Глава 2

КВАНТОВЫЕ МЕРЫ ИНФОРМАЦИИ

Общие понятия и методы статистической модели Шеннона–Винера были представлены в главе 1. Перейдем к изучению важного вопроса обобщения рассматриваемых логарифмических мер энтропии и информации различия на случай проявления квантовых свойств случайных объектов. Прогресс в этом направлении связан с введением квантовых статистик Бозе–Эйнштейна и Ферми–Дирака для совокупности частиц в статистической физике, что подробно изложено в монографиях [25, 26, 34, 36].

В данной главе приводится идейная сторона физической статистики случайных объектов, обладающих квантовыми свойствами. Различные приложения можно найти, например, в монографиях [35, 38] по теории передачи информации в физических каналах связи. Также затронут вопрос парастатистики, который отсутствует в традиционных представлениях теории информации.

2.1. Оператор плотности и энтропия Неймана

Идея квантово-статистического описания случайного объекта в теории информации состоит в том, что состояния описываются оператором плотности ρ в гильбертовом пространстве [25, 36]. Случайная величина есть оператор T, взвешенное среднее которого равно

$$\mathbf{E}(T) = \frac{\mathrm{Sp}T\rho}{\mathrm{Sp}\rho}. \tag{2.1.1}$$

Квантовый аналог вероятностной нормировки есть

$$\mathrm{Sp}\rho = 1\ , \quad \rho \geq 1 \tag{2.1.2}$$

и, следовательно, среднее значение оператора запишется так:

$$\mathbf{E}(T) = \mathrm{Sp} T \rho . \tag{2.1.3}$$

Для матричного представления из (2.1.2) и (2.1.3) вытекает формула

$$\mathbf{E}(T) = \sum_i T_{ii} \rho_{ii} + \sum_i \sum_{j \neq i} T_{ij} \rho_{ji} , \tag{2.1.4}$$

из которой следует, что вероятностная трактовка справедлива когда $\rho_{ij} = 0$ при $i \neq j$. В этом случае диагональные элементы комплексной эрмитовой квадратной матрицы плотности соответствуют вероятностям возможных значений случайной величины и имеют аналоги средних в статистической модели Шеннона–Винера

$$\mathbf{E}(T) = \sum_i T_{ii} \rho_{ii}, \quad \sum_i \rho_{ii} = 1. \tag{2.1.5}$$

Недиагональные элементы матрицы плотности отражают чисто квантовые свойства случайного объекта.

Соответственно определяются квантовые аналоги взвешенного среднего геометрического

$$N(T) = 2^{\frac{\mathrm{Sp}(\log_2 T)\rho}{\mathrm{Sp}\rho}} , \tag{2.1.6}$$

энтропии, информации различия [25, 36]

$$H(\rho) = -\log_2 N(\rho) = -\frac{\mathrm{Sp}(\log_2 \rho)\rho}{\mathrm{Sp}\rho} , \tag{2.1.7}$$

$$I(\rho : \rho_0) = \log_2 \frac{N(\rho)}{N(\rho_0)} = \frac{\mathrm{Sp}(\log_2 \rho - \log_2 \rho_0)\rho}{\mathrm{Sp}\rho} \tag{2.1.8}$$

и меры неточности

$$H(\rho : \rho_0) = -\log_2 N(\rho_0) = -\frac{\mathrm{Sp}(\log_2 \rho_0)\rho}{\mathrm{Sp}\rho} . \tag{2.1.9}$$

В функционале (2.1.8) выражение в скобках обозначает случайную информацию различия, равную разности случайных энтропий.

Рассмотрим случай экстремума квантовой энтропии Неймана [25, 36]

$$H(\rho) = -\mathrm{Sp}(\log_2 \rho)\rho \tag{2.1.10}$$

при сохранении нормировки оператора плотности и среднего значения случайной величины T. Тогда задача сводится к нахождению безусловного экстремума следующего функционала

$$L = -\mathrm{Sp}\left(\log_2 \rho\right)\rho + \tau \ \mathrm{Sp}T\rho + \alpha \ \mathrm{Sp}\rho\,, \tag{2.1.11}$$

где τ и α есть множители Лагранжа.

Согласно вариационному принципу, приравняем нулю первую вариацию функционала

$$\delta L = -\mathrm{Sp}\left[\delta\rho\left(\log_2 \rho + \frac{1}{\ln 2} - \tau T - \alpha\right)\right] = 0 \tag{2.1.12}$$

и получим оператор плотности

$$\rho = 2^{\tau T}\varGamma^{-1}(\tau),\ \varGamma(\tau) = \mathrm{Sp}2^{\tau T}\,. \tag{2.1.13}$$

Вычислим экстремальное значение энтропии Неймана

$$H(\rho) = -\tau\mathbf{E}\ (T) + \log_2 \varGamma(\tau) \tag{2.1.14}$$

и, используя равенства

$$\frac{\partial \log_2 \varGamma(\tau)}{\partial\tau} = \mathbf{E}(T), \quad \frac{\partial}{\partial(1/\tau)}\left[\frac{1}{\tau}\log_2 \varGamma(\tau)\right] = H(\rho), \tag{2.1.15}$$

запишем дифференциальное соотношение

$$dH(\rho) = -\tau d\mathbf{E}(T)\,. \tag{2.1.16}$$

Экстремум квантовой энтропии Неймана в рассматриваемой вариационной задаче соответствует ее максимуму, поскольку справедливо неравенство

$$\delta^2 L = -\frac{1}{\ln 2}\mathrm{Sp}\rho^{-1}(\delta\rho)^2 \le 0 \tag{2.1.17}$$

для второй вариации функционала (2.1.11).

В статистической физике [25, 34] и теории передачи информации по физическим каналам связи [35, 38] используется оператор Гамильтона $T = H$, обратная температура $\beta = -\tau/\ln 2$ и физическая размерная энтропия $H(\rho) = -k\mathrm{Sp}(\ln\rho)\rho$, где k – постоянная Больцмана. В этом случае оператор плотности имеет известный вид [25]

$$\rho = \exp\left\{-k^{-1}\beta H\right\}\varGamma^{-1}(\beta), \quad \varGamma(\beta) = \mathrm{Sp}\exp\left\{-k^{-1}\beta H\right\}, \tag{2.1.18}$$

а соотношение (2.1.16) представляет собой закон статистической термодинамики

$$dH(\rho) = \beta dE \ , \quad E = \mathbf{E}(H) \tag{2.1.19}$$

для максимального значения энтропии Неймана в равновесном состоянии.

Переход между состояниями с произвольным оператором плотности ρ и равновесным

$$\rho_0 = \exp\left\{-k^{-1}\beta_0 H\right\} \Gamma^{-1}(\beta_0), \quad \Gamma(\beta_0) = \mathrm{Sp}\exp\left\{-k^{-1}\beta_0 H\right\} \tag{2.1.20}$$

определяется физической размерной информацией различия

$$I(\rho:\rho_0) = -\left[H(\rho) - H(\rho_0)\right] + \beta_0\left[E - E_0\right], \tag{2.1.21}$$

где энтропии и энергии квантовой системы

$$H(\rho) = -k\mathrm{Sp}(\ln\rho)\rho \, , \; H(\rho_0) = -k\mathrm{Sp}(\ln\rho_0)\rho_0 \, , \tag{2.1.22}$$

$$E = \mathrm{Sp}H\rho \, , \; E_0 = \mathrm{Sp}H\rho_0 \, . \tag{2.1.23}$$

Для дифференциала информации различия имеем соотношение

$$dI(\rho:\rho_0) = -dH(\rho) + \beta_0 dE \, , \tag{2.1.24}$$

которое описывает неравновесные информационные процессы в открытой квантовой системе [20, 22].

В заключение рассмотрим произвольное квантовое состояние с конечным числом m собственных значений E_i оператора H. Согласно (2.1.13), матрица плотности имеет диагональный вид

$$p_i = \rho_{ii} = \frac{\exp\left\{-k^{-1}\beta E_i\right\}}{\sum_i^m \exp\left\{-k^{-1}\beta E_i\right\}}, \quad \sum_i^m p_i = 1 \tag{2.1.25}$$

и имеет вероятностную трактовку.

Пусть собственному значению E_i соответствует конечное число квантовых состояний, имеющее кратность G_i. Тогда распределение вероятностей квантовых состояний запишется так:

$$p_i = \rho_{ii} = \frac{\exp\left\{-k^{-1}\beta E_i\right\}}{\sum_i^m \exp\left\{-k^{-1}\beta E_i\right\} G_i}, \quad \sum_i^m p_i G_i = 1 \, . \tag{2.1.26}$$

Такого рода распределения играют важную роль в статистике случайных объектов теории информации, о чем пойдет речь в следующем параграфе.

2.2. Квантовые состояния и средние

Рассмотрим вероятностно-статистическое описание совокупности $N=\{N_1,\ldots,N_m\}$ $(N>>1)$ статистически случайных объектов, которые имеют множество квантовых состояний $G=\{G_1,\ldots,G_m\}$, где m – число состояний. Объектами могут являться, например, последовательности символов из алфавита и материальные частицы с соответствующими состояниями в виде символов и кратности собственного значения энергии частицы и т.п.

Приведем основные определения.

Определение 1. Носителем информации являются два множества: а) множество всех квантовых состояний $G=\{G_1,\ldots,G_m\}$совокупности случайных объектов $N=\{N_1,\ldots,N_m\}$; б) множество случайных величин $T=\{T_1,\ldots,T_m\}$, характеризующих совокупность объектов.

Определение 2. Взвешенное среднее каждой случайной величины T по распределению объектов

$$\mathbf{E}(T)=\frac{\sum_i^m T_i N_i}{\sum_i^m N_i} \tag{2.2.1}$$

или

$$\mathbf{E}(T)=\frac{\mathbf{E}_N(T)}{N},\ N=\sum_i^m N_i\,, \tag{2.2.2}$$

где среднее

$$\mathbf{E}_N(T)=\sum_i^m T_i N_i \tag{2.2.3}$$

представляет собой общее значение величины T по совокупности объектов.

Задача квантовой статистики объектов состоит в нахождении распределения N_i по состояниям G_i. В связи с этим рассмотрим среднее число объектов в i-состоянии:

$$D_i = \frac{N_i}{G_i} \tag{2.2.4}$$

и перепишем (2.2.1), (2.2.3) в следующем виде

$$\mathbf{E}(T) = \frac{\sum_i^m T_i D_i G_i}{\sum_i^m D_i G_i}, \quad \sum_i^m D_i G_i = N, \tag{2.2.5}$$

$$\mathbf{E}_N(T) = \sum_i^m T_i D_i G_i . \tag{2.2.6}$$

Из (2.2.5) следует, что величины D_i имеют веса G_i. Введем распределение $p_i = D_i / N$ и окончательно получим среднее

$$\mathbf{E}(T) = \sum_i^m T_i p_i G_i, \quad \sum_i^m p_i G_i = 1 \tag{2.2.7}$$

и общее значение величины T

$$\mathbf{E}_N(T) = N \sum_i^m T_i p_i G_i , \tag{2.2.8}$$

которое пропорционально числу случайных объектов в случае, если T_i не зависит от p_i.

