left[1+\left(2^{1-q}-1\right)H\right]\frac{d\ln N}{dH}=\left[1+\left(2^{1-q}-1\right)H_1\right]\frac{d\ln N_1}{dH_1}=$$

$$=\left[1+\left(2^{1-q}-1\right)H_2\right]\frac{d\ln N_2}{dH_2}=\lambda, \qquad (4.5.4)$$

где λ – произвольная постоянная, зависящая от q.

Интегрируем (4.5.4) и имеем q-энтропию

$$H_q(p)=\left(2^{1-q}-1\right)^{-1}\left\{\left[N_{q-1}(p)\right]^{\left(2^{q-1}-1\right)/\lambda}-1\right\}. \qquad (4.5.5)$$

Учитывая условие нормированности энтропии $H_q\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=1$ при $m=2$ и $p_1=p_2=1/2$ получим равенство

$$\left(2^{1-q}-1\right)^{-1}\left\{2^{\left(2^{q-1}-1\right)/\lambda}-1\right\}=1, \tag{4.5.6}$$

из которого находим значение постоянной

$$\lambda=\frac{1-2^{1-q}}{1-q}. \tag{4.5.7}$$

В итоге из (4.5.5) вытекает энтропия Хаврда–Чарват–Дароши

$$H_q(p)=\left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left\{1-\left[N_{q-1}(p)\right]^{q-1}\right\}=\left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left(1-\frac{\sum_i^m p_i^q}{\sum_i^m p_i}\right). \tag{4.5.8}$$

Аналогично, используя полунормы

$$N=N_{q-1}\left(\frac{p_{12}}{u_{12}}\right),\ N_1=N_{q-1}\left(\frac{p_1}{u_1}\right),\ N_2=N_{q-1}\left(\frac{p_2}{u_2}\right) \tag{4.5.9}$$

и свойство неаддитивности для q-информации различия

$$I=I_1+I_2+\left(2^{q-1}-1\right)I_1I_2, \tag{4.5.10}$$

получим уравнение

$$\left[1+\left(2^{q-1}-1\right)I\right]\frac{d\ln N}{dI}=\left[1+\left(2^{q-1}-1\right)I_1\right]\frac{d\ln N_1}{dI_1}=$$

$$=\left[1+\left(2^{q-1}-1\right)I_2\right]\frac{d\ln N_2}{dI_2}=\lambda\ . \tag{4.5.11}$$

Решением (4.5.11) является q-информация различия

$$I_q\left(\frac{p}{u}\right)=\left(2^{q-1}-1\right)^{-1}\left\{\left[N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)\right]^{\left(2^{q-1}-1\right)/\lambda}-1\right\}, \tag{4.5.12}$$

которая с учетом условия нормированности $I_q\left(1,0:\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=1$ приводит к равенству:

$$\left(2^{q-1}-1\right)^{-1}\left\{ 2^{\left(1-2^{q-1}\right)/\lambda}-1\right\} =1. \tag{4.5.13}$$

Из (4.5.13) получим

$$\lambda=\frac{1-2^{q-1}}{q-1} \tag{4.5.14}$$

и в итоге из (4.5.12) вытекает информация различия Ратье–Каннаппана

$$I_q\left(\frac{p}{u}\right)=\left(1-2^{q-1}\right)^{-1}\left\{ 1-\left[N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)\right]^{q-1}\right\}=$$

$$=\left(1-2^{q-1}\right)^{-1}\left(1-\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}\right). \tag{4.5.15}$$

При использовании свойства неаддитивности в виде

$$I=I_1+I_2+\left(1-2^{1-q}\right)I_1 I_2 \tag{4.5.16}$$

и после вычислений находим

$$I_q\left(\frac{p}{u}\right)=\left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left\{ \left[N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)\right]^{\left(2^{1-q}-1\right)/\lambda}-1\right\}. \tag{4.5.17}$$

При значении постоянной

$$\lambda=\frac{2^{1-q}-1}{q-1} \tag{4.5.18}$$

из (4.5.17) следует ненормированная информация различия

$$I_q\left(\frac{p}{u}\right)=\left(2^{1-q}-1\right)^{-1}\left\{ 1-\left[N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right)\right]^{q-1}\right\}=$$

$$=\left(2^{1-q}-1\right)^{-1}\left(1-\frac{\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}}{\sum_i^m p_i}\right). \tag{4.5.19}$$

При $\sum_{i}^{m} p_i = 1$ функционалы (4.5.15) и (4.5.19) совпадают с выражениями (4.4.6) и (4.4.15).

