

М.С. ГАНЕЕВА

**ПРОЧНОСТЬ  
И  
УСТОЙЧИВОСТЬ  
ОБОЛОЧЕК  
ВРАЩЕНИЯ**



РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
КАЗАНСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР  
Казанский физико-технический институт им. Е.К. Завойского  
Институт механики и машиностроения

М.С.ГАНЕЕВА

**ПРОЧНОСТЬ  
И  
УСТОЙЧИВОСТЬ  
ОБОЛОЧЕК  
ВРАЩЕНИЯ**

Ответственный редактор  
доктор технических наук М.С. КОРНИШИН



МОСКВА "НАУКА"

1992

УДК 539.37

Прочность и устойчивость оболочек вращения / М.С. Ганеева. — М.: Наука, 1992. — 161 с. ISBN 5-02-006757-1

В монографии рассматриваются теория и методы решения задач прочности и устойчивости тонких и нетонких оболочек вращения. Предложен вариант уточненной теории для непологих оболочек, учитывающий деформацию поперечного сдвига, геометрическую и физическую нелинейности, изменение метрики по толщине оболочки. Получены системы разрешающих уравнений. Разработаны эффективные алгоритмы численного решения нелинейных задач изгиба и устойчивости оболочек вращения. Решены новые задачи о деформировании и устойчивости эллипсоидальных оболочек и днищ для различных видов нагружения и граничных условий. Показано, что упрощающие гипотезы могут вносить значительную погрешность в результаты решения задач.

Рассчитана на специалистов в области теории оболочек, а также на инженеров и аспирантов.

Табл. 29. Ил. 60. Библиогр.: 142 назв.

Strength and stability of shells of revolution / M.S. Ganeyeva. — Moscow: Nauka, 1992.

In the monograph the theory and solving methods of strength and stability problems for thin and non-thin shells of revolution are considered. More precise theory of non-shallow shells accounting for transverse shear strain, geometrical and physical non-linearity, metric modification along shell thickness was suggested. The sets of solving equations have been derived. Effective algorithms for numerical solving of non-linear bending and buckling problems of shells of revolution have been designed. New problems on deformation and stability of ellipsoidal shells and bottoms for various types of loading and boundary conditions have been solved. It is shown that simplifying assumptions can lead to significant error in problem solution.

Рецензенты:

член-корреспондент РАН М.А. Ильгамов,  
доктор физико-математических наук Ю.Г. Коноплев

Г 1603040000-040  
042(02)-92 239-91 I полугодие

© Издательство "Наука", 1992

ISBN 5-02-006757-1

## ВВЕДЕНИЕ

Одно из прикладных направлений математической теории упругости — теория оболочек — развивается весьма интенсивно. Это развитие обусловлено прежде всего потребностями практики. Элементы конструкций в виде оболочек применяются во многих отраслях народного хозяйства: авиа-, судо-, ракето-, приборостроении, химической промышленности, строительном деле и т. д.

В то же время оказались плодотворными идеи, заложенные в основу теории оболочек как линейной [14, 48, 72, 95, 113], так и геометрически нелинейной [15, 21, 88, 93, 121, 142]. В теории оболочек на основе нелинейной теории получены значительные результаты в области изучения устойчивости состояния упругого равновесия [8, 16, 18, 51, 88, 107, 112].

Большие трудности приходится преодолевать при исследовании устойчивости неупругих тонкостенных элементов [50, 51, 61, 65, 66, 67, 84, 90, 122, 127], а также при решении геометрически и физически нелинейных задач [10, 83, 110, 119].

Исследователями большое внимание уделяется теориям, уточняющим классическую теорию оболочек Кирхгофа—Лява [2, 3, 9, 24, 62, 97], уточненным теориям в геометрически нелинейной постановке [1, 22, 62, 96, 139]. Одной из первых среди немногочисленных работ, учитывающих геометрическую и физическую нелинейности в уточненной постановке, является работа [23].

Выделим область нетонких оболочек (оболочек средней толщины), для которых параметр относительной толщины  $hR^{-1}$  ( $h$  — наибольшая толщина оболочки,  $R$  — наименьший радиус кривизны ее поверхности приведения) не мал по сравнению с единицей, но значительно меньше единицы его квадрат. Естественно, что при построении теории нетонких оболочек может возникнуть необходимость ввести и другие факторы, традиционно присутствующие в уточненных теориях: деформацию поперечного сдвига, нормальное напряжение, нелинейный характер процесса деформирования и др. Причем влияние различных факторов на решение задачи будет зависеть от вида нагружения, граничных условий, характеристик материала, геометрических параметров и т. д. [3].

Подавляющее количество работ посвящено разработке теории нетонких оболочек и решению задач в линейной постановке [19, 20, 57, 58, 63, 68, 87, 97, 98, 103, 104, 125, 129, 130, 132, 136—138]. Недостаточно изучены вопросы нелинейного деформирования [62, 63, 69, 70, 89, 92, 98] и устойчивости нетонких оболочек [63, 92, 97, 117, 140].

Проблема нелинейного расчета прочности и устойчивости тонких и нетонких оболочек актуальна во всех тех случаях, когда конструкции работают под действием высоких нагрузок в условиях нелинейного деформирования. Эти вопросы имеют непосредственное значение для изучения несущей способности оболочек.

Исчерпание несущей способности может наступить по многим причинам: при достижении предельной нагрузки на кривой нагрузка—перемещение, резком изменении формы вследствие волнообразования по меридиану или параллели, разрушении вследствие достижения предела прочности на диаграмме растяжения материала и т. д. Отсюда вытекает необходимость изучать напряженно-деформированное состояние и потерю устойчивости оболочек как процесс нелинейного деформирования с установлением на диаграмме деформирования особых точек, таких, как точки ветвления при волнообразовании по меридиану и параллели, пределы текучести и прочности, предельные точки на этой кривой. При этом необходимо учитывать в соотношениях задачи геометрическую и физическую нелинейности и следить за возникающими в оболочке напряжениями. Необходимо также отказаться от упрощающих предположений, которые и до сих пор используются при изучении устойчивости, как-то: однородность, линейность и безмоментность докритического состояния, предположение о локальной потере устойчивости, касательно-модульная теория определения критических нагрузок неупругих оболочек.

Уравнения теории оболочек поддаются точному интегрированию только в исключительных случаях. Современный путь решения сложных задач теории оболочек — создание эффективных численных алгоритмов расчета с реализацией их на ЭВМ. К настоящему времени накоплен большой опыт в этой области. В частности, выявилась необходимость согласовывать между собой разрешающие уравнения и численные методы их интегрирования. Оказалось затруднительным применение уравнений высокого порядка с малым числом неизвестных. В таких уравнениях дифференцированию подвергаются, кроме разрешающих функций, толщина, радиусы кривизны и другие параметры; оказывается сложной запись граничных условий. Выяснилось, что в задачах теории оболочек, одномерных или приведенных к одномерным, целесообразно представлять разрешающие уравнения в каноническом виде [54, 134] — в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

С уравнениями в каноническом виде непосредственно связано применение метода ортогональной прогонки [47, 52, 56]. По результатам численных экспериментов и обзора литературы в книге [56] утверждается, что метод ортогональной прогонки обладает эффективностью и высокой точностью, а также простотой и удобством при использовании. В работе [7] приводятся соображения, что алгоритм метода ортогональной прогонки не должен быть сильно чувствителен к ошибкам округления, если отрезки разбиения интервала не очень велики.

Нелинейные задачи теории оболочек представляют собой нелинейные краевые задачи, зависящие от многих параметров. Характер пове-

дения и количество решений их трудно предугадать. Обычно строится алгоритм численного решения таких задач, как шаговый процесс по монотонно изменяющимся значениям какого-то параметра. Работоспособность алгоритма прежде всего зависит от выбора такого параметра задачи, монотонное изменение которого обеспечило бы развитие процесса деформирования оболочки.

В уравнениях теории оболочек присутствует естественный параметр задачи — параметр нагружения. Однако он монотонно возрастает лишь на ограниченном участке кривой нагружение—перемещение. Тогда можно перейти к другому параметру, выбрав за него перемещение в некоторой точке оболочки и переведя параметр нагружения в неизвестные. Часто оказывается полезным выбрать в качестве параметра прогиб в центре пологой оболочки.

Особенно трудно организовать шаговый процесс по параметру в нелинейных задачах изгиба непологих оболочек. В процессе деформирования непологой оболочки эпюры разрешающих функций претерпевают изменение формы. Например, прогиб в полюсе подъемистой оболочки, возраставший при начальных значениях нагрузки, может начать убывать после появления волн по меридиану. Тогда будет оправданным введение в качестве параметров некоторых интегральных величин.

Исследованию рассматриваемого вопроса в нелинейной теории оболочек посвящается значительное число работ: [11, 13, 17, 53, 59, 62, 75, 79, 80, 102, 105, 108, 111, 115, 124, 126, 135, 141] и др. Обилие публикаций, разнообразие приведенных в них алгоритмов наводят на мысль, что в нелинейных задачах теории оболочек трудно разработать универсальные алгоритмы шагового процесса. Параметр шагового процесса определяется особенностями самой задачи. Удачный выбор его может быть сделан после некоторого качественного анализа задачи с учетом опыта вычислений, накопленного многими авторами.

В книге представлены результаты, полученные в нелинейной теории оболочек автором вместе с соавторами научных публикаций. Предложен вариант уточненной теории изгиба и устойчивости непологих оболочек средней толщины, учитывающий изменение метрики по толщине оболочки, деформацию поперечного сдвига, геометрическую и физическую нелинейности. Получены разрешающие уравнения в виде канонических систем в задачах расчета напряженно-деформированного состояния нетонких оболочек вращения при осесимметричном и неосесимметричном деформировании. Выведены канонические системы уравнений нейтрального равновесия в задачах неосесимметричной потери устойчивости оболочек вращения при осесимметричном нагружении. Предложен также ряд соотношений для тонких оболочек по классической теории Кирхгофа—Лява.

Разработаны алгоритмы численного решения нелинейных задач осесимметричного изгиба, неосесимметричной потери устойчивости на основе канонических систем уравнений в сочетании с шаговым методом по параметру интегрального прогиба, методами линеаризации и ортогональной прогонки. Алгоритмы реализованы в виде вычис-

лительного комплекса программ на языке ФОРТРАН ЕС ЭВМ (Ганеева М.С., Малахов В.Г. Расчеты и испытания на прочность. Метод и программа расчета на ЭВМ ЕС осесимметричных оболочечных конструкций при учете физической и геометрической нелинейностей: Метод. рекомендации МР 200—86. М.: ВНИИНМаш, 1986. 32 с.; Ганеева М.С., Дегтярев М.Н. Численное исследование больших прогибов и неосесимметричной потери устойчивости осесимметрично нагруженных непологих оболочек вращения средней толщины // Алгоритмы и программы: Информ. бюл. М.: Всесоюз. науч.-техн. информ. центр. Госфонд алгоритмов и программ СССР, 1986. № 5 (74). С.60—61; Ганеева М.С., Косолапова Л.А. Численное исследование больших прогибов и неосесимметричной потери устойчивости осесимметрично нагруженных непологих тонких ортотропных оболочек вращения // Там же. С. 61).

Получены численные решения задач о больших прогибах и потере устойчивости тонких упругих изотропных вытянутых и сплюснутых эллипсоидальных оболочек и днищ под действием внешнего равномерного давления и локальной нагрузки. Исследованы по уточненной теории нелинейное деформирование и устойчивость упругой ортотропной и нетонкой изотропной неупругой оболочек.

Для нетонких оболочек проведено сравнение результатов расчетов по теории оболочек средней толщины и теории тонких оболочек, а также сравнение с результатами других авторов, полученными в трехмерной постановке. Установлено, что для нетонких эллипсоидальных оболочек касательно-модульная теория и теория локальной потери устойчивости занижают значения критических нагрузок. Показана необходимость совместного учета геометрической и физической нелинейности при изучении процесса деформирования нетонких и тонких оболочек вращения в зависимости от геометрических параметров и характеристик материала оболочки.

В книге для нумерации формул приняты три числа, означающие главу, раздел в главе и номер формулы в разделе. Рисунки и таблицы нумеруются двумя числами, означающими номер главы и номер рисунка или таблицы в пределах главы.