Непрерывными аналогами рассматриваемых средних являются функционалы

$$\mathbf{E}(T) = \frac{\int_G TDdG}{\int_G DdG}, \quad \int_G DdG = N, \tag{2.2.9}$$

$$\mathbf{E}_N(T) = \int_G TDdG, \tag{2.2.10}$$

определенные в области G. Если область охватывает все вероятностное пространство и усреднение производится с распределением p, то формулы (2.2.7) и (2.2.8) примут вид

$$\mathbf{E}(T) = \int TpdG, \quad \int pdG = 1, \tag{2.2.11}$$

$$\mathbf{E}_N(T) = N \int TpdG . \tag{2.2.12}$$

2.3. Статистика Максвелла–Больцмана

Пусть имеется набор из N случайных объектов, квантовые состояния которых равновероятны. Общее количество состояний равняется числу G. Воспользуемся формулой Хартли [77]

$$H(p) = n\log_2 m \tag{2.3.1}$$

для меры информации, определяемой для числа равновероятного распределения состояний одного объекта при n наблюдениях. В рассматриваемой ситуации мера информации для совокупности N объектов имеет аналогичный вид

$$H_N = N\log_2 G\,. \tag{2.3.2}$$

При рассмотрении статистики случайных объектов используем теорию соединений. В таком подходе формула (2.3.2) запишется так [77]:

$$H_N = \log_2 \Delta\Gamma_N\,, \tag{2.3.3}$$

где $\Delta\Gamma_N = G^N$ и G^N есть число размещений из G состояний по N объектам, которое дает число возможных макросостояний $\Delta\Gamma_N$. Причем в вычислениях рассматриваются размещения с повторениями, то есть одно и то же равновозможное состояние может реализовываться несколько раз в объектах, записанных в каком-либо порядке. Мера информации (2.3.3) совпадает с мерой Больцмана в статистической физике [1], поэтому будем называть ее мерой Больцмана–Хартли.

Пусть совокупность различимых объектов $N = \{N_1,\ldots,N_m\}$ имеет квантовые состояния $G = \{G_1,\ldots,G_m\}$. Вычислим энтропию по формуле Больцмана–Хартли, определив значение $\Delta\Gamma_N$. Для этого распределим объекты N_i по состояниям G_i так, чтобы имеющие одно состояние были тождественны между собой и отличны от объектов, имеющих другие состояния. Тогда, согласно комбинаторным вычислениям для статистики Больцмана, число возможных макросостояний равняется [34]

$$\Delta\Gamma_N = \prod_i^m \Delta\Gamma_{N_i} = \prod_i^m \frac{1}{N_i!} G_i^{N_i}\,, \tag{2.3.4}$$

где $G_i^{N_i}$ есть число возможных размещений, величина $N_i!$ есть в теории соединений число перестановок из N_i объектов, а произведение чисел $\Delta\Gamma_{N_i}$ означает статистическую независимость для совокупности объектов.

Подставляя (2.3.4) в меру информации Больцмана–Хартли (2.3.3) и используя формулу Стирлинга $N_i! \approx \left(N_i/e\right)^{N_i}$, получим квантовую энтропию Максвелла–Больцмана

$$H_N = -\sum_i^m \left(\log_2 \frac{N_i}{G_i}\right) N_i \,. \tag{2.3.5}$$

В случае распределений D_i и p_i из (2.3.5) вытекают выражения

$$H_N(D) = -\sum_i^m \left(\log_2 D_i\right) D_i G_i \,, \tag{2.3.6}$$

$$H_N(p) = -N\sum_i^m \left(\log_2 p_i\right) p_i G_i \,, \tag{2.3.7}$$

где число объектов и нормировка

$$\sum_i^m D_i G_i = N \,, \quad \sum_i^m p_i G_i = 1 \,. \tag{2.3.8}$$

Энтропия есть взвешенное среднее

$$H(p) = \frac{H_N(p)}{N} = -\sum_i^m \left(\log_2 p_i\right) p_i G_i \tag{2.3.9}$$

и определяется с точностью до постоянной.

Если веса имеют одинаковые значения $G_i = 1$, то из (2.3.9) вытекает традиционная мера информации Шеннона–Винера

$$H(p) = -\sum_i^m \left(\log_2 p_i\right) p_i , \quad \sum_i^m p_i = 1 \tag{2.3.10}$$

с нормированным распределением. При равновозможном распределении $p_i = 1/G$ из (2.3.9) следует мера информации Больцмана–Хартли

$$H_N(p) = N \log_2 G , \quad G = \sum_i^m G_i \,. \tag{2.3.11}$$

Далее рассмотрим экстремальные свойства квантовой энтропии (2.3.6) при условии сохранения числа объектов и общего значения (2.2.7) величины T. Согласно вариационному принципу, исследуем безусловный экстремум функционала

$$L = -\sum_i^m \left(\log_2 D_i\right) D_i G_i + \tau \sum_i^m T_i D_i G_i + \alpha' \sum_i^m D_i G_i, \qquad (2.3.12)$$

для чего введем неопределенные множители Лагранжа τ и α'.

Из условия

$$\delta L = -\sum \left[\delta D_i \left(\log_2 D_i + \frac{1}{\ln 2} - \tau T_i - \alpha' \right) G_i \right] = 0 \qquad (2.3.13)$$

получим распределение

$$D_i = 2^{\tau T_i + \alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{\ln 2} + \alpha', \qquad (2.3.14)$$

подстановка которого в (2.3.8) дает число случайных объектов

$$N = \sum_i^m 2^{\tau T_i + \alpha} G_i. \qquad (2.3.15)$$

Тогда распределение имеет окончательный вид

$$D_i = N \frac{2^{\tau T_i}}{\sum_i^m 2^{\tau T_i} G_i}, \qquad (2.3.16)$$

где веса G_i равняются кратности состояния случайной величины T_i.

Экстремальное значение квантовой энтропии и ее дифференциал равняются

$$H_N(D) = -\tau \mathbf{E}_N(T) - \alpha N, \qquad (2.3.17)$$

$$dH_N(D) = -\tau \ d\mathbf{E}_N(T) - \alpha \ dN, \qquad (2.3.18)$$

где учтено равенство

$$\mathbf{E}_N(T) d\tau + N d\alpha = 0. \qquad (2.3.19)$$

Распределение (2.3.16) максимизирует квантовую энтропию, так как справедливо неравенство:

$$\delta^2 L = -\frac{1}{\ln 2}\sum_i^m \frac{\left(\delta D_i\right)^2}{D_i} G_i \le 0 . \qquad (2.3.20)$$

В заключение рассмотрим некоторые статистические свойства исследуемых величин.

Так число возможных макросостояний $\Delta\Gamma_N$ имеет для рассматриваемой статистики прозрачный математический смысл. Выразим квантовую энтропию Шеннона–Винера

$$H\left(D\right) = -\log_2 N\left(D\right) \qquad (2.3.21)$$

в зависимости от взвешенного среднего геометрического

$$N\left(D\right) = 2^{\frac{\sum_i^m \left(\log_2 N_i/G_i\right) N_i}{\sum_i^m N_i}} = 2^{\frac{\sum_i^m \left(\log_2 D_i\right) D_i G_i}{\sum_i^m D_i G_i}} , \qquad (2.3.22)$$

тогда число возможных макросостояний обратно пропорционально взвешенному среднему геометрическому распределения D, то есть выполняется равенство $\Delta\Gamma_N = 1/N\left(D\right)$. В частном случае, если $N_i = 1$, то для $\Delta\Gamma_N$ следует обычное среднее геометрическое для величины G_i

$$N\left(G\right) = \sqrt[m]{\prod_i^m G_i} . \qquad (2.3.23)$$

С другой стороны, использование величины

$$p\left(N_1,\ldots,N_m\right) = \prod_i^m \frac{N!}{G^{N_i}} \Delta\Gamma_{N_i} = \prod_i^m \frac{N!}{N_i!}\left(\frac{G_i}{G}\right)^{N_i} , \qquad (2.3.24)$$

где $N!/N_i!$ есть в теории соединений число перестановок из N_i объектов с повторениями, дает вероятностную трактовку формулы Больцмана–Хартли для информации, что было показано впервые Больцманом [1] для статистической физики. Вместо (2.3.3) имеем формулу

$$H_N\left(N_1,\ldots,N_m\right) = \log_2 p\left(N_1,\ldots,N_m\right), \qquad (2.3.25)$$

где для полиномиального распределения вероятностей выполняется условие нормировки:

$$\sum_{N_1+\ldots+N_m=N} p\left(N_1,\ldots,N_m\right)=\left(\sum_i^m \frac{G_i}{G}\right)^N=1. \qquad (2.3.26)$$

Введение случайной энтропии Больцмана–Хартли

$$H_N\left(N_1,\ldots,N_m\right)=-\log_2 p\left(N_1,\ldots,N_m\right) \qquad (2.3.27)$$

и ее усреднение приводит к новому определению информации

$$\begin{aligned}\bar{H}_N &= \mathbf{E}_N\left[H_N\left(N_1,\ldots,N_m\right)\right]= \\ &=-\sum_{N_1+\ldots+N_m=N}\left[\log_2 p\left(N_1,\ldots,N_m\right)\right] p\left(N_1,\ldots,N_m\right).\end{aligned} \qquad (2.3.28)$$

Среднее значение произвольной случайной величины $T\left(N_1,\ldots,N_m\right)$ дается равенством

$$\bar{T}_N=\mathbf{E}_N\left[T\left(N_1,\ldots,N_m\right)\right]=\sum_{N_1+\ldots+N_m=N} T\left(N_1,\ldots,N_m\right) p\left(N_1,\ldots,N_m\right). \qquad (2.3.29)$$

2.4. Статистика Ферми–Дирака

Современная статистика использует принцип неразличимости объектов (частиц). Этот квантомеханический принцип означает, что перестановка объектов не дает нового квантового состояния. Рассмотрим статистику Ферми–Дирака, в которой выполняется принцип Паули. Вследствие этого принципа ни одно состояние не может содержать более одного объекта. Число возможных макросостояний совокупности из N неразличимых объектов [34]

$$\Delta\Gamma_N=\prod_i^m \Delta\Gamma_{N_i}=\frac{G_i!}{N_i!\left(G_i-N_i\right)!} \qquad (2.4.1)$$

равняется произведению чисел сочетаний из G_i состояний по N_i объектам.

Логарифмическая мера Больцмана–Хартли

$$H_N=\log_2 \Delta\Gamma_N \qquad (2.4.2)$$

дает при больших N_i следующее значение квантовой энтропии Ферми–Дирака:

$$H_N = -\sum_i^m \Big[N_i \log_2 N_i - G_i \log_2 G_i + \left(G_i - N_i\right) \log_2 \left(G_i - N_i\right) \Big] =$$

$$= -\sum_i^m \left[N_i \log_2 \frac{N_i}{G_i - N_i} - G_i \log_2 \left(1 + \frac{N_i}{G_i - N_i} \right) \right]. \qquad (2.4.3)$$

Переходя к распределениям D_i и p_i, соответственно, получим функционалы

$$H_N(D) = -\sum_i^m \Big[D_i \log_2 D_i + \left(1 - D_i\right) \log_2 \left(1 - D_i\right) \Big] G_i, \qquad (2.4.4)$$

$$H_N(p) = -N \sum_i^m \left[p_i \log_2 p_i + \left(\frac{1}{N} - p_i \right) \log_2 \left(1 - N p_i\right) \right] G_i, \qquad (2.4.5)$$

где

$$\sum_i^m D_i G_i = N, \qquad \sum_i^m p_i G_i = 1. \qquad (2.4.6)$$

Отметим, что взвешенное среднее с точностью до постоянной

$$H(p) = \frac{H_N(p)}{N} = -\sum_i^m \left[p_i \log_2 p_i + \frac{1}{N} \left(1 - N p_i\right) \log_2 \left(1 - N p_i\right) \right] G_i \qquad (2.4.7)$$

зависит от числа объектов N. Причем справедливо условие $N_i < G_i$ (или $Np_i < 1$).