4.6. Экстремум полунормы распределения

Рассмотрим экстремум полунормы распределения [21]

$$N_{q-1}(p) = \left(\sum_{i}^{m} p_i^q \right)^{1/(q-1)} \tag{4.6.1}$$

при сохранении нормировки

$$\sum_{i}^{m} p_i = 1. \tag{4.6.2}$$

Для этого вычислим безусловный экстремум функционала

$$L = \left(\sum_{i}^{m} p_i^q \right)^{1/(q-1)} - \alpha \sum_{i}^{m} p_i , \tag{4.6.3}$$

где α есть множитель Лагранжа. Используя равенство

$$\delta L = \frac{q}{q-1} \left(\sum_{i}^{m} p_i^q \right)^{(2-q)/(q-1)} \sum_{i}^{m} p_i^{q-1} \delta p_i - \alpha \sum_{i}^{m} \delta p_i = 0 , \tag{4.6.4}$$

получим

$$q \gamma p_i^{q-1} - \alpha = 0 , \ \gamma = \frac{1}{q-1} \left(\sum_{i}^{m} p_i^q \right)^{(2-q)/(q-1)} . \tag{4.6.5}$$

Учитывая условие нормировки (4.6.2), из (4.6.5) вытекает равновероятное распределение $p_i = 1/m$ и экстремальное значение полунормы распределения $N(p) = 1/m$.

Далее рассмотрим вариационный принцип экстремума полунормы распределения при заданности ненормированного среднего значения случайной величины $h = \{h_1, \ldots, h_m\}$ и нормировки

$$H(p) = \sum_{i}^{m} h_i p_i^q , \ \sum_{i}^{m} p_i = 1. \tag{4.6.6}$$

Согласно вариационному принципу, определим функционал:

$$L = \left(\sum_i^m p_i^q \right)^{1/(q-1)} + \tau \sum_i^m h_i p_i^q - \alpha \sum_i^m p_i \; . \qquad (4.6.7)$$

Приравнивая нулю первую вариацию

$$\delta L = \frac{q}{q-1} \left(\sum_i^m p_i^q \right)^{(2-q)/(q-1)} \sum_i^m p_i^{q-1} \delta p_i +$$

$$+ \tau q \sum_i^m h_i p_i^{q-1} \delta p_i - \alpha \sum_i^m \delta p_i = 0 \qquad (4.6.8)$$

получим

$$q\left(\gamma - \tau h_i\right) p_i^{q-1} - \alpha = 0 \, . \qquad (4.6.9)$$

Поскольку τ и α имеют произвольные значения, то $\tau = -\gamma\lambda = -\alpha q^{-1}\lambda$. Тогда из (4.6.9) вытекает распределение

$$p_i = \left(1 + \lambda h_i\right)^{1/(1-q)} \qquad (4.6.10)$$

и выражение случайной энтропии

$$h_i = h\left(p_i\right) = -\lambda^{-1}\left(1 - p_i^{1-q}\right). \qquad (4.6.11)$$

Усредняя (4.6.11) получим q-энтропию

$$H_q\left(p\right) = \sum_i^m h\left(p_i\right) p_i^q = -\lambda^{-1}\left(1 - \sum_i^m p_i^q\right), \qquad (4.6.12)$$

которая при выполнении условия нормированности $H_q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1$ при $m = 2$ и $p_1 = p_2 = 1/2$ приводит к равенству

$$\lambda = \left(1 - 2^{1-q}\right). \qquad (4.6.13)$$

Подставляя значение коэффициента (4.6.13) в (4.6.12) имеем энтропию Хаврда–Чарват–Дароши

$$H_q\left(p\right) = \left(1 - 2^{1-q}\right)\left(1 - \sum_i^m p_i^q\right). \qquad (4.6.14)$$

Аналогично, находим экстремум полунормы распределения

$$N_{q-1}\left(\frac{p}{u}\right) = \left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right)^{1/(q-1)} \qquad (4.6.15)$$

при дополнительных условиях заданности ненормированного среднего значения величины $I=\{I_1,\ldots,I_m\}$ и сохранения нормировки

$$I_q(p:u)=\sum_i^m I_i p_i^q\,,\ \sum_i^m p_i=1. \tag{4.6.16}$$

Определим функционал

$$L=\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right)^{1/(q-1)}-\tau\sum_i^m I_i p_i^q-\alpha\sum_i^m p_i \tag{4.6.17}$$