Использованы символы: (1, 2, 3) — циклическая перестановка индексов 1, 2, 3; (1, 2) — перестановка индексов 1, 2. Приняты сокращения: СП — срединная поверхность, ПП — поверхность приведения, ОП — ограничивающая поверхность, НДС — напряженно-деформированное состояние, УОС — уравнения основного состояния, УНР — уравнения нейтрального равновесия, НПУ — неосесимметричная потеря устойчивости, НКН — критическая нагрузка неосесимметричной потери устойчивости (неосесимметричная критическая нагрузка), ОПН — осесимметричная предельная нагрузка, ГУ — граничные условия, Л — линейная, ГН или Г — геометрически нелинейная, ФН или Ф — физически нелинейная, ГНФН или ГФ — геометрически и физически нелинейные задачи.



## ГЛАВА I

# ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ОСНОВНЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ ОБОЛОЧЕК СРЕДНЕЙ ТОЛЩИНЫ

### 1.1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТ

Пусть в каждой точке  $M$  недеформированного трехмерного тела выбрана ортогональная криволинейная система координат  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  (рис. 1.1). Единичные векторы (орты)  $k_1, k_2, k_3$ , касательные к координатным линиям  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , образуют правую тройку локального триэдра.

Если  $ds_i, d\alpha_i (i = \overline{1, 3})$  — приращения длин дуг координатных линий и криволинейных координат, то

$$ds_i = H_i d\alpha_i, \quad i = \overline{1, 3} \quad (1.1.1)$$

Функции  $H_i$  называются коэффициентами Ляме в выбранной системе координат.

В ортогональной системе координат имеют место следующие формулы дифференцирования ортов  $k_i$  по координатам  $\alpha_j$  [94]:

$$\frac{\partial k_1}{\partial \alpha_1} = -\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} k_2 - \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} k_3, \quad (1.1.2)$$

$$\frac{\partial k_1}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} k_2, \quad \frac{\partial k_1}{\partial \alpha_3} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1} k_3; (1, 2, 3).$$

Коэффициенты Ляме связаны соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{1}{H_3^2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} = 0, \quad (1.1.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} \right) - \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} = 0; (1, 2, 3).$$

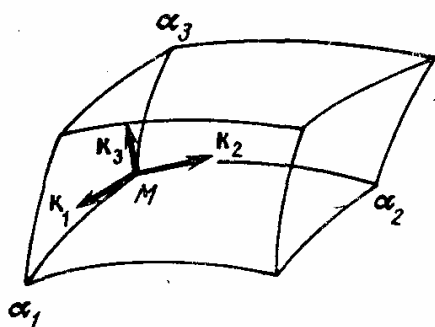


Рис. 1.1

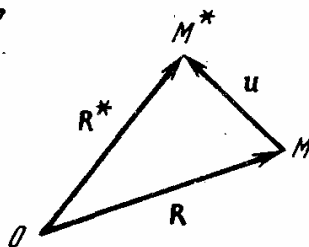


Рис. 1.2

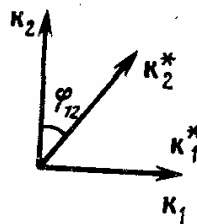


Рис. 1.3



## 1.2. ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОМПОНЕНТОВ ДЕФОРМАЦИИ И НАПРЯЖЕНИЙ В КРИВОЛИНЕЙНОЙ ОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Пусть точка  $M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  тела в результате деформации получает перемещение [94]

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{k}_1 + u_2 \mathbf{k}_2 + u_3 \mathbf{k}_3, \quad (1.2.1)$$

так что она займет положение  $M^*(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  (рис. 1.2). Относительные удлинения в точке  $M$  по направлениям  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$  будут

$$E_{\alpha_1} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}} - 1; (1, 2, 3), \quad (1.2.2)$$

углы сдвига  $\varphi_{ij}$  между волокнами, первоначально направленными по  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$  (рис. 1.3), определяются формулами

$$\sin \varphi_{12} = \varepsilon_{12} / \left[ (1 + E_{\alpha_1})(1 + E_{\alpha_2}) \right]; (1, 2, 3), \quad (1.2.3)$$

где  $\varepsilon_{ii}, \varepsilon_{kj}$  — компоненты деформации:

$$\varepsilon_{11} = e_{11} + \frac{1}{2} \left[ e_{11}^2 + \left( \frac{1}{2} e_{12} + \omega_3 \right)^2 + \left( \frac{1}{2} e_{13} - \omega_2 \right)^2 \right], \quad (1.2.4)$$

$$\varepsilon_{12} = e_{12} + e_{11} \left( \frac{1}{2} e_{12} - \omega_3 \right) + e_{22} \left( \frac{1}{2} e_{12} + \omega_3 \right) + \left( \frac{1}{2} e_{13} - \omega_2 \right) \left( \frac{1}{2} e_{23} + \omega_1 \right); (1, 2, 3);$$

$$e_{11} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} u_2 + \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} u_3,$$

$$e_{12} = e_{21} = \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{u_2}{H_2} \right) + \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{u_1}{H_1} \right), \quad (1.2.5)$$

$$2\omega_1 = \frac{1}{H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_3 u_3) - \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (H_2 u_2) \right]; (1, 2, 3).$$

Обозначим единичные векторы, касательные к деформированным координатным линиям, через  $\mathbf{k}_1^*, \mathbf{k}_2^*, \mathbf{k}_3^*$ . Орты  $\mathbf{k}_i^*$ , вообще говоря, не ортогональны. Они выражаются через недеформированные орты  $\mathbf{k}_i$  следующим образом:

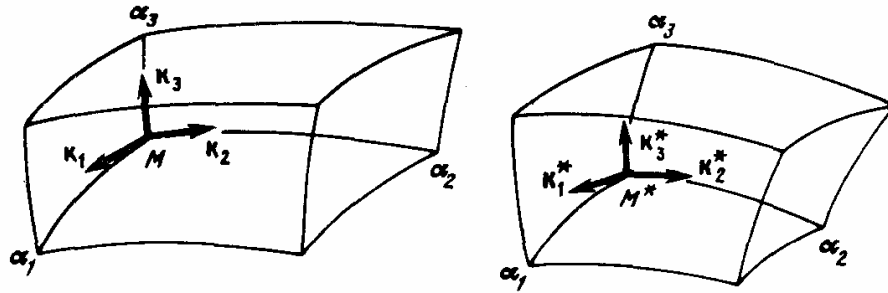
$$\mathbf{k}_1^* = \frac{1}{1 + E_{\alpha_1}} \left[ (1 + e_{11}) \mathbf{k}_1 + \left( \frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \mathbf{k}_2 + \left( \frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) \mathbf{k}_3 \right]; (1, 2, 3) \quad (1.2.6)$$

Коэффициенты Ляме для деформированного тела имеют вид

$$H_1^* = H_1 (1 + E_{\alpha_1}); (1, 2, 3). \quad (1.2.7)$$

В случае деформаций, малых по сравнению с единицей:

$$E_{\alpha_1} \approx \varepsilon_{11}, H_1^* \approx H_1, \sin \varphi_{12} \approx \varepsilon_{12}; (1, 2, 3). \quad (1.2.8)$$



Р и с. 1.4

Выделим в точке  $M$  в положении до деформации бесконечно малый прямоугольный параллелепипед, который после деформации превратится в косоугольный (рис. 1.4). Обозначим напряжения, действующие на гранях параллелепипеда  $M^*$ , через  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , причем напряжение  $\sigma_i$  действует на той грани, которая до деформации была перпендикулярна координатной линии  $\alpha_i$ . Приведем разложения напряжений для случая малых деформаций по деформированным ортам:

$$\sigma_1 = \sigma_{11} \mathbf{k}_1^* + \sigma_{12} \mathbf{k}_2^* + \sigma_{13} \mathbf{k}_3^*; (1, 2, 3), \quad (1.2.9)$$

по недеформированным ортам:

$$\sigma_1 = s_{11} \mathbf{k}_1 + s_{12} \mathbf{k}_2 + s_{13} \mathbf{k}_3; (1, 2, 3), \quad (1.2.10)$$

где

$$\begin{aligned} s_{11} &= \sigma_{11}(1 + e_{11}) + \sigma_{12} \left( \frac{e_{12}}{2} - \omega_3 \right) + \sigma_{13} \left( \frac{e_{13}}{2} + \omega_2 \right), \\ s_{12} &= \sigma_{11} \left( \frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + \sigma_{12}(1 + e_{22}) + \sigma_{13} \left( \frac{e_{23}}{2} - \omega_1 \right), \\ s_{13} &= \sigma_{11} \left( \frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) + \sigma_{12} \left( \frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) + \sigma_{13}(1 + e_{33}), (1, 2, 3). \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

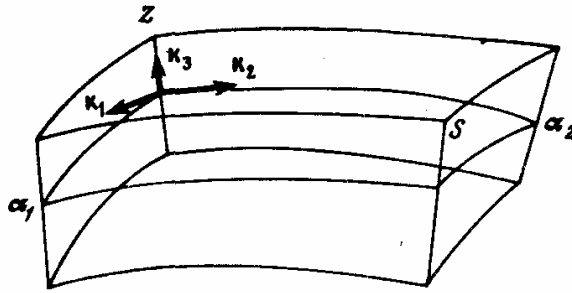
### 1.3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОЛОЧКИ СРЕДНЕЙ ТОЛЩИНЫ. ОСНОВНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ

Рассматривается оболочка [41], отнесенная до деформации к ортогональной системе криволинейных координат  $\alpha_1, \alpha_2, z$  с ортами  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$  (рис. 1.5). Причем координатные линии  $\alpha_1, \alpha_2$  совпадают с линиями кривизны поверхности приведения (ПП)  $S$  оболочки, а ось  $z$  направлена по внешней нормали к  $S$ . Орты  $\mathbf{k}_i$  образуют правую тройку.

Толщина оболочки  $h$  переменная и определяется двумя функциями  $h_1(\alpha_1, \alpha_2), h_2(\alpha_1, \alpha_2)$ :

$$-h_1 \leq z \leq h_2, \quad h = h_1 + h_2, \quad (1.3.1)$$

$z = 0$  соответствует поверхности  $S$ . Обозначим:  $A_1, A_2$  — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности  $S$ ;  $R_1, R_2$  — ее главные



Р и с. 1.5

радиусы кривизны;  $k_1 = R_1^{-1}$ ,  $k_2 = R_2^{-1}$  — главные кривизны;  $H_1, H_2, H_3$

— коэффициенты Ляме для оболочки на уровне  $z$ . В силу выбора системы координат имеют место соотношения [88]

$$H_1 = A_1 (1 + k_1 z), H_2 = A_2 (1 + k_2 z), H_3 = 1. \quad (1.3.2)$$

После подстановки выражений (1.3.2) в соотношения (1.1.3) получаются известные условия Гаусса—Кодацци для поверхности  $S$ :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) = -A_1 A_2 k_1 k_2, \quad (1.3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 k_1) = k_2 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 k_2) = k_1 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}.$$

Из (1.3.2) с учетом (1.3.3) следует

$$\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}. \quad (1.3.4)$$

Последующие выводы будут основываться на следующих допущениях:

1. Нормальное напряжение  $\sigma_{33}$  мало по сравнению с другими напряжениями.

2. В формулах (1.2.5) параметры деформаций  $e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{12}$  и поворот  $\omega_3$  столь малы, что ими можно пренебречь по сравнению с единицей, а параметры деформаций  $e_{13}, e_{23}$  и повороты  $\omega_1, \omega_2$  таковы, что можно пренебречь по сравнению с единицей лишь их квадратами и произведениями. Из этого допущения следует, в частности, что с принятой погрешностью

$$A_1^* \approx A_1, A_2^* \approx A_2, u_3 \approx w(\alpha_1, \alpha_2), \quad (1.3.5)$$

т.е. коэффициенты первой квадратичной формы  $A_1^*, A_2^*$  деформированной ПП, равны соответствующим коэффициентам недеформированной поверхности, а нормальное перемещение  $u_3$  не зависит от координаты  $z$ .

3. Отношения толщины оболочки к радиусам кривизны  $h/R_i$  ( $i = 1, 2$ ) таковы, что их квадратами и произведениями можно пренебречь по сравнению с единицей.

Поскольку во всех соотношениях удерживаются слагаемые порядка  $h/R_i$  по сравнению с единицей и вводится деформация поперечного сдвига, предложенная в данной главе теория может быть применена к исследованию напряженно-деформированного состояния оболочек средней толщины, когда учет обжатия и напряжения  $\sigma_{33}$  не вносит существенной поправки [3, 56, 98].