Решение вариационной задачи на экстремум квантовой энтропии Ферми–Дирака соответствует нахождению наиболее вероятного распределения. Учитывая дополнительные условия сохранения среднего и числа объектов

$$\mathbf{E}_N(T) = \sum_i^m T_i D_i G_i, \qquad N = \sum_i^m D_i G_i \qquad (2.4.8)$$

и приравнивая нулю первую вариацию функционала

$$L = -\sum_i^m \Big[D_i \log_2 D_i + \left(1 - D_i\right) \log_2 \left(1 - D_i\right) \Big] G_i + \tau \sum_i^m T_i D_i G_i + \alpha \sum_i^m D_i G_i, \qquad (2.4.9)$$

получим равенство:

$$\log_2 D_i - \log_2 \left(1 - D_i\right) - \tau T_i - \alpha = 0. \qquad (2.4.10)$$

Из (2.4.10) вытекает распределение

$$D_i = \frac{1}{2^{-\tau T_i - \alpha} + 1}, \qquad (2.4.11)$$

с помощью которого вычисляется число объектов и ненормированное среднее значение

$$N = \sum_i^m \frac{G_i}{2^{-\tau T_i - \alpha} + 1}, \qquad \mathbf{E}_N\left(T\right) = \sum_i^m \frac{T_i G_i}{2^{-\tau T_i - \alpha} + 1}. \qquad (2.4.12)$$

Параметр τ в (2.4.11) меняется в пределах допустимых значений, а значение α определяется из соотношения (2.4.12).

Рассмотрим вторую вариацию функционала (2.4.9) и получим неравенство

$$\delta^2 L = -\frac{1}{\ln 2} \sum_i^m \frac{\left(\delta D_i\right)^2}{D_i\left(1 - D_i\right)} G_i \le 0, \qquad (2.4.13)$$

означающее, что экстремум квантовой энтропии достигается в максимуме.

Подставив распределение (2.4.11) в (2.4.4), получим максимальное значение энтропии

$$H_N\left(D\right) = -\tau \mathbf{E}_N\left(T\right) - \alpha N + \tau\Omega. \qquad (2.4.14)$$

Здесь вводится выражение для суммы

$$\tau\Omega = -\sum_i^m \left[\log_2\left(1 + 2^{\tau T_i + \alpha}\right)\right] G_i, \qquad (2.4.15)$$

которое имеет следующие свойства

$$\frac{\partial\left(\tau\Omega\right)}{\partial\tau} = \sum_i^m T_i D_i G_i = \mathbf{E}_N\left(T\right), \qquad (2.4.16)$$

$$\frac{\partial\left(\tau\Omega\right)}{\partial\alpha} = \sum_i^m D_i G_i = N. \qquad (2.4.17)$$

Дифференцируем энтропию (2.4.14) и, используя (2.4.16) и (2.4.17), получим соотношение

$$dH_N\left(D\right) = -\tau d\mathbf{E}_N\left(T\right) - \alpha dN, \qquad (2.4.18)$$

которое имеет фундаментальное значение в статистической термодинамике, о чем пойдет речь в физических приложениях разд. 2.9.

2.5. Статистика Бозе–Эйнштейна

Рассмотрим статистику Бозе–Эйнштейна, в которой число возможных макросостояний совокупности из N неразличимых объектов [34]

$$\Delta\Gamma_N = \prod_i^m \Delta\Gamma_{N_i} = \frac{(G_i + N_i - 1)!}{N_i!(G_i - 1)!} \qquad (2.5.1)$$

вытекает из условия, что одно состояние может содержать любое количество объектов. Величина (2.5.1) есть произведение чисел сочетаний из G_i состояний по N_i объектам с повторениями.

Подстановка в логарифмическую меру Больцмана–Хартли (2.3.3) дает при больших N_i квантовую энтропию Бозе–Эйнштейна

$$H_N = -\sum_i^m \left[N_i \log_2 N_i + G_i \log_2 G_i - (G_i + N_i)\log_2 (G_i + N_i) \right] =$$

$$= -\sum_i^m \left[N_i \log_2 \frac{N_i}{G_i + N_i} + G_i \log_2 \left(1 - \frac{N_i}{G_i + N_i} \right) \right], \qquad (2.5.2)$$

которая для распределений D_i и p_i принимает вид

$$H_N(D) = -\sum_i^m \left[D_i \log_2 D_i - (1 + D_i)\log_2 (1 + D_i) \right] G_i, \qquad (2.5.3)$$

$$H_N(p) = -N\sum_i^m \left[p_i \log_2 p_i - \left(\frac{1}{N} + p_i \right) \log_2 (1 + Np_i) \right] G_i, \qquad (2.5.4)$$

где число объектов и нормировка

$$\sum_i^m D_i G_i = N, \qquad \sum_i^m p_i G_i = 1. \qquad (2.5.5)$$

Взвешенное среднее

$$H(p) = \frac{H_N(p)}{N} = -\sum_i^m \left[p_i \log_2 p_i - \frac{1}{N}(1 + Np_i)\log_2 (1 + Np_i) \right] G_i \qquad (2.5.6)$$

зависит также, как и в статистике Ферми–Дирака, от числа объектов N и определяется с точностью до постоянной.

Далее находим экстремум квантовой энтропии Бозе–Эйнштейна при дополнительных условиях сохранения среднего и числа объектов

$$\mathbf{E}_N(T) = \sum_i^m T_i D_i G_i, \qquad N = \sum_i^m D_i G_i . \tag{2.5.7}$$

Тогда варьируем функционал

$$L = -\sum_i^m \left[D_i \log_2 D_i - \left(1 + D_i\right) \log_2 \left(1 + D_i\right) \right] G_i +$$
$$+ \tau \sum_i^m T_i D_i G_i + \alpha \sum_i^m D_i G_i \tag{2.5.8}$$

и из условия

$$\delta L = -\sum_i^m \delta D_i \left[\log_2 D_i - \log_2 \left(1 + D_i\right) - \tau T_i - \alpha \right] G_i \tag{2.5.9}$$

получим распределение

$$D_i = \frac{1}{2^{-\tau T_i - \alpha} - 1} \tag{2.5.10}$$

и, соответственно, число объектов и среднее значение

$$N = \sum_i^m \frac{G_i}{2^{-\tau T_i - \alpha} - 1}, \qquad \mathbf{E}_N(T) = \sum_i^m \frac{T_i G_i}{2^{-\tau T_i - \alpha} - 1} . \tag{2.5.11}$$

Множитель Лагранжа τ меняется в допустимых пределах, α находится из (2.5.11).

Экстремальное значение дается выражением

$$H_N(D) = -\tau \mathbf{E}_N(T) - \alpha N + \tau \Omega , \tag{2.5.12}$$

где величина

$$\tau \Omega = \sum_i^m \left[\log_2 \left(1 - 2^{\tau T_i + \alpha}\right) \right] G_i \tag{2.5.13}$$

имеет свойства (2.4.16) и (2.4.17), которые были определены для статистики Ферми–Дирака. Аналогично вытекает дифференциальное соотношение:

$$dH_N(D) = -\tau d\,\mathbf{E}_N(T) - \alpha dN \tag{2.5.14}$$

для максимального значения квантовой энтропии, так как справедливо следующее неравенство

$$\delta^2 L = -\frac{1}{\ln 2}\sum_i^m \frac{(\delta D_i)^2}{D_i(1+D_i)} G_i \le 0\,. \tag{2.5.15}$$

В заключение отметим, что числа возможных макросостояний (2.4.1) и (2.5.1) для квантовых статистик при $N_i << G_i$ переходят в выражение (2.3.4) для классической статистики Максвелла–Больцмана, так как, соответственно, в них используются приближенные значения $G_i! \approx (G_i - N_i)\ !G_i^{N_i}$ и $(G_i + N_i - 1)\ ! \approx (G_i - 1)\ !G_i^{N_i}$.

2.6. Квазиклассическая статистика

В статистике Бозе–Эйнштейна имеется предельный случай, когда выполняется условие $N_i >> G_i$. Число возможных макросостояний совокупности из N объектов в этом приближении равняется [34]

$$\Delta\Gamma_N = \prod_i^m \Delta\Gamma_{N_i} = \prod_i^m \frac{N_i^{G_i - 1}}{(G_i - 1)\ !}. \tag{2.6.1}$$

При выводе выражения (2.6.1) используется приближенное значение $(G_i + N_i - 1)\ ! \approx N_i^{G_i - 1} N_i!$.

Из логарифмической меры Больцмана–Хартли (2.3.3) вытекает квантовая энтропия в следующем виде

$$H_N = \sum_i^m \left(\log_2 \frac{N_i}{G_i}\right) G_i\,. \tag{2.6.2}$$

Используя распределение $D_i = N_i / G_i$, получим функционалы

$$H_N(D) = \sum_i^m (\log_2 D_i) G_i\,, \tag{2.6.3}$$

$$H(D) = \frac{H_N(D)}{N} = \frac{\sum_i^m (\log_2 D_i) G_i}{\sum_i^m D_i G_i}, \quad N = \sum_i^m D_i G_i\,, \tag{2.6.4}$$

а для $p_i = D_i / N$ имеем энтропию

$$H(p) = \frac{H_N(p)}{N} = \frac{1}{N}\sum_i^m \left(\log_2 p_i\right) G_i, \quad \sum_i^m p_i G_i = 1, \tag{2.6.5}$$

которая зависит от N и определяется с точностью до постоянной.

Точное значение взвешенного среднего по весам G_i равняется

$$H(D) = \frac{H_N(D)}{G} = \frac{\sum_i^m \left(\log_2 D_i\right) G_i}{\sum_i^m G_i}, \quad G = \sum_i^m G_i . \tag{2.6.6}$$

Рассмотрим экстремальные свойства квазиклассической энтропии (2.6.3) при дополнительных условиях сохранения среднего и числа объектов

$$\mathbf{E}_N(T) = \sum_i^m T_i D_i G_i, \qquad N = \sum_i^m D_i G_i . \tag{2.6.7}$$

Приравнивая нулю первую вариацию функционала

$$L = \sum_i^m \left(\log_2 D_i\right) G_i + \tau \sum_i^m T_i D_i G_i + \alpha \sum_i^m D_i G_i , \tag{2.6.8}$$

получим соотношение

$$\delta L = \sum_i^m \delta D_i \left[\frac{1}{D_i \ln 2} + \tau T_i + \alpha \right] G_i , \tag{2.6.9}$$

из которого следует распределение

$$D_i = -\frac{1}{\ln 2\left(\tau T_i + \alpha\right)}, \qquad \tau < 0 . \tag{2.6.10}$$

Подставим (2.6.10) в (2.6.3) и (2.6.7) и получим экстремальные значения

$$H_N(D) = -\sum_i^m \left[\log_2\left(-\tau T_i - \alpha\right)\right] G_i + \text{const} , \tag{2.6.11}$$

$$\mathbf{E}_N(T) = -\frac{1}{\ln 2}\sum_i^m \left(\frac{T_i}{\tau T_i + \alpha}\right) G_i, \;\; N = -\frac{1}{\ln 2}\sum_i^m \left(\frac{1}{\tau T_i + \alpha}\right) G_i . \tag{2.6.12}$$

Причем, экстремум квазиклассической энтропии соответствует максимуму, так как справедливо неравенство

$$\delta^2 L = -\frac{1}{\ln 2}\sum_i^m \frac{\left(\delta D_i\right)^2}{D_i} G_i \le 0\,. \qquad (2.6.13)$$

Дифференцируя (2.6.11) по τ и α, окончательно имеем соотношение

$$dH_N\left(D\right) = -\tau d\mathbf{E}_N\left(T\right) - \alpha dN\,. \qquad (2.6.14)$$

Интересный случай следует, если положить $\alpha = 0$. Тогда из (2.6.11) и (2.6.12) вытекают соотношения

$$H_N\left(D\right) = -k\sum_i^m \ln\left(-\tau T_i\right) G_i\,, \qquad (2.6.15)$$

$$\mathbf{E}_N\left(T\right) = \frac{\tau}{\ln 2}\sum_i^m G_i, \quad N = \frac{1}{\ln 2}\sum_i^m \left(\tau T_i\right) G_i\,. \qquad (2.6.16)$$

2.7. Квантовые информации различия и меры неточности

Приведем строгое вероятностно-статистическое обоснование квантовых информаций различия при наблюдениях за состоянием совокупности объектов $N_1 = \left\{N_{11}, \ldots, N_{1m}\right\}$ относительно $N_2 = \left\{N_{21}, \ldots, N_{2m}\right\}$, которое было дано впервые в работах автора [17, 130].