и приравняем его первую вариацию нулю. Тогда из равенства

$$\delta L=\frac{q}{q-1}\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right)^{(2-q)/(q-1)}\sum_i^m p_i^{q-1}u_i^{1-q}-$$
$$-\tau q\sum_i^m h_i p_i^{q-1}\delta p_i-\alpha\sum_i^m \delta p_i=0 \tag{4.6.18}$$

получим

$$q\left(\gamma u_i^{1-q}-\tau I_i\right)p_i^{q-1}-\alpha=0\,,\ \gamma=\left(\sum_i^m p_i^q u_i^{q-1}\right)^{(2-q)/(q-1)}. \tag{4.6.19}$$

Полагая $\tau=\gamma\lambda=\alpha q^{-1}\lambda$, из (4.6.19) имеем выражение случайной информации различия

$$I_i=I\left(p_i:u_i\right)=\lambda^{-1}\left(p_i^{1-q}-u_i^{1-q}\right). \tag{4.6.20}$$

Среднее ее значение дает функционал

$$I_q(p:u)=\sum_i^m I\left(p_i:u_i\right)p_i^q=\lambda^{-1}\left(1-\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right), \tag{4.6.21}$$

который при выполнении условия нормированности $I_q\left(1,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=1$ совпадает с информацией различия Ратье–Каннаппана

$$I_q(p:u)=\left(1-2^{q-1}\right)\left(1-\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right). \tag{4.6.22}$$

Если выполняется условие:

$$I\left(p_i : u_i\right) = -\left[h\left(p_i\right) - h\left(u_i\right)\right] , \qquad (4.6.23)$$

то для λ имеем равенство (4.6.13) и в итоге из (4.6.21) следует ненормированная информация различия

$$I_q\left(p : u\right) = \left(2^{1-q} - 1\right)^{-1}\left(1 - \sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right). \qquad (4.6.24)$$

4.7. Вариационный принцип для энтропии Хаврда–Чарват–Дароши и термодинамические соотношения

Рассмотрим экстремум энтропии Хаврда–Чарват–Дароши

$$H_q\left(p\right) = \left(1 - 2^{1-q}\right)^{-1}\left(1 - \sum_i^m p_i^q\right) \qquad (4.7.1)$$

при заданном значении произвольной случайной величины $T = \left\{T_1, \ldots, T_m\right\}$ и сохранении нормировки

$$\mathbf{E}_q\left(T\right) = \sum_i^m T_i p_i^q , \ \sum_i^m p_i = 1. \qquad (4.7.2)$$

Для нахождения вероятного распределения вычислим безусловный экстремум функционала

$$L = \left(1 - 2^{1-q}\right)^{-1}\left(1 - \sum_i^m p_i^q\right) + \tau\sum_i^m T_i p_i^q - \alpha\sum_i^m p_i , \qquad (4.7.3)$$

где τ и α есть множители Лагранжа. Из условия

$$\delta L = -q\left(1 - 2^{1-q}\right)^{-1}\sum_i^m p_i^{q-1}\delta p_i +$$

$$+\tau q\sum_i^m T_i p_i^{q-1}\delta p_i - \alpha\sum_i^m \delta p_i = 0 \qquad (4.7.4)$$

следует равенство

$$q\left(2^{1-q} - 1\right)p_i^{q-1}\left[1 + \left(1 - q\right)\lambda\tau T_i\right] - \alpha = 0 , \ \lambda = \frac{2^{1-q} - 1}{1 - q}. \qquad (4.7.5)$$

Из (4.7.5) получим нормированное распределение с параметрами q и τ

$$p_i = \left[1 + \left(1 - q\right)\lambda\tau T_i\right]^{1/(1-q)} \Gamma_q^{-1}\left(\tau\right), \qquad (4.7.6)$$

где функция

$$\Gamma_q(\tau)=\sum_i^m\left[1+(1-q)\lambda\tau T_i\right]^{1/(1-q)}. \qquad (4.7.7)$$

При условии $1+(1-q)\lambda\tau T_i>0$ и $q=1$ из (4.7.6) и (4.7.7) вытекает распределение (1.9.9) статистической модели Шеннона–Винера

$$p_i=2^{\tau T_i}\Gamma^{-1}(\tau),\ \Gamma(\tau)=\sum_i^m 2^{\tau T_i}. \qquad (4.7.8)$$