В соотношениях также удерживаются геометрически нелинейные члены при умеренных поворотах (по геометрически нелинейной теории среднего изгиба [88]). Такая постановка для оболочек средней толщины необходима прежде всего для получения уравнений нейтрального равновесия. Однако геометрически нелинейная постановка может быть необходимой для расчета непосредственно напряженно-деформированного состояния нетонких оболочек с переменными характеристиками: для составных оболочек, для оболочек переменной толщины, переменной кривизны и т.д.

Например, для эллипсоидальной оболочки вращения радиусы кривизны будут:

$$R_1 = \frac{b^2}{a} \left( \sin^2 \theta + \left( \frac{b}{a} \right)^2 \cos^2 \theta \right)^{-1.5}, \quad R_2 = a \left( \sin^2 \theta + \left( \frac{b}{a} \right)^2 \cos^2 \theta \right)^{-0.5},$$

где  $a, b$  — полуоси эллипсоида;  $b$  — полуось вдоль оси вращения. В полюсе оболочки  $R_1(0) = R_2(0) = a^2/b$ , на экваторе  $R_1(\pi/2) = b^2/a$ ,  $R_2(\pi/2) = a$ . Для сплюснутой оболочки ( $a/b > 1$ ):

$$\max_{\theta} (R_1, R_2) = R = a^2/b, \quad \min_{\theta} (R_1, R_2) = r = b^2/a, \quad R/r = (a/b)^3.$$

При  $b/a = 0,5$ ,  $a/h = 20$  получим  $R/h = 40$  — оболочка тонкая около полюса,  $r/h = 5$  — оболочка нетонкая в окрестности экватора.

Для вытянутой оболочки ( $a/b < 1$ ):

$$\max_{\theta} (R_1, R_2) = R = b^2/a, \quad \min_{\theta} (R_1, R_2) = r = a^2/b, \quad R/r = (b/a)^3.$$

При  $b/a = 4$ ,  $a/h = 20$  получим  $r/h = 320$  — оболочка тонкая на экваторе  $r/h = 5$  — оболочка нетонкая около полюса.

#### 1.4. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ОБЛОЧКИ

Получим нелинейные геометрические соотношения для оболочки средней толщины с учетом деформации поперечного сдвига [41], исходя из нелинейных выражений (1.2.4), (1.2.5) для компонентов деформации трехмерного тела. По данным книги В.В. Новожилова [95], оригинальный метод, заключающийся в получении всех формул теории оболочек из уравнений общей теории упругости, принадлежит Б.Г. Галеркину [19, 20]. Впоследствии этим методом широко пользовался в своих работах В.В. Новожилов.

Деформации поперечного сдвига  $\varepsilon_{13}$ ,  $\varepsilon_{23}$  принимаются в виде [2, '3]

$$\varepsilon_{i3} = f_i(z)\varphi_i(\alpha_1, \alpha_2) \quad (i = 1, 2). \quad (1.4.1)$$

Здесь  $f_i(z)$  — некоторые подходящим образом подобранные функции координаты  $z$ ;  $\varphi_i(\alpha_1, \alpha_2)$  — искомые функции, которые условно назовем функциями сдвига.

Делая в соотношениях (1.2.4), (1.2.6) пренебрежения в соответствии с принятыми в разд. 1.3 допущениями 1—3, получим компоненты деформации

$$\varepsilon_{11} = e_{11} + \frac{1}{2} \left( \frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right)^2, \quad \varepsilon_{22} = e_{22} + \frac{1}{2} \left( \frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right)^2, \quad (1.4.2)$$

$$\varepsilon_{12} = e_{12} + \left( \frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) \left( \frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right), \quad \varepsilon_{13} = e_{13}, \quad \varepsilon_{23} = e_{23}$$

и разложения для деформированных ортов

$$\mathbf{k}_1^* = \mathbf{k}_1 + \left( \frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) \mathbf{k}_3, \quad \mathbf{k}_2^* = \mathbf{k}_2 + \left( \frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) \mathbf{k}_3, \quad (1.4.3)$$

$$\mathbf{k}_3^* = \left( \frac{e_{13}}{2} + \omega_2 \right) \mathbf{k}_1 + \left( \frac{e_{23}}{2} - \omega_1 \right) \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3.$$

Из выражений для  $\varepsilon_{13}$ ,  $\varepsilon_{23}$ , принимая во внимание соотношения (1.4.1), (1.4.2), (1.2.5) и допущение 2, находим компоненты перемещений  $u_1$ ,  $u_2$  точки, удаленной на расстояние  $z$  от ПП оболочки:

$$u_i = v_i + z\vartheta_i(\alpha_1, \alpha_2) + x_i(z)\varphi_i(\alpha_1, \alpha_2), \quad u_3 = w(\alpha_1, \alpha_2). \quad (1.4.4)$$

Здесь

$$\vartheta_i = -\frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} + k_i v_i \quad (i = 1, 2) \quad (1.4.5)$$

— величины, характеризующие поворот относительно осей  $\alpha_1, \alpha_2$  недеформированной нормали к ПП, когда сдвиги  $\varepsilon_{13}$ ,  $\varepsilon_{23}$  пренебрежимо малы по сравнению с остальными деформациями;

$$x_i(z) = \int_0^z f_i(z)(1 + k_i z)^{-1} dz \quad (i = 1, 2). \quad (1.4.6)$$

Скалярные соотношения (1.4.4) можно записать в векторной форме:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + z(\mathbf{N} - \mathbf{k}_3), \quad (1.4.7)$$

где

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{k}_1 + u_2 \mathbf{k}_2 + u_3 \mathbf{k}_3; \quad \mathbf{v} = v_1 \mathbf{k}_1 + v_2 \mathbf{k}_2 + w \mathbf{k}_3; \quad (1.4.8)$$

$$\mathbf{N} = \left( \vartheta_1 + \frac{x_1}{z} \varphi_1 \right) \mathbf{k}_1 + \left( \vartheta_2 + \frac{x_2}{z} \varphi_2 \right) \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3;$$

$\mathbf{u}$  — вектор перемещения точки ПП;  $\mathbf{u}$  — вектор перемещения точки оболочки;  $\mathbf{N}$  — вектор, в который перешла нормаль  $\mathbf{k}_3$  после деформации.

Используя соотношения (1.4.2), (1.2.5), (1.3.2)—(1.3.4), (1.4.4), находим выражения для компонентов деформации оболочки на уровне  $z$  от ПП:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{E_{11} + z\kappa_{11}}{1 + k_1 z} + \frac{\theta_1^2}{2} + \frac{x_1}{A_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_1} + \frac{x_2 \varphi_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{E_{12} + z\kappa_{12}}{1 + k_1 z} + \frac{E_{21} + z\kappa_{21}}{1 + k_2 z} + \theta_1 \theta_2 + \\ &+ \frac{A_2}{A_1} x_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{\varphi_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} x_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{\varphi_1}{A_1} \right), \varepsilon_{13} = f_1(z) \varphi_1(\alpha_1, \alpha_2); (1, 2), \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

где использованы обозначения:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1} + \frac{v_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + k_1 w, \\ E_{12} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_1} - \frac{v_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}, \theta_1 = \vartheta_1 + k_1 x_1 \varphi_1, \\ \kappa_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\vartheta_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}, \kappa_{12} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \alpha_2} - \frac{\vartheta_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}; (1, 2). \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

В дальнейшем, допуская погрешность  $(k_i h)^2$  по сравнению с единицей, в выражениях (1.4.9) полагаем

$$\begin{aligned} \theta_i^2 &= \vartheta_i^2 + 2k_i x_i \vartheta_i \varphi_i \quad (i = 1, 2), \\ \theta_1 \theta_2 &= \vartheta_1 \vartheta_2 + k_1 x_1 \varphi_1 \vartheta_2 + k_2 x_2 \varphi_2 \vartheta_1. \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

## 1.5. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Для вывода уравнений равновесия и граничных условий [41] используется принцип возможных перемещений для трехмерного тела [94]. При ограничениях, принятых в разд. 1.3, условие равенства нулю работы всех действующих на тело внешних и внутренних сил на возможных перемещениях запишется в виде

$$\begin{aligned} & - \iint_S \left[ \int_{-h_1}^{h_2} (\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \delta \varepsilon_{22} + \sigma_{12} \delta \varepsilon_{12} + \sigma_{13} \delta \varepsilon_{13} + \sigma_{23} \delta \varepsilon_{23}) \times \right. \\ & \times (1 + k_1 z)(1 + k_2 z) dz \left. \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ & + \iint_S \left[ \int_{-h_1}^{h_2} \mathbf{F} \delta \mathbf{u} (1 + k_1 z)(1 + k_2 z) dz \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \iint_{\sigma} \mathbf{p}_v \delta \mathbf{u} d\sigma = 0. \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

Здесь  $\mathbf{F}$  — вектор внешних объемных сил;  $\mathbf{p}_v$  — вектор внешних поверхностных сил. Трехкратные интегралы берутся по всему

объему оболочки  $V$ , а двукратный — по ограничивающей оболочку поверхности  $\sigma$ . Элемент объема оболочки равен

$$dV = A_1 A_2 (1 + k_1 z)(1 + k_2 z) d\alpha_1 d\alpha_2 dz,$$

элемент поверхности для ограничивающих оболочку поверхностей будет

$$d\sigma = A_1 A_2 (1 \pm k_1 h_i)(1 \pm k_2 h_i) d\alpha_1 d\alpha_2,$$

где берется знак (+) для наружной  $z = h_2$  и знак (-) для внутренней  $z = -h_1$  поверхностей. Элемент поверхности граничного среза вычисляется по формуле

$$d\sigma = ds^2 dz,$$

где  $ds^2$  — длина элемента дуги, образованной пересечением поверхности  $z = \text{const}$  с поверхностью нормального среза оболочки.

При сведении трехмерного функционала (1.5.1) к двумерному компоненты деформации  $\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kj}$  принимаются в виде (1.4.9) с учетом выражений (1.4.10) и (1.4.11). В результате интегрирования по  $z$  функционал (1.5.1) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & - \iint_S [T_{11} \delta E_{11} + T_{22} \delta E_{22} + T_{12} \delta E_{12} + T_{21} \delta E_{21} + M_{11} \delta \kappa_{11} + M_{22} \delta \kappa_{22} + \\ & + M_{12} \delta \kappa_{12} + M_{21} \delta \kappa_{21} + Q_1^{(1)} \delta \varphi_1 + Q_2^{(2)} \delta \varphi_2 + (T_{11} + k_1 M_{11}) \delta \left( \frac{\vartheta_1^2}{2} \right) + \\ & + (T_{22} + k_2 M_{22}) \delta \left( \frac{\vartheta_2^2}{2} \right) + (T_{12} + k_1 M_{12}) \delta \left( \frac{\vartheta_1 \vartheta_2}{2} \right) + (T_{21} + k_2 M_{21}) \delta \left( \frac{\vartheta_1 \vartheta_2}{2} \right) + \\ & + \frac{1}{A_1} \left( M_{11}^{(1)} \frac{\partial \delta \varphi_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_{11}^{(2)} \delta \varphi_2 \right) + k_1 M_{11}^{(1)} \delta(\varphi_1 \vartheta_1) + \\ & + \frac{1}{A_2} \left( M_{22}^{(2)} \frac{\partial \delta \varphi_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_{22}^{(1)} \delta \varphi_1 \right) + k_2 M_{22}^{(2)} \delta(\varphi_2 \vartheta_2) + \\ & + \frac{A_2}{A_1} M_{12}^{(2)} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{\delta \varphi_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} M_{21}^{(1)} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{\delta \varphi_1}{A_1} \right) + \\ & + k_1 M_{21}^{(1)} \delta(\varphi_1 \vartheta_2) + k_2 M_{12}^{(2)} \delta(\varphi_2 \vartheta_1) ] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ & + \int_C \mathbf{r}_n \delta v dC + \int_C [\mathbf{m}_n, \mathbf{N}_c] \delta \mathbf{N}_c dC + \iint_S (\mathbf{X} \delta \mathbf{v} + \\ & + [\mathbf{L}, \mathbf{N}] \delta \mathbf{N}) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = 0. \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