Рассматривая вначале распределения N_{1i} и N_{2i} по состояниям G_i, как независимые, вычислим информацию различия в виде разности квантовых энтропий

$$\left(I_{12}\right)_{N_1} = -\left(H_{N_1} - H_{N_2}\right) = \log_2 \frac{\Delta\Gamma_{N_2}}{\Delta\Gamma_{N_1}}\,, \qquad (2.7.1)$$

где

$$\Delta\Gamma_{N_1} = \prod_i^m \Delta\Gamma_{N_{1i}}\,,\ \sum_i^m N_{1i} = N_1, \qquad (2.7.2)$$

$$\Delta\Gamma_{N_2} = \prod_i^m \Delta\Gamma_{N_{2i}}\,,\ \sum_i^m N_{2i} = N_2\,. \qquad (2.7.3)$$

Это обоснованно соответствует определению информации в виде негэнтропии по Бриллюэну. Однако учет различия между двумя группами частиц, характеризующегося числами $K_i = N_{1i} - N_{2i}$ и $K = N_1 - N_2$ дает дополнительное слагаемое $\log_2 \left(\Delta\Gamma_{N_2} \big/ \Delta\Gamma_{N_2 - K} \right)$. В итоге это приводит к основному соотношению

$$\left(I_{12} \right)_{N_1} = \log_2 \frac{\Delta\Gamma_{N_2}}{\Delta\Gamma_{N_1}} + \log_2 \frac{\Delta\Gamma_{N_2}}{\Delta\Gamma_{N_2 - K}}. \tag{2.7.4}$$

Величина $\Delta\Gamma_{N_2 - K}$ для рассматриваемых объектов запишется согласно (2.3.4), (2.4.1), (2.5.1) и (2.6.1) следующим образом:

$$\Delta\Gamma_{N_2 - K} = \prod_i^m \Delta\Gamma_{N_{2i} - K_i} = \prod_i^m \frac{G_i^{N_{2i} - K_i}}{\left(N_{2i} - K_i \right)\,!}, \tag{2.7.5}$$

$$\Delta\Gamma_{N_2 - K} = \prod_i^m \Delta\Gamma_{N_{2i} - K_i} = \prod_i^m \frac{G_i\,!}{\left(N_{2i} - K_i \right)! \left[G_i - \left(N_{2i} - K_i \right) \right]!}, \tag{2.7.6}$$

$$\Delta\Gamma_{N_2 - K} = \prod_i^m \Delta\Gamma_{N_{2i} - K_i} = \prod_i^m \frac{\left[G_i + \left(N_{2i} - K_i \right) - 1 \right]!}{\left(G_i - 1 \right)! \left(N_{2i} - K_i \right)!}, \tag{2.7.7}$$

$$\Delta\Gamma_{N_2 - K} = \prod_i^m \Delta\Gamma_{N_{2i} - K_i} = \prod_i^m \frac{\left(N_{2i} - K_i \right)^{G_i}}{\left(G_i - 1 \right)!}. \tag{2.7.8}$$

Далее, используя формулу Стирлинга и приближенное значение

$$\frac{N_{2i}\,!}{\left(N_{2i} - K_i \right)!} \approx N_{2i}^{K_i} \tag{2.7.9}$$

при $K_i << N_{2i}$, получим выражения квантовых информаций различия, расхождений и мер неточности для различных статистик:

а) Максвелла–Больцмана

$$\left(I_{12} \right)_{N_1} = \sum_i^m N_{1i} \log_2 \frac{N_{1i}}{N_{2i}}, \tag{2.7.10}$$

$$J_{12} = \sum_i^m \left(N_{1i} - N_{2i} \right) \log_2 \frac{N_{1i}}{N_{2i}}, \tag{2.7.11}$$

$$\left(H_{12}\right)_{N_1} = -\sum_i^m N_{1i} \log_2 N_{2i}\,, \qquad (2.7.12)$$

б) Ферми–Дирака

$$\left(I_{12}\right)_{N_1} = \sum_i^m \left[N_{1i} \log_2 \frac{N_{1i}}{N_{2i}} + \left(G_i - N_{1i}\right) \log_2 \frac{G_i - N_{1i}}{G_i - N_{2i}} \right], \qquad (2.7.13)$$

$$J_{12} = \sum_i^m \left(N_{1i} - N_{2i}\right) \log_2 \frac{N_{1i} \big/ \left(G_i - N_{1i}\right)}{N_{2i} \big/ \left(G_i - N_{2i}\right)}\,, \qquad (2.7.14)$$

$$\left(H_{12}\right)_{N_1} = -\sum_i^m \left[N_{1i} \log_2 N_{2i} + \left(G_i - N_{1i}\right) \log_2 \left(G_i - N_{2i}\right) \right], \qquad (2.7.15)$$

в) Бозе–Энштейна

$$\left(I_{12}\right)_{N_1} = \sum_i^m \left[N_{1i} \log_2 \frac{N_{1i}}{N_{2i}} - \left(G_i + N_{1i}\right) \log_2 \frac{G_i + N_{1i}}{G_i + N_{2i}} \right], \qquad (2.7.16)$$

$$J_{12} = \sum_i^m \left(N_{1i} - N_{2i}\right) \log_2 \frac{N_{1i} \big/ \left(G_i + N_{1i}\right)}{N_{2i} \big/ \left(G_i + N_{2i}\right)}\,, \qquad (2.7.17)$$

$$\left(H_{12}\right)_{N_1} = -\sum_i^m \left[N_{1i} \log_2 N_{2i} - \left(G_i + N_{1i}\right) \log_2 \left(G_i + N_{2i}\right) \right], \qquad (2.7.18)$$

г) квазиклассической

$$\left(I_{12}\right)_{N_1} = \sum_i^m \left(\log_2 \frac{N_{2i}}{N_{1i}} \right) G_i\,, \qquad (2.7.19)$$

$$J_{12} = 0\,,\ H_{N_2} = \sum_i^m \left(\log_2 N_{2i}\right) G_i\,, \qquad (2.7.20)$$

где опущены константы.

Если перейти к распределениям $D_{1i} = N_{1i} \big/ G_i$ и $D_{2i} = N_{2i} \big/ G_i$, то из (2.7.10) – (2.7.20) вытекают функционалы:

$$I_{N_1}\left(D_1 : D_2\right) = \sum_i^m \left(D_{1i} \log_2 \frac{D_{1i}}{D_{2i}} \right) G_i\,, \qquad (2.7.21)$$

$$J\left(D_1:D_2\right)=\sum_i^m\left[\left(D_{1i}-D_{2i}\right)\log_2\frac{D_{1i}}{D_{2i}}\right]G_i\,, \qquad (2.7.22)$$

$$H_{N_1}\left(D_1:D_2\right)=-\sum_i^m\left(D_{1i}\log_2 D_{2i}\right)G_i\,, \qquad (2.7.23)$$

$$I_{N_1}\left(D_1:D_2\right)=\sum_i^m\left[D_{1i}\log_2\frac{D_{1i}}{D_{2i}}+\left(1-D_{1i}\right)\log_2\frac{1-D_{1i}}{1-D_{2i}}\right]G_i\,, \qquad (2.7.24)$$

$$J\left(D_1:D_2\right)=\sum_i^m\left[\left(D_{1i}-D_{2i}\right)\log_2\frac{D_{1i}/\left(1-D_{1i}\right)}{D_{2i}/\left(1-D_{2i}\right)}\right]G_i\,, \qquad (2.7.25)$$

$$I_{N_1}\left(D_1:D_2\right)=\sum_i^m\left[D_{1i}\log_2\frac{D_{1i}}{D_{2i}}+\left(1-D_{1i}\right)\log_2\frac{1-D_{1i}}{1-D_{2i}}\right]G_i\,, \qquad (2.7.26)$$

$$I_{N_1}\left(D_1:D_2\right)=\sum_i^m\left[D_{1i}\log_2\frac{D_{1i}}{D_{2i}}-\left(1+D_{1i}\right)\log_2\frac{1+D_{1i}}{1+D_{2i}}\right]G_i\,, \qquad (2.7.27)$$

$$J\left(D_1:D_2\right)=\sum_i^m\left[\left(D_{1i}-D_{2i}\right)\log_2\frac{D_{1i}/\left(1+D_{1i}\right)}{D_{2i}/\left(1+D_{2i}\right)}\right]G_i\,, \qquad (2.7.28)$$

$$H_{N_1}\left(D_1:D_2\right)=-\sum_i^m\left[D_{1i}\log_2 D_{2i}-\left(1+D_{1i}\right)\log_2\left(1+D_{2i}\right)\right]G_i\,, \qquad (2.7.29)$$

$$I_{N_1}\left(D_1:D_2\right)=\sum_i^m\left(\log_2\frac{D_{2i}}{D_{1i}}\right)G_i\,, \qquad (2.7.30)$$

$$J\left(D_1:D_2\right)=0,\ I_{N_1}\left(D_1:D_2\right)=\sum_i^m\left(\log_2\frac{D_{2i}}{D_{1i}}\right)G_i\,, \qquad (2.7.31)$$

где мера неточности равняется, согласно (1.8.58), выражению $H_{N_1}\left(D_1:D_2\right)=H_{N_1}\left(D_1\right)+I_{N_1}\left(D_1:D_2\right)$.

Перейдем к исследованию экстремальных свойств информаций различия при сохранении числа случайных объектов N_1, среднего значения $\mathbf{E}_{N_1}\left(T\right)=\sum_i^m T_i D_{1i} G_i$ и фиксированном числе N_2. Согласно вариационному принципу находим экстремумы соответствующих функционалов, из которых вытекают равенства

$$D_{1i} = 2^{\tau T_i + \alpha} D_{2i}, \tag{2.7.32}$$

$$\frac{D_{1i}}{1 + D_{1i}} = 2^{\tau T_i + \alpha} \frac{D_{2i}}{1 + D_{2i}}, \tag{2.7.33}$$

$$\frac{D_{1i}}{1 - D_{1i}} = 2^{\tau T_i + \alpha} \frac{D_{2i}}{1 - D_{2i}}, \tag{2.7.34}$$

$$D_{1i} = -\frac{1}{(\tau T_i + \alpha)\ln 2} D_{2i} \tag{2.7.35}$$

для определения распределений D_{1i}. Подставляя эти распределения в квантовые информации различия, получим экстремальное значение

$$I_{N_1}(D_1 : D_2) = \tau \mathbf{E}_{N_1}(T) + \alpha N_1 + \tau\Omega, \tag{2.7.36}$$

где величина $\Omega = 0$ для квазиклассической и классической статистик Максвелла–Больцмана. Для статистик Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна имеем, соответственно, выражения

$$\tau\Omega = \sum_i^m \left(\log_2 \frac{D_{1i}}{D_{2i} 2^{\tau T_i + \alpha}} \right) G_i, \tag{2.7.37}$$

$$\tau\Omega = -\sum_i^m \left(\log_2 \frac{D_{1i}}{D_{2i} 2^{\tau T_i + \alpha}} \right) G_i. \tag{2.7.38}$$

Экстремум информаций различия различных статистик соответствует их минимуму, что легко доказывается.