Для экстремального значения энтропии имеем выражение

$$H_q(p)=\frac{1}{\lambda(q-1)}\left[1-\sum_i^m\frac{\Gamma_q^{1-q}(\tau)p_i}{1+(1-q)\lambda\tau T_i}\right]=$$

$$=-\tau\left\{\frac{\left[1-\Gamma_q^{1-q}(\tau)\right]}{\lambda\tau(1-q)}+\sum_i^m\frac{\Gamma_q^{1-q}(\tau)p_iT_i}{1+(1-q)\lambda\tau T_i}\right\}=$$

$$=-\tau\left\{\frac{\left[1-\Gamma_q^{1-q}(\tau)\right]}{\lambda\tau(1-q)}+\sum_i^m T_ip_i^q\right\}=-\lambda\tau\left[\mathbf{E}_q(T)-F_q\right], \qquad (4.7.9)$$

где

$$F_q=\frac{\Gamma_q^{1-q}(\tau)-1}{\lambda\tau(1-q)}. \qquad (4.7.10)$$

Используя (4.7.9) и (4.7.10), перепишем распределение (4.7.7) в виде

$$p_i=\left[\frac{1+(1-q)\lambda\tau T_i}{1+(1-q)\lambda\tau F_q}\right]^{1/(1-q)} \qquad (4.7.11)$$

и получим дифференциальное соотношение

$$dH_q(p)=-\lambda\tau d\mathbf{E}(T). \qquad (4.7.12)$$

Затем находим вторую вариацию функционала (4.7.3)

$$\delta^2L=-q(q-1)\left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\sum_i^m\left[\left(1+(1-q)\lambda\tau T_i\right)p_i^{q-2}\right](\delta p)^2. \qquad (4.7.13)$$

Из (4.7.13) следует, что экстремум соответствует максимуму и минимуму рассматриваемого функционала, соответственно, при $q>0$ $\left(\delta^2 L<0\right)$ и $q<0$ $\left(\delta^2 L>0\right)$. Таким образом, распределение (4.7.11) максимизирует и минимизирует энтропию Хаврда–Чарват–Дароши.

Используем значение случайной энтропии и получим формулу

$$-\frac{\partial h_q\left(p_i\right)}{\partial\left(\lambda\tau\right)}=\frac{1}{1+\left(1-q\right)\lambda\tau F_q}\Delta_q\left(T_i\right) \qquad (4.7.14)$$

с флуктуацией случайной величины T, что позволяет использовать ее при вычислении произвольных центральных моментов.

Пусть распределение p_i является произвольным, а u_i имеет вид

$$u_i=\left[\frac{1+\left(1-q\right)\lambda\tau_0 T_i}{1+\left(1-q\right)\lambda\tau_0 F_{0q}}\right]^{1/(1-q)}. \qquad (4.7.15)$$

Для этих распределений ненормированная информация различия имеет значение

$$I_q\left(p:u\right)=\left(2^{1-q}-1\right)^{-1}\left(1-\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right)=$$

$$=\left(2^{1-q}-1\right)^{-1}\left[1-\Gamma_{0q}^{q-1}\left(\tau_0\right)\sum_i^m\left[1+\left(1-q\right)\lambda\tau_0 T_i\right]p_i^q\right]=$$

$$=\left(2^{1-q}-1\right)^{-1}\left[1-\Gamma_{0q}^{q-1}\left(\tau_0\right)\sum_i^m p_i^q-\left(1-q\right)\lambda\tau_0\Gamma_{0q}^{q-1}\left(\tau_0\right)\mathbf{E}_q\left(T\right)\right]. \qquad (4.7.16)$$

Запишем разность энтропий

$$H_q\left(p\right)-h_q\left(u\right)=\left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left(\sum_i^m u_i^q-\sum_i^m p_i^q\right)=$$

$$=\left(1-2^{1-q}\right)^{-1}\left\{1-\left(1-q\right)\lambda\tau_0\left[\mathbf{E}_{0q}\left(T\right)-F_{0q}\right]-\sum_i^m p_i^q\right\} \qquad (4.7.17)$$

и после вычислений окончательно получим формулу

$$I_q\left(p:u\right)=\left[1+\left(1-q\right)\lambda\tau_0 F_{0q}\right]^{-1}\times$$

$$\times\left\{-\left[H_q(p)-H_q(u)\right]-\lambda\tau\left[\mathbf{E}_q(T)-\mathbf{E}_{0q}(T)\right]\right\}, \qquad (4.7.18)$$