Здесь использованы обозначения:

$$\int_{-h_1}^{h_2} \sigma_{11} (1 + k_2 z) dz = T_{11}, \quad \int_{-h_1}^{h_2} \sigma_{12} (1 + k_2 z) dz = T_{12},$$



$$\begin{aligned}
& \int_{-h_1}^{h_2} \sigma_{11}(1+k_2z)zdz = M_{11}, \quad \int_{-h_1}^{h_2} \sigma_{12}(1+k_2z)zdz = M_{12}, \\
& \int_{-h_1}^{h_2} \sigma_{13}(1+k_2z)dz = Q_1, \quad \int_{-h_1}^{h_2} \sigma_{11}(1+k_2z)x_i dz = M_{11}^{(i)}, \\
& \int_{-h_1}^{h_2} \sigma_{22}(1+k_1z)x_i dz = M_{22}^{(i)}, \quad \int_{-h_1}^{h_2} \sigma_{12}(1+k_2z)x_i dz = M_{12}^{(i)} \quad (i=1,2), \\
& \int_{-h_1}^{h_2} \sigma_{13}(1+k_2z)f_1 dz = Q_1^{(1)}; (1,2), \mathbf{X} = X_1 \mathbf{k}_1 + X_2 \mathbf{k}_2 + X_3 \mathbf{k}_3 = \\
& = \mathbf{p}_z(1+k_1z)(1+k_2z)|_{z=-h_1}^{z=h_2} + \int_{-h_1}^{h_2} \mathbf{F}(1+k_1z)(1+k_2z)dz, \quad (1.5.3)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{L} = [\mathbf{N}z, \mathbf{p}_z](1+k_1z)(1+k_2z)|_{z=-h_1}^{z=h_2} + \int_{-h_1}^{h_2} [\mathbf{N}z, \mathbf{F}](1+k_1z)(1+k_2z)dz,$$

$\mathbf{p}_\nu = \pm \mathbf{p}_z$  при  $z = \pm h_i$  соответственно, а на граничном срезе  $\mathbf{p}_\nu = p_{\nu 1} \mathbf{k}_1 + p_{\nu 2} \mathbf{k}_2 + p_{\nu 3} \mathbf{k}_3$ ,  $\nu = 1, 2$  для сечений, связанных с ортами

$$\mathbf{k}_1^*, \mathbf{k}_2^*; \mathbf{r}_n = t_n^* \mathbf{n} + s_n^* \boldsymbol{\tau} + q_n^* \mathbf{k}_3,$$

$$t_n^* = \sum_{i,k=1}^2 t_{ik} n_i n_k, s_n^* = \sum_{i,k=1}^2 t_{ik} n_i \tau_k, q_n^* = \sum_{i=1}^2 q_i n_i;$$

$$\mathbf{m}_n = h_n^* \mathbf{n} + g_n^* \boldsymbol{\tau} + f_n^* \mathbf{k}_3, g_n^* = \sum_{i,k=1}^2 m_{ik} n_i n_k,$$

$$h_n^* = - \sum_{i,k=1}^2 m_{ik} n_i \tau_k; t_{11} = \int_{-h_1}^{h_2} p_{11}(1+k_2z)dz, \quad (1.5.4)$$

$$t_{12} = \int_{-h_1}^{h_2} p_{12}(1+k_2z)dz, q_1 = \int_{-h_1}^{h_2} p_{13}(1+k_2z)dz,$$

$$m_{11} = \int_{-h_1}^{h_2} p_{11}(1+k_2z)zdz, m_{12} = \int_{-h_1}^{h_2} p_{12}(1+k_2z)zdz; (1,2),$$

$\mathbf{n}$  — единичный вектор тангенциальной нормали к контуру  $C$ ;  $\boldsymbol{\tau}$  — единичный вектор касательной к контуру;  $C$  — контур, ограничивающий недеформированную ПП  $S$ , образованный пересечением этой поверхности с поверхностью среза оболочки;  $n_i = \mathbf{n} \mathbf{k}_i$ ,  $\tau_i = \boldsymbol{\tau} \mathbf{k}_i$ ,  $i = 1, 2$ ;  $\mathbf{n}^*$ ,  $\boldsymbol{\tau}^*$  — те же векторы для деформированного контура  $C^*$ ,  $n_i^* = \mathbf{n}^* \mathbf{k}_i$ ,  $\tau_i^* = \boldsymbol{\tau}^* \mathbf{k}_i$ ; отметим, что при малых по сравнению с единицей деформациях  $n_i^* \approx n_i$ ,  $\tau_i^* \approx \tau_i$ .

Как видно из соотношений (1.5.3), величины  $T_{ik}$  и  $M_{ik}$  являются соответственно физическими усилиями и моментами. Что касается ве-

личин  $M_{ik}^{(j)}$ , то их можно рассматривать как некоторые приведенные моменты. Если положить  $f_1(z) = f_2(z) = 1$ , что соответствует постоянному по толщине сдвигу, то получим  $M_{ik}^{(j)} = M_{ik}$ , т.е. величины  $M_{ik}^{(j)}$

становятся физическими моментами. Величины  $Q_1^{(1)}, Q_2^{(2)}$  представляют собой приведенные перерезывающие силы. При  $f_1(z) = f_2(z) = 1$  они также становятся физическими перерезывающими силами:

$$Q_1^{(1)} = Q_1, Q_2^{(2)} = Q_2.$$

Через  $X$  и  $L$  обозначены соответственно главный вектор и главный момент внешних поверхностных и объемных сил, а через  $g_n$  и  $m_n$  — главный вектор и главный момент внешних сил, действующих на граничный срез  $\Sigma$  оболочки; в дальнейшем влиянием  $L$  пренебрегаем;  $N_c$  — некоторое осреднение по  $z$  вектора  $N$ .

Применяя к функционалу (1.5.2) известную процедуру преобразования [88]

$$\iint_S f \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = \int_C f \varphi A_1 n_1 dC - \iint_S \varphi \frac{\partial f A_1 A_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 d\alpha_2; \quad (1,2),$$

получим уравнения равновесия элемента оболочки и граничные условия. Поскольку независимо варьируются функции перемещения  $v_1, v_2, w$  и функции сдвига  $\varphi_1, \varphi_2$ , то из принципа возможных перемещений следуют пять уравнений равновесия, причем последние два будут уравнениями моментов относительно осей  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A_2 T_{11}}{\partial \alpha_1} - T_{22} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + T_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1 T_{21}}{\partial \alpha_2} + k_1 \left( \frac{\partial A_2 M_{11}}{\partial \alpha_1} - M_{22} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \right. \\ & \left. + M_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1 M_{21}}{\partial \alpha_2} \right) - A_1 A_2 k_1 [(T_{11} + k_1 M_{11}) \vartheta_1 + (T_{12} + k_1 M_{12}) \vartheta_2 + \\ & \left. + M_{11}^{(1)} k_1 \varphi_1 + M_{12}^{(2)} k_2 \varphi_2 \right] + A_1 A_2 X_1 = 0; \end{aligned} \quad (1,2);$$

$$\begin{aligned} & -A_1 A_2 (k_1 T_{11} + k_2 T_{22}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 M_{11}) - M_{22} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + M_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial A_1 M_{21}}{\partial \alpha_1} - A_1 A_2 k_1 (M_{11} \vartheta_1 + M_{12} \vartheta_2) - A_1 A_2 (T_{11} \vartheta_1 + T_{12} \vartheta_2) - \right. \right. \\ & \left. \left. - A_1 A_2 (k_1 M_{11}^{(1)} \varphi_1 + k_2 M_{12}^{(2)} \varphi_2) \right] \frac{1}{A_1} \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left\{ \left[ \frac{\partial A_1 M_{22}}{\partial \alpha_2} - M_{11} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + M_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2 M_{12}}{\partial \alpha_2} - \right. \right. \\
& - A_1 A_2 k_2 (M_{22} \vartheta_2 + M_{21} \vartheta_1) - A_1 A_2 (T_{22} \vartheta_2 + T_{21} \vartheta_1) - \\
& \left. \left. - A_1 A_2 \left( k_2 M_{22}^{(2)} \varphi_2 + k_1 M_{21}^{(1)} \varphi_1 \right) \right] \frac{1}{A_2} \right\} + A_1 A_2 X_3 = 0; \\
& A_1 A_2 k_1 \left( M_{11}^{(1)} \vartheta_1 + M_{12}^{(1)} \vartheta_2 \right) - \frac{\partial A_2 M_{11}^{(1)}}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1 M_{21}^{(1)}}{\partial \alpha_2} - \\
& - M_{12}^{(1)} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + M_{22}^{(1)} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + A_1 A_2 Q_1^{(1)} = 0; (1, 2).
\end{aligned} \tag{1.5.5}$$

Контурный интеграл в недеформированных осях примет вид

$$\begin{aligned}
& \int_C \left[ (T_n^n - t_n^n) \delta v_n + (S_n^n - s_n^n) \delta v_s + (Q_n^n - q_n^n) \delta w + \right. \\
& + (G_n^n - g_n^n) \delta \left( -\frac{dw}{dn} + l_1 \varphi_n - \tilde{\sigma}_n v_n + \tilde{\tau} v_s \right) - \\
& \left. - (H_n^n - h_n^n) \delta \left( -\frac{dw}{ds} + l_2 \varphi_s - \tilde{\sigma} v_s + \tilde{\tau} v_n \right) \right] dC = 0,
\end{aligned} \tag{1.5.6}$$

или в векторной форме

$$\int_C \left\{ (\mathbf{K}_n - \mathbf{r}_n) \delta \mathbf{v} + [(\mathbf{M}_n - \mathbf{m}_n), \mathbf{N}_c] \delta \mathbf{N}_c \right\} dC = 0. \tag{1.5.7}$$

Контурный интеграл (1.5.6) позволяет записать пять граничных условий на контуре  $C$ . А именно статические граничные условия

$$T_n^H = t_n^H, S_n^H = s_n^H, Q_n^H = q_n^H, G_n^H = g_n^H, H_n^H = h_n^H$$

или геометрические граничные условия

$$\begin{aligned}
& \delta v_n = 0, \delta v_s = 0, \delta w = 0, \delta \left( -\frac{dw}{dn} + l_1 \varphi_n - \tilde{\sigma}_n v_n + \tilde{\tau} v_s \right) = 0, \\
& \delta \left( -\frac{dw}{ds} + l_2 \varphi_s - \tilde{\sigma} v_s + \tilde{\tau} v_n \right) = 0
\end{aligned}$$

Смешанные граничные условия будут комбинацией статических и геометрических условий.

В (1.5.6) и (1.5.7) использованы обозначения:  $\mathbf{K}_n, \mathbf{M}_n$  — соответственно главный вектор и главный момент внутренних усилий и моментов на деформированном срезе оболочки с нормалью  $\mathbf{n}^*$ ;  $\tilde{\sigma} = -(k_1 \tau_1^2 + k_2 \tau_2^2)$  — нормальная кривизна сечения ПП в точках контура с касательной  $\boldsymbol{\tau}$ ;  $\tilde{\tau} = n_1 n_2 (k_2 - k_1)$  — геодезическое кручение кривой  $C$ ;

$\tilde{\sigma}_n = -\tilde{\sigma} - (k_1 + k_2)$  — нормальная кривизна сечения поверхности с касательной  $n$ ;

$$\varphi_n = \varphi_1 n_1 + \varphi_2 n_2, \frac{dw}{dn} = \frac{n_1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + \frac{n_2}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2},$$

$$\varphi_s = \varphi_1 \tau_1 + \varphi_2 \tau_2, \frac{dw}{ds} = \frac{\tau_1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + \frac{\tau_2}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2},$$

$$v_n = v n = v_1 n_1 + v_2 n_2, v_s = v \tau = v_1 \tau_1 + v_2 \tau_2.$$

Векторы  $K_n, M_n$  определяются следующим образом. С учетом принятых допущений, используя соотношения (1.2.10), (1.2.11), получаем выражения векторов напряжений, действующих в сечениях деформированной оболочки с ортами  $k_1^*, k_2^*$ :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{11} k_1 + \sigma_{12} k_2 + \left[ \sigma_{11} \left( \frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) + \sigma_{12} \left( \frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) + \sigma_{13} \right] k_3, \\ \sigma_2 &= \sigma_{21} k_1 + \sigma_{22} k_2 + \left[ \sigma_{21} \left( \frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) + \sigma_{22} \left( \frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) + \sigma_{23} \right] k_3. \end{aligned} \quad (1.5.8)$$

Тогда главный вектор усилий в сечении  $k_1^*$  с учетом обозначений (1.5.3) будет

$$K_1 = \int_{-h_1}^{h_2} \sigma_1 (1 + k_2 z) dz = T_{11} k_1 + T_{12} k_2 + Q_1^n k_3; (1, 2), \quad (1.5.9)$$