В заключение сравним результаты различных статистик. Так на рис.2.1 представлены зависимости квантовой энтропии $H(p)$, информации различия $I(p:u)$ и меры неточности $H(p:u)$ от распределения для статистики Бозе–Эйнштейна при значениях $N_1 = N_2 = N = 2$, $G_1 = G_2 = 1$, $m = 2$, $p_1 = p$ и а) $u_1 = 1/3$, б) $u_1 = 1/2$.

При вычислении энтропии Бозе–Эйнштейна и меры неточности в выражениях (2.5.6) и (2.7.29) уточняем значение постоянной таким образом, чтобы $H(0,1) = H(1,0) = 0$. В итоге имеем выражения

$$H(p) = -\sum_i^m \left[p_i \log_2 p_i - \frac{1}{N}(1+Np_i)\log_2(1+Np_i) \right] - \frac{(1+N)\log_2(1+N)}{N}, \qquad (2.7.39)$$

$$H(p:u) = -\sum_i^m \left[p_i \log_2 u_i - \frac{1}{N}(1+Np_i)\log_2(1+Nu_i) \right] - \frac{(1+N)\log_2(1+N)}{N}, \qquad (2.7.40)$$

$$I(p:u) = -\sum_i^m \left[p_i \log_2 \frac{p_i}{u_i} - \frac{1}{N}(1+Np_i)\log_2 \frac{(1+Np_i)}{(1+Nu_i)} \right]. \qquad (2.7.41)$$

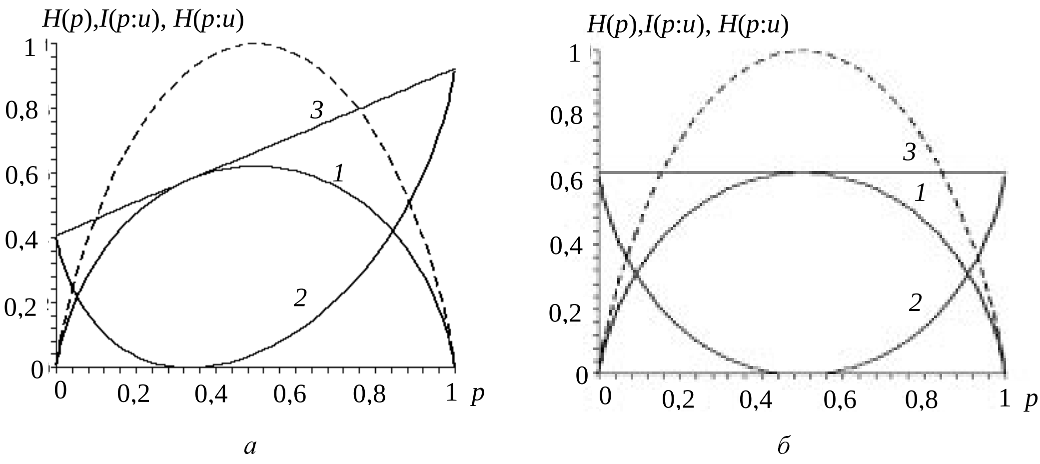

Рис.2.1. Зависимости квантовых функционалов от распределения:
1 – энтропия $H(p)$; *2* – информация различия $I(p:u)$;
3 – мера неточности $H(p:u)$; штриховая линия – энтропия статистики Максвелла–Больцмана

Квантовая энтропия для статистики Максвелла–Больцмана равняется энтропии Шеннона–Винера

$$H(p) = -\sum_i^m (\log_2 p_i)\, p_i \qquad (2.7.42)$$

и изображена на рис.2.1 штриховой линией. Как видно, учет чисто квантовых эффектов приводит к уменьшению максимального значения энтропии, что нарушает условие нормированности энтропии.

2.8. Парастатистика. Метод квантовых состояний Бозе

Рассмотрим статистику объектов, в которой число возможных макросостояний вытекает из условия, что в каждом состоянии может находиться не более r объектов. Этот случай так называемой парастатистики соответствует статистикам Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна при $r=1$ и $r=\infty$.

Используем метод квантовых состояний Бозе, примененный им впервые для исследования статистики фотонов [62]. Пусть $N=\{N_1,\ldots,N_m\}$ – совокупность объектов и $G=\{G_1,\ldots,G_m\}$ есть состояния. Введем новые состояния G_{ik} ($k=0,\ 1,\ \ldots,\ r$), означающие, что в i состоянии находится r объектов. Следовательно, справедливы равенства

$$G_i=\sum_k^r G_{ik}\,, \tag{2.8.1}$$

$$N_i=\sum_k^r kG_{ik}\,. \tag{2.8.2}$$

Метод Бозе состоит в том, что исследуется статистика состояния G_{ik}. Из теории соединений находим число возможных макросостояний для совокупности объектов[62]

$$\Delta\Gamma_N=\prod_i^m\prod_k^r\Delta\Gamma_{G_{ik}}=\prod_i^m\prod_k^r\frac{G_i\,!}{G_{ik}\,!}. \tag{2.8.3}$$

Используем меру информации Больцмана–Хартли

$$H_N=\log_2\Delta\Gamma_N=\log_2\prod_i^m\prod_k^r\frac{G_i\,!}{G_{ik}\,!} \tag{2.8.4}$$

и формулу Стирлинга $G_{ik}\,!\approx\left(G_{ik}/e\right)^{G_{ik}}$. Тогда получим следующий функционал:

$$H_N = -\sum_i^m \left[\sum_k^r G_{ik} \log_2 G_{ik} - G_i \log_2 G_i \right], \qquad (2.8.5)$$

который записывается в эквивалентной формуле так:

$$H_N = -\sum_i^m \sum_k^r G_{ik} \log_2 \frac{G_{ik}}{G_i} = -\sum_i^m \sum_k^r \left(\frac{G_{ik}}{G_i} \log_2 \frac{G_{ik}}{G_i} \right) G_i . \qquad (2.8.6)$$

Для нахождения информации различия воспользуемся основным соотношением (2.7.4), записанным в следующем виде

$$\left(I_{12}\right)_{N_1} = \log_2 \frac{\prod_i^m \prod_k^r \frac{G_i!}{G_{1ik}!}}{\prod_i^m \prod_k^r \frac{G_i!}{G_{2ik}!}} + \log_2 \frac{\prod_i^m \prod_k^r \frac{G_i!}{G_{2ik}!}}{\prod_i^m \prod_k^r \frac{G_i!}{\left(G_{2ik} - K_{ik}\right)\ !}} . \qquad (2.8.7)$$

Здесь числа $K_{ik} = G_{1ik} - G_{2ik}$ характеризуют учет различия между двумя совокупностями состояний, для которых имеем следующие соотношения

$$N_{1i} = \sum_k^r k G_{1ik} \ , \ N_{2i} = \sum_k^r k G_{2ik} \ , \qquad (2.8.8)$$

$$G_i = \sum_k^r G_{1ik} = \sum_k^r G_{2ik} \ , \ N_1 = \sum_i^m N_{1i} \ , \ N_2 = \sum_i^m N_{2i} \ . \qquad (2.8.9)$$

Используем формулу Стирлинга и приближенное соотношение

$$\frac{G_{2ik}!}{\left(G_{2ik} - C_{1ik}\right)\ !} \approx G_{2ik}^{K_{ik}} \qquad (2.8.10)$$

при $K_{ik} << G_{2ik}$ и получим из (2.8.7) квантовую информацию различия

$$\left(I_{12}\right)_{N_1} = \sum_i^m \sum_k^r G_{1ik} \log_2 \frac{G_{1ik}}{G_{2ik}} = \sum_i^m \sum_k^r \left(\frac{G_{1ik}}{G_i} \log_2 \frac{G_{1ik}/G_i}{G_{2ik}/G_i} \right) G_i \qquad (2.8.11)$$

для квантовых состояний Бозе.

Рассмотрим экстремальные свойства функционалов (2.8.6) и (2.8.11). Сначала находим экстремум энтропии (2.8.5) при выполнении дополнительных условий о сохранении ненормированного среднего и числа объектов:

$$\mathbf{E}_N\left(T\right)=\sum_i^m T_i N_i=\sum_i^m\sum_k^r kT_i G_{ik}\,, \tag{2.8.12}$$

$$N=\sum_i^m N_i=\sum_i^m\sum_k^r kG_{ik}\,. \tag{2.8.13}$$

Это соответствует задаче определения наиболее вероятного распределения N_i по состояниям G_i.

Приравнивая нулю первую вариацию функционала

$$L=-\sum_i^m\sum_k^r G_{ik}\log_2\frac{G_{ik}}{G_i}+\tau\sum_i^m\sum_k^r kT_i G_{ik}+\alpha\sum_i^m\sum_k^r kG_{ik} \tag{2.8.14}$$

по переменным G_{ik}

$$\delta L=-\sum_i^m\sum_k^r \delta G_{ik}\left[\log_2 G_{ik}-\tau kT_i-\alpha k\right]=0\,, \tag{2.8.15}$$

получим число состояний

$$G_{ik}=2^{k\left(\tau T_i+\alpha\right)}. \tag{2.8.16}$$

Подстановка данного числа в формулы (2.8.1) и (2.8.2) дает выражения

$$G_i=\sum_k^r 2^{k\left(\tau T_i+\alpha\right)}, \tag{2.8.17}$$

$$N_i=\sum_k^r k2^{k\left(\tau T_i+\alpha\right)}. \tag{2.8.18}$$

Используя (2.8.17) и (2.8.18), получим искомое распределение

$$D_i=\frac{N_i}{G_i}=\frac{\sum_k^r k2^{k\left(\tau T_i+\alpha\right)}}{\sum_k^r 2^{k\left(\tau T_i+\alpha\right)}}. \tag{2.8.19}$$

Экстремальное значение квантовой энтропии (2.8.5) и ее дифференциал имеют следующий вид

$$H_N=-\tau\mathbf{E}_N\left(T\right)-\alpha N+\tau\Omega\,, \tag{2.8.20}$$

$$dH_N = -\tau d\mathbf{E}_N(T) - \alpha dN, \tag{2.8.21}$$

где вводится величина

$$\tau\Omega = \sum_i^m \sum_k^r G_{ik} \log_2 \sum_k^r 2^{k(\tau T_i + \alpha)} = \sum_i^m \left[\log_2 \sum_k^r 2^{k(\tau T_i + \alpha)}\right] G_i, \tag{2.8.22}$$

которая имеет свойства

$$\mathbf{E}_N(T) = \frac{\partial \tau\Omega}{\partial \tau} = \sum_i^m T_i D_i G_i = \frac{\sum_i^m \sum_k^r k T_i 2^{k(\tau T_i + \alpha)} G_i}{\sum_k^r 2^{k(\tau T_i + \alpha)}}, \tag{2.8.23}$$

$$N = \frac{\partial \tau\Omega}{\partial \alpha} = \sum_i^m D_i G_i = \frac{\sum_i^m \sum_k^r k 2^{k(\tau T_i + \alpha)} G_i}{\sum_k^r 2^{k(\tau T_i + \alpha)}}. \tag{2.8.24}$$