которая при $q=1$ совпадает с информацией различия Кульбака–Лейблера (1.9.24) статистической модели Шеннона–Винера

$$I(p:u)=\lim_{q\to 1} I_q(p:u)=$$
$$=-\left[H_q(p)-H_q(u)\right]-\tau_0\left[\mathbf{E}_q(T)-\mathbf{E}_{0q}(T)\right], \qquad (4.7.19)$$
$$\mathbf{E}_{0q}(T)=\sum_i^m T_i u_i^q.$$

В статистической физике случайными объектами являются частицы. В этом случае положим, что $\beta=-k\tau\lambda$ есть обратная температура, H_i – дискретные значения энергии частицы и $E_q=\mathbf{E}_q(H)$ – средняя энергия частицы. Экстремальное значение физической размерной энтропии

$$H_q(p)=\frac{k}{q-1}\left(1-\sum_i^m p_i^q\right)=\beta\left(E_q-F_q\right) \qquad (4.7.20)$$

совпадает с соответствующим выражением в статистической модели Больцмана–Гиббса. Равновесное распределение имеет вид

$$p_i=\left[\frac{1-k^{-1}(1-q)\beta H_i}{1-k^{-1}(1-q)\beta F_q}\right]^{1/(1-q)}, \qquad (4.7.21)$$

где F_q – свободная энергия. Формула (4.7.12) соответствует дифференциальному соотношению

$$TdH_q(p)=dE_q \qquad (4.7.22)$$

равновесной статистической термодинамики замкнутых систем [6].

Для открытых неравновесных систем, которые находятся в окружении с температурой T_0, имеем физическую размерную информацию различия в виде

$$I_q(p:p_0)=\frac{k}{1-q}\left(1-\sum_i^m p_i^q p_{0i}^{1-q}\right)=$$

$$=\frac{1}{1-k^{-1}(1-q)\beta_0 F_{0q}}\left\{-\left[H_q(p)-H_q(p_0)\right]+\frac{1}{T_0}\left[E_q-E_{0q}\right]\right\}, \quad (4.7.23)$$

где $\beta_0 = 1/T_0$ и $E_{0q} = \mathbf{E}_{0q}(H)$ для распределения

$$p_{0i}=\left[\frac{1-k^{-1}(1-q)\beta_0 H_i}{1-k^{-1}(1-q)\beta_0 F_{0q}}\right]^{1/(1-q)}. \quad (4.7.24)$$

Введем неравновесный потенциал Максвелла-–Гюи [7, 12]

$$\Phi_q = E_q - T_0 H_q(p). \quad (4.7.25)$$

Тогда информация различия

$$I_q(p:p_0)=\frac{\beta_0\left(\Phi_q-\Phi_{0q}\right)}{1-k^{-1}(1-q)\beta_0\Phi_{0q}} \quad (4.7.26)$$

зависит от двух потенциалов, где $\Phi_{0q} = E_{0q} - T_0 H_q(p_0)$. В полном равновесии их значения совпадают $\Phi_q = \Phi_{0q}$ и $I(p:p_0)=0$.

Неравновесный потенциал представляется, согласно (4.7.26), в следующем виде

$$\beta\Phi_q = \beta\Phi_{0q} + I_q(p:p_0) + k^{-1}(q-1)\beta\Phi_{0q} I_q(p:p_0), \quad (4.7.27)$$

где явно проявляется неаддитивность рассматриваемых величин.

Дифференцируя (4.7.23) по времени, получим дифференциальное соотношение для открытых систем

$$dI_q(p:p_0) \geq \frac{1}{1-k^{-1}(1-q)\beta_0 F_{0q}}\left[-dH_q(p)+\frac{1}{T_0}dE_q\right], \quad (4.7.28)$$

где в отличие от (1.11.12) имеем множитель, зависящий от свободной энергии F_{0q}. Знак неравенства соответствует случаю необратимых процессов в открытой системе.

В заключение отметим, что использование нормированного среднего (3.10.1) в рассматриваемой вариационной задаче приводит к неустранимым трудностям (неопределенность в знаках второй вариации $\delta^2 L$, нелинейный характер зависимости флуктуации случайной энтропии от флуктуации случайной величины и т.п. [21]), что ограничивает термодинамическую интерпретацию полученных результатов.