где

$$\begin{aligned} Q_1^n &= \int_{-h_1}^{h_2} \left[ \sigma_{11} \left( \frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) + \sigma_{12} \left( \frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) + \sigma_{13} \right] (1 + k_2 z) dz = Q_1 - T_{11} \vartheta_1 - \\ &- T_{12} \vartheta_2 - k_1 \varphi_1 M_{11}^{(1)} - k_2 \varphi_2 M_{12}^{(2)}; (1, 2). \end{aligned} \quad (1.5.10)$$

Здесь  $Q_1$  — физическое перерезывающее усилие, которое можно выразить через физические моменты, положив в последнем уравнении системы (1.5.5)  $f_1 = f_2 = 1$ :

$$\begin{aligned} A_1 A_2 Q_1 &= \frac{\partial A_2 M_{11}}{\partial \alpha_1} - M_{22} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 M_{21}}{\partial \alpha_2} + M_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - A_1 A_2 k_1 \times \\ &\times (M_{11} \vartheta_1 + M_{12} \vartheta_2); (1, 2). \end{aligned} \quad (1.5.11)$$

Соответственно можно получить главный момент напряжений в сечении  $k_1^*$  относительно точки, деформированной ПП:

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_{-h_1}^{h_2} [Nz, \sigma_1] (1 + k_2 z) dz = M_{11} k_2 - M_{12} k_1 + (M_{12} \vartheta_1 - M_{11} \vartheta_2 + \\ &+ M_{12}^{(1)} \varphi_1 - M_{11}^{(2)} \varphi_2) k_3; (1, 2). \end{aligned} \quad (1.5.12)$$

Таким образом, главный вектор усилий на деформированном срезе оболочки с нормалью  $\mathbf{n}^*$  будет

$$\mathbf{K}_n = n_1^* \mathbf{K}_1 + n_2^* \mathbf{K}_2 \approx n_1 \mathbf{K}_1 + n_2 \mathbf{K}_2 = T_n^* \mathbf{n} + S_n^* \boldsymbol{\tau} + Q_n^* \mathbf{k}_3,$$

$$T_n^* = \mathbf{K}_n \mathbf{n} = \sum_{i,k=1}^2 T_{ik} n_i n_k, S_n^* = \mathbf{K}_n \boldsymbol{\tau} = \sum_{i,k=1}^2 T_{ik} n_i \tau_k, \quad (1.5.13)$$

$$Q_n^* = \mathbf{K}_n \mathbf{k}_3 = \sum_{i=1}^2 Q_i^* n_i.$$

Главный момент напряжений на том же срезе

$$\mathbf{M}_n \approx n_1 \mathbf{M}_1 + n_2 \mathbf{M}_2 = H_n^* \mathbf{n} + G_n^* \boldsymbol{\tau} + F_n^* \mathbf{k}_3,$$

$$H_n^* = \mathbf{M}_n \mathbf{n} = - \sum_{i,k=1}^2 M_{ik} n_i \tau_k, G_n^* = \mathbf{M}_n \boldsymbol{\tau} = \sum_{i,k=1}^2 M_{ik} n_i n_k. \quad (1.5.14)$$

В контурных интегралах (1.5.6) и (1.5.7) участвуют вектор  $\mathbf{N}_c$ , равный  $\mathbf{N}$  при некоторых фиксированных значениях функций  $(x_1/z)^*$ ,  $(x_2/z)^*$ , и коэффициенты  $l_1, l_2$ , которые должны вычисляться из условий вида  $M_{11}^{(1)} = l_1 M_{11}$  при конкретном задании функций  $f_1(z), f_2(z)$ . Например, при  $f_1(z) = f_2(z) = 1$   $l_1 = l_2 = x_1/z = x_2/z = 1$ ; при  $f_1 = f_2 = 1 - 4z^2/h^2$  можно приближенно получить  $l_1 = l_2 = (x_1/z)^* = (x_2/z)^* = 0,8$ .

С учетом выражений (1.5.10) и (1.5.11) систему (1.5.5) запишем в виде

$$\frac{\partial A_2 T_{11}}{\partial \alpha_1} - T_{22} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + T_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1 T_{21}}{\partial \alpha_2} + A_1 A_2 (k_1 Q_1^* + X_1) = 0; \quad (1,2),$$

$$\frac{\partial A_2 Q_1^*}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 Q_2^*}{\partial \alpha_2} - A_1 A_2 (k_1 T_{11} + k_2 T_{22} - X_3) = 0, \quad (1.5.15)$$

$$\frac{\partial A_2 M_{11}^{(1)}}{\partial \alpha_1} - M_{22}^{(1)} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 M_{21}^{(1)}}{\partial \alpha_2} + M_{12}^{(1)} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - \frac{A_1 A_2 k_1 (M_{11}^{(1)} \vartheta_1 + M_{12}^{(1)} \vartheta_2)}{A_1 A_2 k_1 (M_{11}^{(1)} \vartheta_1 + M_{12}^{(1)} \vartheta_2)} =$$

$$= A_1 A_2 Q_1^{(1)}; (1,2).$$

Первые три уравнения системы (1.5.15) можно представить в векторной записи:

$$\frac{\partial A_2 \mathbf{K}_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 \mathbf{K}_2}{\partial \alpha_2} + A_1 A_2 \mathbf{X} = 0,$$

что по форме совпадает с уравнением [88, (7.1)] при условии  $A_i^* \approx A_i$ .

Отметим, что векторная запись контурного интеграла (1.5.7) также получается по форме, совпадающей с формулой [88, (10.12)], если заметить орт нормали к деформированной ПП  $\mathbf{m}^*$  на вектор  $\mathbf{N}_c$ . Что касается уравнений моментов системы (1.5.15), то последние отличаются от соответствующих уравнений [88, (7.5)] подчеркнутыми нелинейными членами, которые обусловлены предположением о нетонкости оболочки.

## 1.6. УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ТИПА С.П. ТИМОШЕНКО

В разд. 1.4 и 1.5 с помощью вариационного принципа Лагранжа из трехмерных уравнений теории упругости получены геометрически нелинейные соотношения для оболочки средней толщины, слабо сопротивляющейся деформации поперечного сдвига. Видно, что вариационный принцип осредняет функции (1.4.1) по нормальной координате  $z$ , в уравнениях равновесия и контурном интеграле функции  $f_1(z), f_2(z)$  явно не присутствуют. Тогда с самого начала в постановке задачи можно принять

$$f_1(z) = f_2(z) = 1, \quad (1.6.1)$$

что дает

$$l_1 = l_2 = x_1(z)/z = x_2(z)/z = 1.$$

В этом случае получаются уравнения теории типа С.П. Тимошенко, в которой учитывается, что нормаль к недеформированной ПП в процессе деформирования не остается нормалью к деформированной ПП, но не учитывается ее искривление. В дальнейшем в соотношениях принята теория типа С.П. Тимошенко.

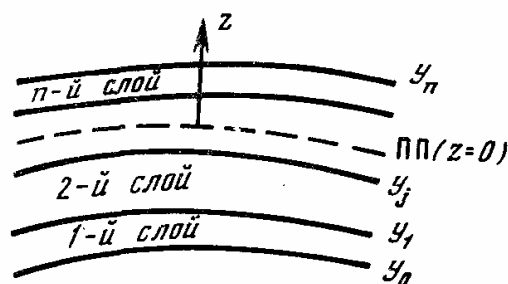


Рис. 1.6

Конечно, допущения (1.6.1) носят геометрический характер. Ими нельзя пользоваться при определении напряжений  $\sigma_{13}, \sigma_{23}$ . Для получения  $\sigma_{13}, \sigma_{23}$  можно использовать перерезывающие силы  $Q_1, Q_2$ . При этом необходимо выполнить условия

$$Q_1 = \int_{-h_1}^{h_2} \sigma_{13}(1+k_2z)dz, Q_2 = \int_{-h_1}^{h_2} \sigma_{23}(1+k_1z)dz. \quad (1.6.2)$$

На основе результатов разд. 1.4 и 1.5 далее приводятся соотношения [27] теории типа С.П. Тимошенко для многослойной непологой нетонкой оболочки с  $n$  слоями из ортотропного материала переменной толщины (рис. 1.6). При этом упругие характеристики материала слоев оболочки должны различаться между собой умеренно, так как в противном случае принятие гипотезы (1.6.1) для всего пакета по толщине оболочки может приводить к значительной погрешности при определении ее напряженно-деформированного состояния. Основными геометрическими соотношениями являются следующие:

перемещения:

$$u_1 = v_1 + z\vartheta_I, u_3 = w; (1, 2); \quad (1.6.3)$$

повороты:

$$\vartheta_1 = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + k_1 v_1; (1, 2); \quad (1.6.4)$$

обобщенные повороты:

$$\vartheta_I = \vartheta_1 + \varphi_1, \theta_1 = \vartheta_1 + \underline{k_1 z \varphi_1}, \quad (1.6.5)$$

$$\theta_1^2 \approx \vartheta_1^2 + \underline{2k_1 z \vartheta_1 \varphi_1}; \quad (1.6.6)$$

$$\theta_1 \theta_2 \approx \vartheta_1 \vartheta_2 + \underline{k_1 z \varphi_1 \vartheta_2 + k_2 z \varphi_2 \vartheta_1}; (1, 2);$$

линейные части деформаций ПП:

$$E_{11} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1} + \frac{v_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + k_1 w, \quad (1.6.7)$$

$$E_{12} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_1} - \frac{v_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}; (1, 2);$$

изменения кривизн и кручения ПП:

$$\kappa_{11} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\vartheta_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2},$$

$$\kappa_{12} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\vartheta_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}; (1, 2); \quad (1.6.8)$$

обобщенные кривизны и кручение:

$$\kappa_I = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \vartheta_I}{\partial \alpha_1} + \frac{\vartheta_{II}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2},$$

$$\kappa_{III} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \vartheta_{II}}{\partial \alpha_1} - \frac{\vartheta_I}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}; (1, 2); \quad (1.6.9)$$

деформации на уровне  $z$  от ПП:

$$\varepsilon_{11} = (E_{11} + z\kappa_I) / (1 + \underline{k_1 z}) + 0,5\theta_1^2,$$

$$\varepsilon_{12} = (E_{12} + z\kappa_{II}) / (1 + \underline{k_1 z}) + (E_{21} + z\kappa_{II}) / (1 + \underline{k_2 z}) + \theta_1 \theta_2, \quad (1.6.10)$$

$$\varepsilon_{13} = \varphi_1(\alpha_1, \alpha_2); (1, 2).$$

Обычным образом вводятся усилия и моменты:

$$T_{11} = \int_{y_0}^{y_n} \sigma_{11} (1 + \underline{k_2 z}) dz, T_{12} = \int_{y_0}^{y_n} \sigma_{12} (1 + \underline{k_2 z}) dz,$$

$$Q_1 = \int_{y_0}^{y_n} \sigma_{13} (1 + \underline{k_2 z}) dz, M_{11} = \int_{y_0}^{y_n} \sigma_{11} (1 + \underline{k_2 z}) z dz, \quad (1.6.11)$$

$$M_{12} = \int_{y_0}^{y_n} \sigma_{12} (1 + \underline{k_2 z}) z dz; (1, 2).$$



Связь между усилиями в деформированных и недеформированных осях будет

$$\begin{aligned} T_{11}^H &\approx T_{11} + Q_1 \vartheta_1, T_{12}^H \approx T_{12} + Q_1 \vartheta_2, \\ Q_1^H &\approx Q_1 - T_{11} \vartheta_1 - T_{12} \vartheta_2 - \underline{k_1 \varphi_1 M_{11}} - \underline{k_2 \varphi_2 M_{12}}; (1,2). \end{aligned} \quad (1.6.12)$$

Уравнения равновесия и контурный интеграл в недеформированных осях приводятся к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_2 T_{11}^H}{\partial \alpha_1} - T_{22}^H \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + T_{12}^H \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1 T_{21}^H}{\partial \alpha_2} A_1 A_2 (k_1 Q_1^H + X_1^H) &= 0, \\ \frac{\partial A_2 Q_1^H}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 Q_2^H}{\partial \alpha_2} - A_1 A_2 (k_1 T_{11}^H + k_2 T_{22}^H - X_3^H) &= 0, \\ \frac{\partial A_2 M_{11}}{\partial \alpha_1} - M_{22} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 M_{21}}{\partial \alpha_2} + M_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - \underline{A_1 A_2 k_1} (M_{11} \vartheta_1 + M_{12} \vartheta_2) &= \\ = A_1 A_2 Q_1; (1,2); \end{aligned} \quad (1.6.13)$$

$$\int_c \left[ (T_n^H - t_n^H) \delta v_n + (S_n^H - s_n^H) \delta v_s + (Q_n^H - q_n^H) \delta w + (G_n^H - g_n^H) \delta \vartheta_n - (H_n^H - h_n^H) \delta \vartheta_s \right] dC = 0, \quad (1.6.14)$$

где

$$\vartheta_n = -\frac{dw}{dn} - \tilde{\sigma}_n v_n + \tilde{t} v_s + \varphi_n, \vartheta_s = -\frac{dw}{ds} - \tilde{\sigma} v_s + \tilde{t} v_n + \varphi_s. \quad (1.6.15)$$

Отметим, что в формулах (1.6.3)–(1.6.13) подчеркнутые члены выпадут для тонкой оболочки.