При $r = 1$ и $r = \infty$ из (2.8.19) вытекают, соответственно, распределения для квантовых статистик Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна

$$D_i = \frac{1}{2^{-\tau T_i - \alpha} + 1}, \tag{2.8.25}$$

$$D_i = \frac{1}{2^{-\tau T_i - \alpha} - 1}. \tag{2.8.26}$$

Для произвольного значения r имеем распределение для парастатистики [26]

$$D_i = \frac{1}{2^{-\tau T_i - \alpha} - 1} - \frac{r+1}{2^{(r+1)(-\tau T_i - \alpha)} - 1}, \tag{2.8.27}$$

где использовалась формула для конечной суммы

$$\sum_{k=0}^r x^k = \frac{x^{r+1} - 1}{x - 1}. \tag{2.8.28}$$

Далее рассмотрим новый случай парастатистики, для которого в каждом состоянии может находиться не менее s и не более r объектов. Тогда сумма $\sum_{k=0}^r$ заменяется на сумму $\sum_{k=s}^r$ и, проводя вычисления, получим распределение

$$D_i = \frac{N_i}{G_i} = \frac{\sum\limits_{k=s}^{r} k 2^{k(\tau T_i + \alpha)}}{\sum\limits_{k=s}^{r} 2^{k(\tau T_i + \alpha)}} =$$

$$= \frac{1}{2^{-\tau T_i - \alpha} - 1} - \frac{r - s + 1}{2^{(r+1)(-\tau T_i - \alpha)} - 2^{s(-\tau T_i - \alpha)}} \tag{2.8.29}$$

и выражение

$$\tau\Omega = \sum_i^m \left[\log_2 \sum_{k=s}^{r} 2^{k(\tau T_i + \alpha)} \right] G_i =$$

$$= \sum_i^m \left[\log_2 \frac{2^{(r+1)(\tau T_i + \alpha)} - 2^{s(\tau T_i + \alpha)}}{2^{(\tau T_i + \alpha)} - 1} \right] G_i. \tag{2.8.30}$$

При $s = 0$ из (2.8.29) и (2.8.30) вытекают формулы традиционной парастатистики (2.8.19) и (2.8.23). Если $s = r - 1$, то имеем распределение

$$D_i = \frac{N_i}{G_i} = \frac{1}{2^{-\tau T_i - \alpha} - 1} + \frac{2}{2^{(r+1)(-\tau T_i - \alpha)} - 2^{(r-1)(-\tau T_i - \alpha)}}, \tag{2.8.31}$$

также зависящее от одного параметра r, как и при $s = 0$.

Выпишем значения чисел объектов для рассматриваемых случаев:

а) статистика Ферми–Дирака ($k = 0,\ \ 1$)

$$N = \sum_i^m \frac{G_i}{2^{-\tau T_i - \alpha} + 1}; \tag{2.8.32}$$

б) статистика Бозе–Эйнштейна ($k = 0, \ldots, \infty$)

$$N = \sum_i^m \frac{G_i}{2^{-\tau T_i - \alpha} - 1}; \tag{2.8.33}$$

в) парастатистика ($k = 0, \ldots, r$)

$$N = \sum_i^m \left[\frac{1}{2^{-\tau T_i - \alpha} - 1} - \frac{r+1}{2^{(r+1)(-\tau T_i - \alpha)} - 1} \right] G_i; \tag{2.8.34}$$

г) парастатистика ($k = s, \ldots, r$)

$$N = \sum_i^m \left[\frac{1}{2^{-\tau T_i - \alpha} - 1} - \frac{r - s + 1}{2^{(r+1)(-\tau T_i - \alpha)} - 2^{s(-\tau T_i - \alpha)}} \right] G_i \; ; \qquad (2.8.35)$$

д) парастатистика ($k = r - 1, r$)

$$N = \sum_i^m \left[\frac{1}{2^{-\tau T_i - \alpha} - 1} - \frac{2}{2^{(r+1)(-\tau T_i - \alpha)} - 2^{(r-1)(-\tau T_i - \alpha)}} \right] G_i \, . \qquad (2.8.36)$$

Наконец находим экстремум информации различия (2.8.11) при заданности следующих значений

$$\mathbf{E}_{N_1}(T) = \sum_i^m T_i N_{1i} = \sum_i^m \sum_k^r k T_i G_{1ik} \, , \qquad (2.8.37)$$

$$N_1 = \sum_i^m N_{1i} = \sum_i^m \sum_k^r k G_{1ik} \, . \qquad (2.8.38)$$

Используя вариационный метод, окончательно получим числа состояний

$$G_{1ik} = 2^{k(\tau T_i + \alpha)} G_{2ik} \, , \qquad (2.8.39)$$

$$G_i = \sum_k^r 2^{k(\tau T_i + \alpha)} G_{2ik} \, , \qquad (2.8.40)$$

значения чисел объектов

$$N_{1i} = \sum_k^r k 2^{k(\tau T_i + \alpha)} G_{2ik} \qquad (2.8.41)$$

и искомое распределение

$$D_{1i} = \frac{N_{1i}}{G_i} = \frac{\sum_k^r k 2^{k(\tau T_i + \alpha)} G_{2ik}}{\sum_k^r 2^{k(\tau T_i + \alpha)} G_{2ik}} \, , \qquad (2.8.42)$$

которое для различных значений r будет соответствовать той или иной рассматриваемой статистике.

2.9. Приложения квантовых мер

Пусть случайными объектами являются частицы, рассматриваемые в статистической физике [34]. Тогда величины $D_i = N_i / G_i$ есть так называемые средние числа заполнения в i-состоянии. Квантовые состояния $G_i = (2\pi\hbar)^{-r} d\vec{r}_i d\vec{p}_i$ равняются безразмерным элементам фазового пространства, где $\hbar$ – постоянная Планка, r – число степеней свободы частицы, $\vec{r}_i$ и $\vec{p}_i$ есть значения координат и импульсов. При переходе к непрерывным аналогам имеем соответствующие размерные физические квантовые энтропии, информации различия, расхождения и меры неточности в натах:

а) статистика Максвелла–Больцмана

$$H_N(D) = -k\int(\ln D)DdX\ , \tag{2.9.1}$$

$$I_N(D:D_0) = k\int\left(\ln\frac{D}{D_0}\right)DdX\ , \tag{2.9.2}$$

$$J_N(D:D_0) = k\int\left(\ln\frac{D}{D_0}\right)(D-D_0)dX\ , \tag{2.9.3}$$

$$H_N(D:D_0) = -k\int(\ln D_0)DdX\ , \tag{2.9.4}$$

б) статистика Ферми–Дирака

$$H_N(D) = -k\int\left[D\ln D + (1-D)\ln(1-D)\right]dX\ , \tag{2.9.5}$$

$$I_N(D:D_0) = k\int\left[D\ln\frac{D}{D_0} + (1-D)\ln\frac{(1-D)}{(1-D_0)}\right]dX\ , \tag{2.9.6}$$

$$J_N(D:D_0) = k\int\left[(D-D_0)\ln\frac{D/(1-D)}{D_0/(1-D_0)}\right]dX\ , \tag{2.9.7}$$

$$H_N(D) = -k\int\left[D\ln D + (1-D)\ln(1-D)\right]dX\ , \tag{2.9.8}$$

в) статистика Бозе–Эйнштейна

$$H_N(D) = -k\int\left[D\ln D - (1+D)\ln(1+D)\right]dX\ , \tag{2.9.9}$$

$$I_N(D:D_0) = k\int\left[D\ln\frac{D}{D_0} - (1+D)\ln\frac{(1+D)}{(1+D_0)}\right]dX\ , \tag{2.9.10}$$

$$J_N(D:D_0) = k\int\left[(D-D_0)\ln\frac{D/(1+D)}{D_0/(1+D_0)}\right]dX\ , \tag{2.9.11}$$

$$H_N(D) = -k\int\left[D\ln D + (1-D)\ln(1-D)\right]dX\ , \qquad (2.9.12)$$

г) квазиклассическая статистика

$$H_N(D) = k\int \ln D dX\ , \qquad (2.9.13)$$

$$I_N(D:D_0) = k\int \ln\frac{D}{D_0}dX\ , \qquad (2.9.14)$$

$$J_N(D:D_0) = 0\ ,\ H_N(D_0) = k\int \ln D_0 dX\ . \qquad (2.9.15)$$

Здесь $dX = (2\pi\hbar)^{-r}\, d\vec{r}d\vec{p}$ и k – фундаментальная постоянная Больцмана. Для распределений имеем

$$\int DdX = N, \quad \int D_0 dX = N_0. \qquad (2.9.16)$$

Для всех статистик имеют место дифференциальные соотношения статистической физики равновесных систем

$$dH_N(D) = \beta\left(dE_N - \mu dN\right) \qquad (2.9.17)$$

и неравновесных открытых систем в окружении

$$dI_N(D:D_0) = -dH_N(D) + \beta_0 dE - \beta_0\mu_0 dN\ , \qquad (2.9.18)$$

где β_0 и μ_0 есть обратная температура и химический потенциал окружения.

Равновесные распределения, максимизирующие энтропию, имеют соответственно для различных статистик следующий вид:

$$D = \exp\left\{-k^{-1}\beta(H-\mu)\right\}, \qquad (2.9.19)$$

$$D = \frac{1}{\exp\left\{\ k^{-1}\beta(H-\mu)\right\}+1}, \qquad (2.9.20)$$

$$D = \frac{1}{\exp\left\{\ k^{-1}\beta(H-\mu)\right\}-1}, \qquad (2.9.21)$$

$$D = \frac{1}{k^{-1}\beta(H-\mu)}, \qquad (2.9.22)$$

где $\beta = 1/T$ – обратная температура, $H = H(X)$ есть энергия частицы, $E_N = \mathbf{E}_N(H)$ – полная энергия системы частиц, μ – химический потенциал.

Рассмотрим некоторые простейшие физические примеры.

1. Идеальный газ. Пренебрегаем взаимодействием частиц в газе, что приводит к определению функции Гамильтона $H(p)=\vec{p}^2/2m$ для частицы с массой m. Используя условие (2.9.16), для распределения (2.9.19) получим число частиц

$$N=(2\pi\hbar)^{-r}\int\exp\left\{-\frac{\vec{p}^2/2m-\mu}{kT}\right\}d\vec{r}d\vec{p}=(2\pi\hbar)^{-r}V\exp\left\{\frac{\mu}{kT}\right\}(2\pi mT)^{3/2} \quad (2.9.23)$$

и, окончательно, распределение Максвелла

$$D(p_x,p_y,p_z)=\frac{N}{V(2\pi mkT)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{\vec{p}^2}{2mkT}\right\}, \quad (2.9.24)$$

с нормировкой

$$\int D(p_x,p_y,p_z)dp_xdp_ydp_z=\frac{N}{V}. \quad (2.9.25)$$

2. Фотонный газ. Электромагнитное излучение представляет собой идеальный фотонный газ, в котором фотоны не взаимодействуют между собой, и химический потенциал удовлетворяет условию $\mu=0$. Энергия фотона есть $H=cp=\hbar\omega$, где ω – собственная частота излучения в данном объеме V. Тогда, согласно (2.9.16) и (2.9.21), имеем число фотонов

$$N=\frac{V}{\pi^2c^3}\int\frac{\omega^2d\omega}{e^{\hbar\omega/kT}-1} \quad (2.9.26)$$

и полную энергию фотонного газа

$$E_N=\int\rho(\omega)d\omega, \quad (2.9.27)$$

где $\rho(\omega)$ определяется по формуле Планка для спектрального распределения энергии

$$\rho(\omega)=\frac{V\hbar\omega^2}{\pi^2c^3\left(e^{\hbar\omega/kT}-1\right)}. \quad (2.9.28)$$

3. Упорядоченность фотонного газа. Произведем оценку упорядоченности состояния электромагнитного излучения с распределением D

относительно D_0 [16]. Открытая система и окружение представляют собой исходное и внешнее поля излучений с частотой ω и температурами T и T_0 соответственно. Тогда переход между состояниями описывается распределениями Планка

$$D = \left\{ \exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT} \right) - 1 \right\}^{-1}, \; D_0 = \left\{ \exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT_0} \right) - 1 \right\}^{-1}, \qquad (2.9.29)$$

$$\int D \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega = N, \quad \int D_0 \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega = N_0. \qquad (2.9.30)$$

Согласно (2.9.10) запишем информацию различия для Бозе-газа

$$I_N\left(D : D_0\right) = k\int \left[D \ln \frac{D}{D_0} - (1+D)\ln \frac{(1+D)}{(1+D_0)} \right] \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega =$$

$$= -\left(H - H_0\right) + \frac{1}{T_0}\left(E - E_0\right). \qquad (2.9.31)$$

Значения энтропии и энергии исходного черного излучения в частичном равновесии находятся по формулам

$$H = H\left(D\right) = -k\int \left[D \ln D - (1+D)\ln(1+D) \right] \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega = \frac{4}{3} E T^{-1}, \qquad (2.9.32)$$

$$E = \int (h\omega) D \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega = \sigma T^4 V, \qquad (2.9.33)$$

где σ – постоянная Стефана.

В случае полного равновесия в (2.9.32) функция D заменяется на D_0 и тогда имеем

$$H_0 = \frac{4}{3} E_0 T_0^{-1}, \quad E_0 = \sigma T_0^4 V. \qquad (2.9.34)$$

Подставим выражения (2.9.32) – (2.9.34) в (2.9.31) и получим

$$I = \frac{E_0}{T_0}\left(\xi^4 - \frac{4}{3}\xi^3 + \frac{1}{3} \right), \left(\xi = \frac{T}{T_0} \right). \qquad (2.9.35)$$

При $\xi = 1$ имеем минимальную величину физической информации различия $I = 0$. В областях $0 < \xi < 1$ и $1 < \xi < \infty$ упорядоченность исходного черного излучения тем выше, чем ниже величина ξ в первой области и, соответственно, выше во второй относительно значения $\xi = 1$. Приближение величины ξ к значению $\xi = 1$ в обеих областях приводит к уменьшению упорядоченности.

Таким образом, приведенные результаты позволяют найти условия для поддержания высокого уровня упорядоченности открытой системы, находящейся в поле излучения с температурой T_0 и излучающей с температурой T. Фиксируем температуру T_0 и получаем важный вывод. В области $0 < \xi < 1$ излучение системы должно быть длинноволновым $(\xi << 1)$, а в области $1 < \xi < \infty$ – коротковолновым $(\xi >> 1)$. При этом информация различия (2.9.35) имеет, соответственно указанным областям, следующие асимптотические значения:

$$I = \frac{1}{3} E_0 T_0^{-1} \quad (0 < \xi < 1), \tag{2.9.36}$$

$$I = E T_0^{-1} \quad (1 < \xi < \infty). \tag{2.9.37}$$

Как видно из асимптотик, высокий уровень упорядоченности существенно зависит от температуры окружения T_0. Он начинает падать в первой области (при $0 < T < T_0$) и возрастать во второй с уменьшением T_0. Увеличение же температуры T_0 приводит к обратным явлениям в этих областях.

4. Фононный «газ». Состояние твердого тела определяется квазиклассическим распределением фононов по квантовым состояниям с $\mu = 0$. Энергия фонона есть $H = \hbar\omega(\vec{k})$, где $\vec{k}$ – волновой вектор, а $dX = (dk_x dk_y dk_z dV) / (2\pi)^3$. Для энергии тепловых колебаний в объеме пространства dV имеем равенство $\beta = U(\vec{r}, \vec{k})$. Число фононов, согласно квазиклассической статистике, равняется [34]

$$N = \int \frac{U(\vec{r}, \vec{k})}{\hbar\omega(\vec{k})} \frac{d\vec{k} d\vec{r}}{(2\pi)^3}. \tag{2.9.38}$$

Полная энергия и энтропия твердого тела даются следующими выражениями:

$$E_N = \int U\left(\vec{r},\vec{k}\right)\frac{d\vec{k}d\vec{r}}{\left(2\pi\right)^3}, \tag{2.9.39}$$

$$H_N = k\int \ln\left[\frac{U\left(\vec{r},\vec{k}\right)}{\hbar\omega\left(\vec{k}\right)}\right]\frac{d\vec{k}d\vec{r}}{\left(2\pi\right)^3}. \tag{2.9.40}$$

2.10. Параметризованные квантовые меры

Рассмотрим параметризованные меры в изучаемых статистиках. Для чего введем параметр ε, ранее представленный в работах [19, 21], и перепишем равенства (2.7.32) – (2.7.35) в виде

$$\frac{D_{1i}}{1\pm\varepsilon D_{1i}} = \frac{D_{0i}}{1\pm\varepsilon D_{0i}}\frac{D_{2i}}{1\pm\varepsilon D_{2i}}, \tag{2.10.1}$$

где распределение

$$D_{0i} = \frac{1}{2^{-\tau T_i-\alpha}\mp\varepsilon} \tag{2.10.2}$$

и параметр $\varepsilon=0$ для статистики Максвелла–Больцмана. Знак плюс (минус) при $\varepsilon=1$ соответствует статистике Ферми–Дирака (Бозе–Эйнштейна). В общем случае параметр ε меняется в допустимых пределах.

Распределение (2.10.2) максимизирует параметризованную квантовую энтропию

$$H_N\left(D\right) = -\sum_i^m\left[D_i\log_2 D_i \mp\frac{1}{\varepsilon}\left(1\pm\varepsilon D_i\right)\log_2\left(1\pm\varepsilon D_i\right)\right]G_i =$$

$$= -\sum_i^m\left[D_i\log_2\frac{D_i}{1\pm\varepsilon D_i}\mp\frac{1}{\varepsilon}\log_2\left(1\pm\varepsilon D_i\right)\right]G_i \tag{2.10.3}$$

и проявляется в равенстве (2.10.1) при минимизации обобщенной квантовой информации различия.

Выпишем параметризованную квантовую информацию различия, расхождение и меру неточности:

$$I_{N_1}\left(D_1:D_2\right)=\sum_i^m\left[D_{1i}\log_2\frac{D_{1i}}{D_{2i}}\mp\frac{1}{\varepsilon}\left(1\pm\varepsilon D_{1i}\right)\log_2\frac{1\pm\varepsilon D_{1i}}{1\pm\varepsilon D_{2i}}\right]G_i=$$

$$=\sum_i^m\left[D_{1i}\log_2\frac{D_{1i}/\left(1\pm\varepsilon D_{1i}\right)}{D_{2i}/\left(1\pm\varepsilon D_{2i}\right)}\mp\frac{1}{\varepsilon}\log_2\frac{1\pm\varepsilon D_{1i}}{1\pm\varepsilon D_{2i}}\right]G_i=$$

$$=-\left[H_{N_1}\left(D_1\right)-H_{N_2}\left(D_2\right)\right]-\sum_i^m\left(D_{1i}-D_{2i}\right)\left(\log_2\frac{D_{2i}}{1\pm\varepsilon D_{2i}}\right)G_i=$$

$$=-\left[H_{N_1}\left(D_1\right)-H_{N_1}\left(D_1:D_2\right)\right], \qquad (2.10.4)$$

$$J_{N_1}\left(D_1:D_2\right)=\sum_i^m\left[\left(D_{1i}-D_{2i}\right)\log_2\frac{D_{1i}/\left(1\pm\varepsilon D_{1i}\right)}{D_{2i}/\left(1\pm\varepsilon D_{2i}\right)}\right]G_i\,, \qquad (2.10.5)$$

$$H_{N_1}\left(D_1:D_2\right)=-\sum_i^m\left[D_{1i}\log_2 D_{2i}\mp\frac{1}{\varepsilon}\left(1\pm\varepsilon D_{1i}\right)\log_2\left(1\pm\varepsilon D_{2i}\right)\right]G_i=$$

$$=-\sum_i^m\left[D_{1i}\log_2\frac{D_{2i}}{1\pm\varepsilon D_{2i}}\mp\frac{1}{\varepsilon}\log_2\left(1\pm\varepsilon D_{2i}\right)\right]G_i\,. \qquad (2.10.6)$$

Переходим в (2.10.3) – (2.10.6) к распределениям вероятностей $p,\ u$ и запишем функционалы

$$H_\varepsilon\left(p\right)=-\sum_i^m\left[p_i\log_2 p_i\mp\frac{1}{\varepsilon}\left(1\pm\varepsilon p_i\right)\log_2\left(1\pm\varepsilon p_i\right)\right]G_i=$$

$$=-\sum_i^m\left[p_i\log_2\frac{p_i}{1\pm\varepsilon p_i}\mp\frac{1}{\varepsilon}\log_2\left(1\pm\varepsilon p_i\right)\right]G_i, \qquad (2.10.7)$$

$$I_\varepsilon\left(p:u\right)=\sum_i^m\left[p_i\log_2\frac{p_i}{u_i}\mp\frac{1}{\varepsilon}\left(1\pm\varepsilon p_i\right)\log_2\frac{1\pm\varepsilon p_i}{1\pm\varepsilon u_i}\right]G_i=$$

$$=\sum_i^m\left[p_i\log_2\frac{p_i/\left(1\pm\varepsilon p_i\right)}{u_i/\left(1\pm\varepsilon u_i\right)}\mp\frac{1}{\varepsilon}\log_2\frac{1\pm\varepsilon p_i}{1\pm\varepsilon u_i}\right]G_i=$$

$$=-\left[H_\varepsilon\left(p\right)-H_\varepsilon\left(u\right)\right]-\sum_i^m\left(p_i-u_i\right)\left(\log_2\frac{u_i}{1\pm\varepsilon u_i}\right)G_i=$$

$$=-\left[H_\varepsilon\left(p\right)-H_\varepsilon\left(p:u\right)\right], \qquad (2.10.8)$$

$$J_\varepsilon(p:u)=\sum_i^m\left[(p_i-u_i)\log_2\frac{p_i/(1\pm\varepsilon p_i)}{u_i/(1\pm\varepsilon u_i)}\right]G_i\,, \qquad (2.10.9)$$

$$H_\varepsilon(p:u)=-\sum_i^m\left[p_i\log_2 u_i\mp\frac{1}{\varepsilon}(1\pm\varepsilon p_i)\log_2(1\pm\varepsilon u_i)\right]G_i=$$

$$=-\sum_i^m\left[p_i\log_2\frac{u_i}{1\pm\varepsilon u_i}\mp\frac{1}{\varepsilon}\log_2(1\pm\varepsilon u_i)\right]G_i\,, \qquad (2.10.10)$$