## 1.7. ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ

Выражения напряжений в  $j$ -м слое можно представить в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^j &= A_j \varepsilon_{11} + C_j \varepsilon_{22} + \Delta \sigma_{11}^j, \sigma_{22}^j = C_j \varepsilon_{11} + B_j \varepsilon_{22} + \Delta \sigma_{22}^j, \\ \sigma_{12}^j &= G_{12}^j \varepsilon_{12} + \Delta \sigma_{12}^j, \sigma_{13}^j = G_{13}^j \varepsilon_{13} + \Delta \sigma_{13}^j, \sigma_{23}^j = G_{23}^j \varepsilon_{23} + \Delta \sigma_{23}^j. \end{aligned} \quad (1.7.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_j &= E_1^j / \tilde{\nu}^j, B_j = E_2^j / \tilde{\nu}^j, C_j = E_1^j \nu_{12}^j / \tilde{\nu}^j = E_2^j \nu_{21}^j / \tilde{\nu}^j, \\ \tilde{\nu}^j &= 1 - \nu_{12}^j \nu_{21}^j, G_{12}^j, G_{13}^j, G_{23}^j \end{aligned} \quad (1.7.2)$$

— константы ортотропного материала [3]  $j$ -го слоя;  $\Delta \sigma_{ik}^j$  — упруго-пластические добавки в выражениях напряжений [25]:

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{11}^j &= 2G^j [-\omega \varepsilon_{11} + F(\omega)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})], \\ \Delta \sigma_{22}^j &= 2G^j [-\omega \varepsilon_{22} + F(\omega)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})], \\ \Delta \sigma_{12}^j &= -G^j \omega \varepsilon_{12}, \Delta \sigma_{13}^j = -G^j \omega \varepsilon_{13}, \Delta \sigma_{23}^j = -G^j \omega \varepsilon_{23}. \end{aligned} \quad (1.7.3)$$

При этом  $\omega$  — функция пластичности в соотношении интенсивностей

напряжений  $\sigma_i^j$  и деформаций  $\varepsilon_i$  в деформационной теории пластичности [67]:

$$\sigma_i^j = 3 G^j (1 - \omega) \varepsilon_i.$$

Обозначено:

$$\alpha_1^j = \frac{\nu^j}{1 - \nu^j}, \alpha_2^j = \frac{(1 - 2\nu^j)(1 + \nu^j)}{3(1 - \nu^j)^2}, \alpha_3^j = \frac{2(1 - 2\nu^j)}{3(1 - \nu^j)}, \quad (1.7.4)$$

$$R^j = \frac{\alpha_2^j \omega}{1 - \alpha_3^j \omega}, F(\omega) = -\frac{R^j}{3} \left( \frac{3\nu^j}{1 - 2\nu^j} + \omega \right) + \frac{1 - 2\nu^j}{3(1 - \nu^j)} \omega.$$

С учетом малости напряжения  $\sigma_{33}^j$  для сжимаемого материала [85, 114] поперечная деформация будет следующей:

$$\varepsilon_{33} = -(\alpha_1^j + R^j)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}); \quad (1.7.5)$$

интенсивности напряжений и деформаций выражаются в виде

$$\sigma_i^j = \left[ (\sigma_{11}^j)^2 + (\sigma_{22}^j)^2 - \sigma_{11}^j \sigma_{22}^j + 3 \left( (\sigma_{12}^j)^2 + (\sigma_{23}^j)^2 + (\sigma_{13}^j)^2 \right) \right]^{0,5},$$

$$\varepsilon_i = \frac{2}{3} \left[ (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})^2 \left( 1 + \alpha_1^j + R^j + (\alpha_1^j + R^j)^2 - 3\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{3}{4} (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{13}^2) \right) \right]^{0,5}. \quad (1.7.6)$$

Формулы (1.7.1) формально объединяют два случая: а)  $\omega = 0$  — материал  $j$ -го слоя упругий, ортотропный; константы в слоях постоянны; оси ортотропии совпадают с координатными; б)  $A_j = B_j$ ,

$$E_1^j = E_2^j = E^j, \nu_{12}^j = \nu_{21}^j = \nu^j, C_j = A_j \nu^j, G_{12}^j = G_{13}^j = G_{23}^j = G^j = E^j / \left[ 2(1 + \nu^j) \right]$$

— материал  $j$ -го слоя упругопластический, изотропный, разгрузка не учитывается [50, 65, 123].

## 1.8. ВЫРАЖЕНИЯ УСИЛИЙ И МОМЕНТОВ ЧЕРЕЗ УДЛИНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ КРИВИЗН

С учетом (1.6.10), (1.6.11), (1.7.1)—(1.7.3) получим выражения усилий и моментов через составляющие деформаций [27]. Предварительно введем ряд обозначений:

$$z \left| \frac{y_i}{y_{i-1}} \right| = b_1^i, \frac{z^2}{2} \left| \frac{y_i}{y_{i-1}} \right| = b_2^i, \frac{z^3}{3} \left| \frac{y_i}{y_{i-1}} \right| = b_3^i, \frac{z^4}{4} \left| \frac{y_i}{y_{i-1}} \right| = b_4^i; \quad (1.8.1)$$

$$\mu_1^i = b_1^i + (k_2 - k_1) b_2^i, \mu_2^i = b_2^i + (k_2 - k_1) b_3^i, \mu_3^i = b_1^i + k_2 b_2^i, \mu_4^i = 0,5 \mu_3^i,$$

$$\mu_5^i = k_1 b_2^i, \mu_6^i = b_1^i, \mu_7^i = b_2^i, \mu_8^i = b_3^i + (k_2 - k_1) b_4^i, \mu_9^i = b_2^i + k_2 b_3^i,$$

$$\mu_{10}^i = 0,5 \mu_9^i, \mu_{11}^i = b_3^i, \mu_{12}^i = k_1 b_3^i. \quad (1.8.2)$$

Таблица 1.1

$m$	$k$							
	1	2	5	6	11	12	14	15
1	$A_i\mu_1^i$	$C_i\mu_6^i$	$A_i\mu_2^i$	$C_i\mu_7^i$	$A_i\mu_4^i$	$C_i\mu_4^i$	$A_i\mu_5^i$	$C_i\lambda_5^i$
2	$C_i\mu_6^i$	$B_i\lambda_1^i$	$C_i\mu_7^i$	$B_i\lambda_2^i$	$C_i\lambda_4^i$	$B_i\lambda_4^i$	$C_i\mu_5^i$	$B_i\lambda_5^i$
7	$A_i\mu_2^i$	$C_i\mu_7^i$	$A_i\mu_8^i$	$C_i\mu_{11}^i$	$A_i\mu_{10}^i$	$C_i\mu_{10}^i$	$A_i\mu_{12}^i$	$C_i\lambda_{12}^i$
8	$C_i\mu_7^i$	$B_i\lambda_2^i$	$C_i\mu_{11}^i$	$B_i\lambda_8^i$	$C_i\lambda_{10}^i$	$B_i\lambda_{10}^i$	$C_i\mu_{12}^i$	$B_i\lambda_{12}^i$
$m$	$k$							
	3	4	7	8	13	16	17	
3	$G_{12}^i\mu_1^i$	$G_{12}^i\mu_6^i$	$G_{12}^i\mu_2^i$	$G_{12}^i\mu_7^i$	$G_{12}^i\mu_3^i$	$G_{12}^i\lambda_5^i$	$G_{12}^i\mu_5^i$	
4	$G_{12}^i\mu_6^i$	$G_{12}^i\lambda_1^i$	$G_{12}^i\mu_7^i$	$G_{12}^i\lambda_2^i$	$G_{12}^i\lambda_3^i$	$G_{12}^i\lambda_5^i$	$G_{12}^i\mu_5^i$	
9	$G_{12}^i\mu_2^i$	$G_{12}^i\mu_7^i$	$G_{12}^i\mu_8^i$	$G_{12}^i\mu_{11}^i$	$G_{12}^i\mu_9^i$	$G_{12}^i\lambda_{12}^i$	$G_{12}^i\mu_{12}^i$	
10	$G_{12}^i\mu_7^i$	$G_{12}^i\lambda_2^i$	$G_{12}^i\mu_{11}^i$	$G_{12}^i\lambda_8^i$	$G_{12}^i\lambda_9^i$	$G_{12}^i\lambda_{12}^i$	$G_{12}^i\mu_{12}^i$	

Из  $\mu_j^i, j = \overline{1,12}$ , заменой  $k_1$  на  $k_2, k_2$  на  $k_1$  получаются коэффициенты  $\lambda_j^i, j = \overline{1,12}$ , причем для сферы  $k_1 = k_2$  и  $\lambda_j^i = \mu_j^i$ . Для тонкой оболочки в  $\mu_j^i, \lambda_j^i$  нужно пренебречь членами порядка  $k_1 z, k_2 z$  по сравнению с единицей, тогда  $\mu_j^i = \lambda_j^i, j = \overline{1,12}$ . В табл. 1.1 даны выражения жесткостей  $D_{m,k}$ , где подразумевается суммирование по  $i = \overline{1, n}$  (знак суммы ради краткости записи опущен). Также

$$D_{5,9} = \sum_{i=1}^n G_{13}^i \mu_3^i, D_{6,10} = \sum_{i=1}^n G_{23}^i \lambda_3^i.$$

Добавки в усилиях и моментах, обусловленные геометрической нелинейностью, в векторной записи можно представить в виде

$$\Delta N_{TM}^\Gamma = D_N^\Gamma \Delta \varepsilon_N^\Gamma, \quad (1.8.3)$$

$$\Delta Q_1^\Gamma = 0, \Delta Q_2^\Gamma = 0, \quad \Delta S_{TM}^\Gamma = D_S^\Gamma \Delta \varepsilon_S^\Gamma. \quad (1.8.4)$$

Добавки в усилиях и моментах от учета упругопластической де-

формации будут

$$\begin{aligned}\Delta T_{11}^{\Phi} &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} \Delta \sigma_{11}^i (1+k_2 z) dz, \Delta T_{12}^{\Phi} = \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} \Delta \sigma_{12}^i (1+k_2 z) dz, \\ \Delta M_{11}^{\Phi} &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} \Delta \sigma_{11}^i (1+k_2 z) z dz, \Delta M_{12}^{\Phi} = \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} \Delta \sigma_{12}^i (1+k_2 z) z dz, \\ \Delta Q_1^{\Phi} &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} \Delta \sigma_{13}^i (1+k_2 z) dz; (1.2).\end{aligned}\quad (1.8.5)$$

Окончательно, выражения для усилий и моментов представляются в виде

$$N_{TM} = D_N \varepsilon_N + \Delta N_{TM}^{\Gamma} + \Delta N_{TM}^{\Phi}, \quad (1.8.6)$$

$$S_{TM} = D_S \varepsilon_S + \Delta S_{TM}^{\Gamma} + \Delta S_{TM}^{\Phi}, \quad (1.8.7)$$

$$Q_1 = D_{5,9} \varphi_1 + \Delta Q_1^{\Phi}, Q_2 = D_{6,10} \varphi_2 + \Delta Q_2^{\Phi}. \quad (1.8.8)$$

В формулах (1.8.3), (1.8.4), (1.8.6), (1.8.7) использованы следующие обозначения для векторов и матриц:

$$\begin{aligned}N_{TM} &= (T_{11}, T_{22}, M_{11}, M_{22}), \Delta N_{TM}^{\Gamma} = (\Delta T_{11}^{\Gamma}, \Delta T_{22}^{\Gamma}, \Delta M_{11}^{\Gamma}, \Delta M_{22}^{\Gamma}), \\ \Delta N_{TM}^{\Phi} &= (\Delta T_{11}^{\Phi}, \Delta T_{22}^{\Phi}, \Delta M_{11}^{\Phi}, \Delta M_{22}^{\Phi}), S_{TM} = (T_{12}, T_{21}, M_{12}, M_{21}), \\ \Delta S_{TM}^{\Gamma} &= (\Delta T_{12}^{\Gamma}, \Delta T_{21}^{\Gamma}, \Delta M_{12}^{\Gamma}, \Delta M_{21}^{\Gamma}), \Delta S_{TM}^{\Phi} = (\Delta T_{12}^{\Phi}, \Delta T_{21}^{\Phi}, \Delta M_{12}^{\Phi}, \Delta M_{21}^{\Phi}), \\ \varepsilon_N &= (E_{11}, E_{22}, \kappa_I, \kappa_{II}), \Delta \varepsilon_N^{\Gamma} = (\vartheta_1^2, \vartheta_2^2, \vartheta_1 \varphi_1, \vartheta_2 \varphi_2), \\ \varepsilon_S &= (E_{12}, E_{21}, \kappa_{III}, \kappa_{III}), \Delta \varepsilon_S^{\Gamma} = (\vartheta_1 \vartheta_2, \vartheta_1 \varphi_2, \vartheta_2 \varphi_1),\end{aligned}\quad (1.8.9)$$

$$D_N^{\Gamma} = \begin{Bmatrix} D_{1,11} & D_{1,12} & D_{1,14} & D_{1,15} \\ D_{2,11} & D_{2,12} & D_{2,14} & D_{2,15} \\ D_{7,11} & D_{7,12} & D_{7,14} & D_{7,15} \\ D_{8,11} & D_{8,12} & D_{8,14} & D_{8,15} \end{Bmatrix}, D_S^{\Gamma} = \begin{Bmatrix} D_{3,13} & D_{3,16} & D_{3,17} \\ D_{4,13} & D_{3,16} & D_{3,17} \\ D_{9,13} & D_{9,16} & D_{9,17} \\ D_{10,13} & D_{9,16} & D_{9,17} \end{Bmatrix},$$

$$D_N = \begin{Bmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} & D_{1,5} & D_{1,6} \\ D_{1,2} & D_{2,2} & D_{1,6} & D_{2,6} \\ D_{1,5} & D_{1,6} & D_{7,5} & D_{7,6} \\ D_{1,6} & D_{2,6} & D_{7,6} & D_{8,6} \end{Bmatrix}, D_S = \begin{Bmatrix} D_{3,3} & D_{3,4} & D_{3,7} & D_{3,8} \\ D_{3,4} & D_{4,4} & D_{3,8} & D_{4,8} \\ D_{3,7} & D_{3,8} & D_{9,7} & D_{9,8} \\ D_{3,8} & D_{4,8} & D_{9,8} & D_{10,8} \end{Bmatrix}.$$

**УРАВНЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ  
ОБОЛОЧЕК СРЕДНЕЙ ТОЛЩИНЫ**

**2.1. УРАВНЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ**

При выводе уравнений нейтрального равновесия (линеаризованных уравнений устойчивости) оболочки воспользуемся статическим критерием устойчивости Эйлера [88]. Пусть до деформации оболочка находилась в состоянии, характеризуемом совокупностью соотношений  $\sigma$ , а под действием внешних поверхностных и контурных нагрузок перешла в состояние  $\sigma^I$  (основное состояние). При некоторых значениях параметров оболочки и действующих на нее нагрузок возможно существование смежного состояния  $\sigma^*$ , бесконечно близкого к  $\sigma^I$ , но качественно отличного от него по форме:

$$\sigma^* = \sigma^I + \delta\sigma, \tag{2.1.1}$$

где  $\delta\sigma$  — совокупность соотношений добавочного состояния (первая вариация основного состояния  $\sigma^I$ ). Значения геометрических и нагрузочных параметров, при которых возможно состояние  $\delta\sigma \neq 0$ , являются точкой бифуркации (ветвления) решения нелинейных уравнений равновесия оболочки.

Основное состояние описывается соотношениями разд. 1.6—1.8, в которых к перемещениям, деформациям, напряжениям, усилиям и моментам нужно доавать индекс I вверху. Смежное состояние будет описываться теми же формулами с заменой индекса I на звездочку. Для получения формул, характеризующих добавочное состояние  $\delta\sigma$ , нужно из соотношений  $\sigma^*$  вычесть соотношения  $\sigma^I$ .

Приведем полученные таким образом основные соотношения для добавочного состояния, которые будут линейными в силу близости состояний  $\sigma^I$  и  $\sigma^*$ :

перемещения и деформации:

$$\begin{aligned} \delta v_1 &= v_1^* - v_1^I, \delta w = w^* - w^I, \delta\varphi_1 = \varphi_1^* - \varphi_1^I; \\ \delta\vartheta_1 &= -\frac{1}{A_1} \frac{\partial \delta w}{\partial \alpha_1} + k_1 \delta v_1, \delta\vartheta_I = \delta\vartheta_1 + \delta\varphi_1, \delta\theta_1 = \delta\vartheta_1 + k_1 z \delta\varphi_1; \\ \delta E_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \delta v_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\delta v_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + k_1 \delta w, \delta E_{12} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \delta v_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\delta v_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}; \\ \delta \kappa_I &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \delta\vartheta_I}{\partial \alpha_1} + \frac{\delta\vartheta_{II}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}, \delta \kappa_{III} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \delta\vartheta_{II}}{\partial \alpha_1} - \frac{\delta\vartheta_I}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}; \\ \delta \epsilon_{11} &= \frac{\delta E_{11} + z \delta \kappa_I}{1 + k_1 z} + \theta_1^I \delta\theta_1, \delta \epsilon_{13} = \delta\varphi_1; (1, 2), \\ \delta \epsilon_{12} &= \frac{\delta E_{12} + z \delta \kappa_{III}}{1 + k_1 z} + \frac{\delta E_{21} + z \delta \kappa_{II}}{1 + k_2 z} + \theta_1^I \delta\theta_2 + \theta_2^I \delta\theta_1; \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

связь между усилиями в деформированных и недеформированных осях:

$$\begin{aligned}\delta T_{11}^H &= \delta T_{11} + \vartheta_1^I \delta Q_1 + Q_1^I \delta \vartheta_1, \delta T_{12}^H = \delta T_{12} + \vartheta_{II}^I \delta Q_1 + Q_1^I \delta \vartheta_{II}, \\ \delta Q_1^H &= \delta Q_1 - (T_{11}^I \delta \vartheta_1 + \vartheta_1^I \delta T_{11}) - (T_{12}^I \delta \vartheta_2 + \vartheta_2^I \delta T_{12}) - \\ &- k_1 (\varphi_1^I \delta M_{11} + M_{11}^I \delta \varphi_1) - k_2 (\varphi_2^I \delta M_{12} + M_{12}^I \delta \varphi_2); (1,2);\end{aligned}\quad (2.1.3)$$

напряжения в  $i$ -м слое:

$$\begin{aligned}\delta \sigma_{11}^i &= A_i \delta \varepsilon_{11} + C_i \delta \varepsilon_{22} + \delta \Delta \sigma_{11}^i, \delta \sigma_{22}^i = C_i \delta \varepsilon_{11} + B_i \delta \varepsilon_{22} + \delta \Delta \sigma_{22}^i, \\ \delta \sigma_{12}^i &= G_{12}^i \delta \varepsilon_{12} + \delta \Delta \sigma_{12}^i, \delta \sigma_{13}^i = G_{13}^i \delta \varepsilon_{13} + \delta \Delta \sigma_{13}^i, \\ \delta \sigma_{23}^i &= G_{23}^i \delta \varepsilon_{23} + \delta \Delta \sigma_{23}^i;\end{aligned}\quad (2.1.4)$$

усилия и моменты:

$$\begin{aligned}\delta N_{TM} &= D_N \delta \varepsilon_N + \delta \Delta N_{TM}^\Gamma + \delta \Delta N_{TM}^\Phi; \\ \delta S_{TM} &= D_S \delta \varepsilon_S + \delta \Delta S_{TM}^\Gamma + \delta \Delta S_{TM}^\Phi;\end{aligned}\quad (2.1.5)$$

$$\begin{aligned}\delta Q_1 &= D_{5,9} \delta \varphi_1 + \delta \Delta Q_1^\Phi, \delta Q_2 = D_{6,10} \delta \varphi_2 + \delta \Delta Q_2^\Phi; \delta \Delta N_{TM}^\Gamma = D_N^\Gamma \cdot \delta \Delta \varepsilon_N^\Gamma, \\ \delta \Delta S_{TM}^\Gamma &= D_S^\Gamma \cdot \delta \Delta \varepsilon_S^\Gamma;\end{aligned}\quad (2.1.6)$$

$$\begin{aligned}\delta \Delta T_{11}^\Phi &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} \delta \Delta \sigma_{11}^i (1 + k_2 z) dz, \delta \Delta T_{12}^\Phi = \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} \delta \Delta \sigma_{12}^i (1 + k_2 z) dz; \\ \delta \Delta M_{11}^\Phi &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} \delta \Delta \sigma_{11}^i (1 + k_2 z) z dz, \delta \Delta M_{12}^\Phi = \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} \delta \Delta \sigma_{12}^i (1 + k_2 z) z dz; \\ \delta \Delta Q_1^\Phi &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} \delta \Delta \sigma_{13}^i (1 + k_2 z) dz; (1,2);\end{aligned}\quad (2.1.7)$$

уравнения нейтрального равновесия в недеформированных осях:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_2 \delta T_{11}^H}{\partial \alpha_1} - \delta T_{22}^H \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \delta T_{12}^H \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1 \delta T_{21}^H}{\partial \alpha_2} + A_1 A_2 k_1 \delta Q_1^H + \\ + A_1 A_2 (X_1^{*H} - X_1^{1H}) = 0, \\ \frac{\partial A_2 \delta Q_1^H}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 \delta Q_2^H}{\partial \alpha_2} - A_1 A_2 (k_1 \delta T_{11}^H + k_2 \delta T_{22}^H) + \\ + A_1 A_2 (X_3^{*H} - X_3^{1H}) = 0; (1,2), \\ \frac{\partial A_2 \delta M_{11}^H}{\partial \alpha_1} - \delta M_{22}^H \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \delta M_{12}^H \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1 \delta M_{21}^H}{\partial \alpha_2} - A_1 A_2 k_1 \times \\ \times (M_{11}^I \delta \vartheta_1 + \vartheta_1^I \delta M_{11} + M_{12}^I \delta \vartheta_2 + \vartheta_2^I \delta M_{12}) = A_1 A_2 \delta Q_1.\end{aligned}\quad (2.1.8)$$

В формулах (2.1.5), (2.1.6) использованы обозначения векторов:

$$\begin{aligned}
 \delta N_{TM} &= (\delta T_{11}, \delta T_{22}, \delta M_{11}, \delta M_{22}), \delta \Delta N_{TM}^{\Gamma} = (\delta \Delta T_{11}^{\Gamma}, \delta \Delta T_{22}^{\Gamma}, \delta \Delta M_{11}^{\Gamma}, \delta \Delta M_{22}^{\Gamma}), \\
 \delta \Delta N_{TM}^{\Phi} &= (\delta \Delta T_{11}^{\Phi}, \delta \Delta T_{22}^{\Phi}, \delta \Delta M_{11}^{\Phi}, \delta \Delta M_{22}^{\Phi}), \delta S_{TM} = (\delta T_{12}, \delta T_{21}, \delta M_{12}, \delta M_{21}), \\
 \delta \Delta S_{TM}^{\Gamma} &= (\delta \Delta T_{12}^{\Gamma}, \delta \Delta T_{21}^{\Gamma}, \delta \Delta M_{12}^{\Gamma}, \delta \Delta M_{21}^{\Gamma}), \quad (2.1.9) \\
 \delta \varepsilon_N &= (\delta E_{11}, \delta E_{22}, \delta \kappa_I, \delta \kappa_{II}), \delta \Delta S_{TM}^{\Phi} = (\delta \Delta T_{12}^{\Phi}, \delta \Delta T_{21}^{\Phi}, \delta \Delta M_{12}^{\Phi}, \delta \Delta M_{21}^{\Phi}), \\
 \delta \varepsilon_S &= (\delta E_{12}, \delta E_{21}, \delta \kappa_{III}, \delta \kappa_{III}), \\
 \delta \Delta \varepsilon_N^{\Gamma} &= (2\vartheta_1^I \delta \vartheta_1, 2\vartheta_2^I \delta \vartheta_2, \vartheta_1^I \delta \varphi_1 + \varphi_1^I \delta \vartheta_1, \vartheta_2^I \delta \varphi_2 + \varphi_2^I \delta \vartheta_2), \\
 \delta \Delta \varepsilon_S^{\Gamma} &= (\vartheta_1^I \delta \vartheta_2 + \vartheta_2^I \delta \vartheta_1, \vartheta_1^I \delta \varphi_2 + \varphi_2^I \delta \vartheta_1, \vartheta_2^I \delta \varphi_1 + \varphi_1^I \delta \vartheta_2).
 \end{aligned}$$

## 2.2. ВАРИАЦИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДОБАВОК В НАПРЯЖЕНИЯХ, УСИЛИЯХ И МОМЕНТАХ

Специального рассмотрения требует получение выражений вариаций упругопластических добавок в напряжениях, усилиях и моментах через вариации деформаций [29]. Ради краткости в дальнейшем в соотношениях (2.2.1)—(2.2.5) номер слоя  $i$  опускается.