которые вычисляются в рассматриваемых статистиках с точностью до постоянной. При $\varepsilon/N=0,\ -1,\ +1$ имеем ранее приведенные выражения энтропий, информаций различия, расхождений и мер неточности для различных статистик. В функционалах (2.10.7) – (2.10.10) полагается, что число объектов равняется постоянному значению N и, соответственно, переход осуществляется между состояниями с распределениями, нормированными на единицу

$$\sum_i^m p_iG_i=1,\quad \sum_i^m u_iG_i=1. \qquad (2.10.11)$$

Примем одинаковые значения весов $G_i=1$ и, уточняя постоянную, из (2.10.7) – (2.10.10) получим параметризованные меры

$$H_\varepsilon(p)=-\sum_i^m\left[p_i\log_2 p_i\mp\frac{1}{\varepsilon}(1\pm\varepsilon p_i)\log_2(1\pm\varepsilon p_i)\right]\mp$$
$$\mp\frac{(1\pm\varepsilon)\log_2(1\pm\varepsilon)}{\varepsilon}, \qquad (2.10.12)$$

$$I_\varepsilon(p:u)=\sum_i^m\left[p_i\log_2\frac{p_i}{u_i}\mp\frac{1}{\varepsilon}(1\pm\varepsilon p_i)\log_2\frac{1\pm\varepsilon p_i}{1\pm\varepsilon u_i}\right], \qquad (2.10.13)$$

$$J_\varepsilon(p:u)=\sum_i^m\left[(p_i-u_i)\log_2\frac{p_i/(1\pm\varepsilon p_i)}{u_i/(1\pm\varepsilon u_i)}\right], \qquad (2.10.14)$$

$$H_{\varepsilon}(p:u) = -\sum_{i}^{m}\left[p_i \log_2 u_i - \frac{1}{\varepsilon}(1+\varepsilon p_i)\log_2(1+\varepsilon u_i)\right] \mp$$

$$\mp\frac{(1\pm\varepsilon)\log_2(1\pm\varepsilon)}{\varepsilon}. \qquad (2.10.15)$$

Здесь при знаке плюс (минус) параметр меняется в пределах $\varepsilon > 0$ $(0<\varepsilon<1)$. Если $m=2$, то имеем $H_{\varepsilon}(0,1) = H_{\varepsilon}(1,0) = 0$. При $\varepsilon = 0$ из (2.10.12)–(2.10.15) вытекают известные функционалы статистической модели Шеннона–Винера

$$H(p) = \lim_{\varepsilon\to 0} H_{\varepsilon}(p) = -\sum_{i}^{m}(\log_2 p_i)\,p_i\,, \qquad (2.10.16)$$

$$I(p:u) = \lim_{\varepsilon\to 0} I_{\varepsilon}(p:u) = \sum_{i}^{m}\left(\log_2\frac{p_i}{u_i}\right)p_i\,, \qquad (2.10.17)$$

$$J(p:u) = \lim_{\varepsilon\to 0} J_{\varepsilon}(p:u) = \sum_{i}^{m}\left(\log_2\frac{p_i}{u_i}\right)(p_i - u_i), \qquad (2.10.18)$$

$$H(p:u) = \lim_{\varepsilon\to 0} H_{\varepsilon}(p:u) = -\sum_{i}^{m}(\log_2 u_i)\,p_i\,. \qquad (2.10.19)$$

Пусть состояние случайного объекта описывается совместным распределением вероятностей p_{ij} и, соответственно, параметризованной квантовой энтропией

$$H_{\varepsilon}(p_{12}) = -\sum_{i}^{m}\sum_{j}^{n}\left[p_{ij}\log_2 p_{ij} \mp \frac{1}{\varepsilon}(1\pm\varepsilon p_{ij})\log_2(1\pm\varepsilon p_{ij})\right] \mp$$

$$\mp\frac{(1\pm\varepsilon)\log_2(1\pm\varepsilon)}{\varepsilon}. \qquad (2.10.20)$$

Совместное распределение вероятностей есть $p_{ij} = p_i p_j$, где p_i и p_j – частные распределения вероятностей независимых объектов. Распределения удовлетворяют вероятностной нормировке

$$\sum_{i}^{m}\sum_{j}^{n} p_{ij} = 1, \quad \sum_{i}^{m} p_i = 1, \quad \sum_{j}^{n} p_j = 1\,. \qquad (2.10.21)$$

Частные квантовые энтропии представляются соответствующими функционалами

$$H_\varepsilon\left(p_1\right) = -\sum_i^m \left[p_i \log_2 p_i \mp \frac{1}{\varepsilon}\left(1 \pm \varepsilon p_i\right) \log_2\left(1 \pm \varepsilon p_i\right)\right] \mp$$

$$\mp \frac{\left(1 \pm \varepsilon\right) \log_2\left(1 \pm \varepsilon\right)}{\varepsilon}, \tag{2.10.22}$$

$$H_\varepsilon\left(p_2\right) = -\sum_j^n \left[p_j \log_2 p_j \mp \frac{1}{\varepsilon}\left(1 \pm \varepsilon p_j\right) \log_2\left(1 \pm \varepsilon p_j\right)\right] \mp$$

$$\mp \frac{\left(1 \pm \varepsilon\right) \log_2\left(1 \pm \varepsilon\right)}{\varepsilon}. \tag{2.10.23}$$

Очевидно, что энтропия (2.10.20) является неаддитивным функционалом и имеем соотношение

$$H_\varepsilon\left(p_{12}\right) \neq H_\varepsilon\left(p_1\right) + H_\varepsilon\left(p_2\right) \tag{5.10.24}$$

2.11. Различные меры в информационных системах

Перейдем к рассмотрению случайных объектов в информационных системах. Состояние объектов характеризуется дискретным распределением вероятностей $p = \left\{p_1, \ldots, p_m\right\}$ $\left(p_i \geq 0\right)$. Вместо весов G_i в физических системах, начиная с работы Белиса и Гайза [57], вводятся веса υ_i $(\upsilon_i \geq 0)$, которые задают дискретные значения так называемой полезности.

Приведем меры, соответствующие различным статистикам.

– Для статистики Максвелла–Больцмана, согласно (2.3.9), имеем энтропию [57]

$$H\left(p\right) = -\sum_i^m \left(\log_2 p_i\right) p_i \upsilon_i, \quad \sum_i^m p_i = 1, \tag{2.11.1}$$

где распределение вероятностей нормировано на единицу без весов υ_i. При $\upsilon_i = 1$ из (2.11.1) следует традиционная мера информации Шеннона–Винера

$$H\left(p\right) = -\sum_i^m \left(\log_2 p_i\right) p_i, \tag{2.11.2}$$

а при $\upsilon_i = \upsilon$ эта мера умножается на коэффициент υ. В частности, если

$\upsilon = 0$, то функционал (2.11.1) равен нулю при конечном значении функционала (2.11.2).

Аналогами квантовой информации различия и меры неточности являются [114, 115]

$$I(p:u) = \sum_i^m \left(\log_2 \frac{p_i}{u_i}\right) p_i \upsilon_i, \quad \sum_i^m u_i = 1, \tag{2.11.3}$$

$$H(p:u) = -\sum_i^m \left(\log_2 u_i\right) p_i \upsilon_i, \tag{2.11.4}$$

которые при $\upsilon_i = 1$ совпадают с мерами

$$I(p:u) = \sum_i^m \left(\log_2 \frac{p_i}{u_i}\right) p_i, \tag{2.11.5}$$

$$H(p:u) = -\sum_i^m \left(\log_2 u_i\right) p_i. \tag{2.11.6}$$

Квантовые информационные меры, рассматриваемые как взвешенные средние, представляются так:

$$H(p) = -\frac{\sum_i^m \left(\log_2 p_i\right) p_i \upsilon_i}{\sum_i^m p_i}, \tag{2.11.7}$$

$$I(p:u) = \frac{\sum_i^m \left(\log_2 \frac{p_i}{u_i}\right) p_i \upsilon_i}{\sum_i^m p_i}, \tag{2.11.8}$$

$$J(p:u) = \frac{\sum_i^m \left[\left(p_i - u_i\right) \log_2 \frac{p_i}{u_i}\right] \upsilon_i}{\sum_i^m p_i}, \tag{2.11.9}$$

$$H(p:u) = -\frac{\sum_i^m \left(\log_2 u_i\right) p_i \upsilon_i}{\sum_i^m p_i}. \tag{2.11.10}$$

– Для квазиклассической статистики, согласно (2.6.6), имеем следующие взвешенные средние по весам υ_i

$$H(p) = \frac{\sum_i^m \left(\log_2 p_i\right) \ \upsilon_i}{\sum_i^m \upsilon_i}, \tag{2.11.11}$$

$$I(p:u) = \frac{\sum_i^m \left(\log_2 \frac{u_i}{p_i}\right) \upsilon_i}{\sum_i^m \upsilon_i}, \ J(p:u) = 0. \tag{2.11.12}$$

В частном случае при $\upsilon_i = 1$ из (2.11.11) с точностью до коэффициента $1/m$ вытекает энтропия Берга [65]

$$H(p) = \sum_i^m \log_2 p_i \ . \tag{2.11.13}$$

Функционал (2.11.11), взятый с обратным знаком, есть энтропия

$$H(p) = -\frac{\sum_i^m \left(\log_2 p_i\right) \ \upsilon_i}{\sum_i^m \upsilon_i}, \tag{2.11.14}$$

рассмотренная в работе [98].

– Для статистик Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна, согласно (2.10.7)–(2.10.11), имеем параметризованные квантовые информационные меры

$$H_\varepsilon(p) = -\sum_i^m \left[p_i \log_2 p_i \mp \frac{1}{\varepsilon}\left(1 \pm \varepsilon p_i\right) \log_2 \left(1 \pm \varepsilon p_i\right) \right] \upsilon_i, \tag{2.11.15}$$

$$I_\varepsilon(p:u)=\sum_i^m\left[p_i\log_2\frac{p_i}{u_i}\mp\frac{1}{\varepsilon}(1\pm\varepsilon p_i)\log_2\frac{1\pm\varepsilon p_i}{1\pm\varepsilon u_i}\right]\upsilon_i\,, \qquad (2.11.16)$$

$$J_\varepsilon(p:u)=\sum_i^m\left[(p_i-u_i)\log_2\frac{p_i/(1\pm\varepsilon p_i)}{u_i/(1\pm\varepsilon u_i)}\right]\ \upsilon_i\,, \qquad (2.11.17)$$

$$H_\varepsilon(p:u)=-\sum_i^m\left[p_i\log_2 u_i\mp\frac{1}{\varepsilon}(1\pm\varepsilon p_i)\log_2(1\pm\varepsilon u_i)\right]\ \upsilon_i\,. \quad (2.11.18)$$

В работе [84] рассматриваются энтропии с $\upsilon_i=1$ и $\varepsilon>0$ в следующем виде

$$H_\varepsilon(p)=-\sum_i^m\left[p_i\log_2 p_i-\frac{1}{\varepsilon}(1+\varepsilon p_i)\log_2(1+\varepsilon p_i)+p_i\right], \quad (2.11.19)$$

$$H_\varepsilon(p)=-\sum_i^m\left[p_i\log_2 p_i-\frac{1}{\varepsilon}(1+\varepsilon p_i)\log_2(1+\varepsilon p_i)\right]-$$
$$-\frac{1}{\varepsilon}(1+\varepsilon)\log_2(1+\varepsilon), \qquad (2.11.20)$$

$$H_\varepsilon(p)=-\sum_i^m\left[p_i\log_2 p_i-\frac{1}{\varepsilon^2}(1+\varepsilon p_i)\log_2(1+\varepsilon p_i)\right]-\frac{1}{\varepsilon}, \quad (2.11.21)$$

$$H_\varepsilon(p)=-\sum_i^m\left[p_i\log_2 p_i-\frac{1}{\varepsilon^2}(1+\varepsilon p_i)\log_2(1+\varepsilon p_i)\right]-$$
$$-\frac{1}{\varepsilon^2}(1+\varepsilon)\log_2(1+\varepsilon), \qquad (2.11.22)$$

которые также являются некоторыми комбинациями постоянных величин параметризованной меры (2.10.12) и меры, приведенной в работе [73]

$$H_\varepsilon(p)=-\frac{1}{\varepsilon}\sum_i^m\left[(1+\varepsilon p_i)\log_2(1+\varepsilon p_i)\right]+\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\log_2(1+\varepsilon)\,. \quad (2.11.23)$$