Из (1.7.3) следует:

$$\begin{aligned}
 \delta \Delta \sigma_{11} &= 2G \left[ -\varepsilon_{11}^I \delta \omega - \omega^I \delta \varepsilon_{11} + (\delta \varepsilon_{11} + \delta \varepsilon_{22}) F^I + \delta F (\varepsilon_{11}^I + \varepsilon_{22}^I) \right], \\
 \delta \Delta \sigma_{12} &= -G (\varepsilon_{12}^I \delta \omega + \omega^I \delta \varepsilon_{12}), \delta \Delta \sigma_{13} = -G (\varepsilon_{13}^I \delta \omega + \omega^I \delta \varepsilon_{13}); (1,2). \quad (2.2.1)
 \end{aligned}$$

Но

$$\delta \omega = \left( \frac{\partial \omega}{\partial \varepsilon_i} \right)^I \delta \varepsilon_i, \delta F = \left( \frac{\partial F}{\partial \omega} \right)^I \left( \frac{\partial \omega}{\partial \varepsilon_i} \right)^I \delta \varepsilon_i,$$

где при заданном законе деформирования материала функции  $(\partial \omega / \partial \varepsilon_i)^I$ ,  $(\partial F / \partial \omega)^I$  будут известны.

Следуя А.А. Ильюшину [66], для сжимаемого материала получим вариацию интенсивности деформаций  $\delta \varepsilon_i$  как линейную комбинацию вариаций деформаций. Трехмерные соотношения теории малых упругопластических деформаций для основного состояния имеют вид [67]

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_i^I &= \frac{\sqrt{2}}{3} \left[ (\varepsilon_{11}^I - \varepsilon_{22}^I)^2 + (\varepsilon_{22}^I - \varepsilon_{33}^I)^2 + (\varepsilon_{33}^I - \varepsilon_{11}^I)^2 + \frac{3}{2} (\varepsilon_{12}^I + \varepsilon_{23}^I + \varepsilon_{13}^I) \right]^{0,5}, \\
 3\sigma^I &= \sigma_{11}^I + \sigma_{22}^I + \sigma_{33}^I, 3\varepsilon^I = \varepsilon_{11}^I + \varepsilon_{22}^I + \varepsilon_{33}^I, \\
 \frac{\sigma_{11}^I - \sigma^I}{\sigma_i^I} &= \frac{2}{3\varepsilon_i^I} (\varepsilon_{11}^I - \varepsilon^I), \frac{\sigma_{12}^I}{\sigma_i^I} = \frac{\varepsilon_{12}^I}{3\varepsilon_i^I}; (1,2,3).
 \end{aligned}$$



Тогда

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_i &= \left( \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_{11}} \right)^I \delta \varepsilon_{11} + \left( \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_{22}} \right)^I \delta \varepsilon_{22} + \left( \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_{33}} \right)^I \delta \varepsilon_{33} + \left( \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_{12}} \right)^I \delta \varepsilon_{12} + \\ &+ \left( \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_{13}} \right)^I \delta \varepsilon_{13} + \left( \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_{23}} \right)^I \delta \varepsilon_{23}, \left( \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_{11}} \right)^I = \frac{2}{3\varepsilon_i^I} (\varepsilon_{11}^I - \varepsilon^I) = \\ &= \frac{\sigma_{11}^I - \sigma^I}{\sigma_i^I}; \left( \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_{12}} \right)^I = \frac{\varepsilon_{12}^I}{3\varepsilon_i^I} = \frac{\sigma_{12}^I}{\sigma_i^I}; (1, 2, 3). \end{aligned}$$

С учетом (1.7.4.) и (1.7.5) запишем

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{33} &= -(\alpha_1 + R^I)(\delta \varepsilon_{11} + \delta \varepsilon_{22}) - (\varepsilon_{11}^I + \varepsilon_{22}^I) \delta R, \\ \delta R &= \left( \frac{\partial R}{\partial \omega} \right)^I \left( \frac{\partial \omega}{\partial \varepsilon_i} \right)^I \delta \varepsilon_i. \end{aligned}$$

Окончательно представим вариацию  $\delta \varepsilon_i$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_i \left[ 1 - \frac{\sigma^I}{\sigma_i^I} (\varepsilon_{11}^I + \varepsilon_{22}^I) \left( \frac{\partial R}{\partial \omega} \right)^I \left( \frac{\partial \omega}{\partial \varepsilon_i} \right)^I \right] \sigma_i^I &= \left[ \sigma_{11}^I + (\alpha_1 + R^I - 1) \sigma^I \right] \delta \varepsilon_{11} + \\ &+ \left[ \sigma_{22}^I + (\alpha_1 + R^I - 1) \sigma^I \right] \delta \varepsilon_{22} + \sigma_{12}^I \delta \varepsilon_{12} + \sigma_{13}^I \delta \varepsilon_{13} + \sigma_{23}^I \delta \varepsilon_{23}. \quad (2.2.2) \end{aligned}$$

Введем для основного состояния обобщенную интенсивность напряжений

$$\bar{\sigma}_i^I = \sigma_i^I \left[ 1 - \frac{\sigma^I}{\sigma_i^I} (\varepsilon_{11}^I + \varepsilon_{22}^I) \left( \frac{\partial R}{\partial \omega} \right)^I \left( \frac{\partial \omega}{\partial \varepsilon_i} \right)^I \right]$$

и приведенные напряжения

$$\begin{aligned} \Pi_{11}^I &= \left( \frac{\partial \omega}{\partial \varepsilon_i} \right)^I \frac{\sigma_{11}^I + (\alpha_1 + R^I - 1) \sigma^I}{\bar{\sigma}_i^I}, \\ \Pi_{12}^I &= \left( \frac{\partial \omega}{\partial \varepsilon_i} \right)^I \frac{\sigma_{12}^I}{\bar{\sigma}_i^I}, \quad \Pi_{13}^I = \left( \frac{\partial \omega}{\partial \varepsilon_i} \right)^I \frac{\sigma_{13}^I}{\bar{\sigma}_i^I}; (1, 2). \quad (2.2.3) \end{aligned}$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} (11) &= -\varepsilon_{11}^I + (\varepsilon_{11}^I + \varepsilon_{22}^I) (\partial F / \partial \omega)^I, \quad (22) = -\varepsilon_{22}^I + (\varepsilon_{11}^I + \varepsilon_{22}^I) (\partial F / \partial \omega)^I; \\ N_{1,1}^I &= -\omega^I + F^I + (11) \Pi_{11}^I, \quad N_{1,2}^I = F^I + (11) \Pi_{22}^I, \\ N_{1,3}^I &= (11) \Pi_{12}^I, \quad N_{1,4}^I = (11) \Pi_{13}^I, \quad N_{1,5}^I = (11) \Pi_{23}^I; \\ N_{2,1}^I &= F^I + (22) \Pi_{11}^I, \quad N_{2,2}^I = -\omega^I + F^I + (22) \Pi_{22}^I, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{2,3}^I &= (22)\Pi_{12}^I, N_{2,4}^I = (22)\Pi_{13}^I, N_{2,5}^I = (22)\Pi_{23}^I; \\
N_{3,1}^I &= -\varepsilon_{12}^I \Pi_{11}^I, N_{3,2}^I = -\varepsilon_{12}^I \Pi_{22}^I, N_{3,3}^I = -\omega^I - \varepsilon_{12}^I \Pi_{12}^I, \\
N_{3,4}^I &= -\varepsilon_{12}^I \Pi_{13}^I, N_{3,5}^I = -\varepsilon_{12}^I \Pi_{23}^I; \\
N_{4,1}^I &= -\varepsilon_{13}^I \Pi_{11}^I, N_{4,2}^I = -\varepsilon_{13}^I \Pi_{22}^I, N_{4,3}^I = -\varepsilon_{13}^I \Pi_{12}^I, \\
N_{4,4}^I &= -\omega^I - \varepsilon_{13}^I \Pi_{13}^I, N_{4,5}^I = -\varepsilon_{13}^I \Pi_{23}^I; \\
N_{5,1}^I &= -\varepsilon_{23}^I \Pi_{11}^I, N_{5,2}^I = -\varepsilon_{23}^I \Pi_{22}^I, N_{5,3}^I = -\varepsilon_{23}^I \Pi_{12}^I, \\
N_{5,4}^I &= -\varepsilon_{23}^I \Pi_{13}^I, N_{5,5}^I = -\omega^I - \varepsilon_{23}^I \Pi_{23}^I.
\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Тогда вариации упругопластических добавок к напряжениям запишутся через вариации деформаций в виде

$$\begin{Bmatrix} \delta\Delta\sigma_{11}/2 \\ \delta\Delta\sigma_{22}/2 \\ \delta\Delta\sigma_{12} \\ \delta\Delta\sigma_{13} \\ \delta\Delta\sigma_{23} \end{Bmatrix} = G \begin{Bmatrix} N_{1,1}^I & N_{1,2}^I & N_{1,3}^I & N_{1,4}^I & N_{1,5}^I \\ N_{2,1}^I & N_{2,2}^I & N_{2,3}^I & N_{2,4}^I & N_{2,5}^I \\ N_{3,1}^I & N_{3,2}^I & N_{3,3}^I & N_{3,4}^I & N_{3,5}^I \\ N_{4,1}^I & N_{4,2}^I & N_{4,3}^I & N_{4,4}^I & N_{4,5}^I \\ N_{5,1}^I & N_{5,2}^I & N_{5,3}^I & N_{5,4}^I & N_{5,5}^I \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\varepsilon_{11} \\ \delta\varepsilon_{22} \\ \delta\varepsilon_{12} \\ \delta\varepsilon_{13} \\ \delta\varepsilon_{23} \end{Bmatrix}. \tag{2.2.5}$$

Отметим, что при учете деформации поперечного сдвига в уравнениях равновесия тонких оболочек функции сдвига  $\varphi_i (i = 1, 2)$  не появляются в геометрически нелинейных членах. В соотношениях же для оболочек средней толщины геометрически нелинейные члены, содержащие функции  $\varphi_i (i = 1, 2)$ , имеют порядок  $k_j z$  по сравнению с основными. Поэтому в тех случаях, когда функции сдвига  $\varphi_i (i = 1, 2)$  играют поправочную роль по отношению к геометрическим функциям поворота  $\vartheta_i$ , в геометрически нелинейных членах можно сделать следующие пренебрежения [30]:

$$k_j z \varphi_i \ll \vartheta_i. \tag{2.2.6}$$

Тогда перемещения, деформации, уравнения равновесия и напряжения для основного состояния определяются формулами (1.6.3) — (1.6.14), (1.7.1) — (1.7.3), в которых соответствующим величинам нужно присвоить индекс I и пренебречь нелинейными членами согласно условию (2.2.6). Имея в виду (1.8.5) и табл. 1.1, приведем выражения усилий и моментов:

$$\begin{Bmatrix} T_{11}^I \\ T_{22}^I \\ M_{11}^I \\ M_{22}^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} & D_{1,5} & D_{1,6} & D_{1,11} & D_{1,12} \\ D_{1,2} & D_{2,2} & D_{1,6} & D_{2,6} & D_{2,11} & D_{2,12} \\ D_{1,5} & D_{1,6} & D_{7,5} & D_{7,6} & D_{7,11} & D_{7,12} \\ D_{1,6} & D_{2,6} & D_{7,6} & D_{8,6} & D_{8,11} & D_{8,12} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{11}^I \\ E_{22}^I \\ \kappa_I^I \\ \kappa_{II}^I \\ \vartheta_1^{I^2} \\ \vartheta_2^{I^2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta T_{11}^{\Phi, I} \\ \Delta T_{22}^{\Phi, I} \\ \Delta M_{11}^{\Phi, I} \\ \Delta M_{22}^{\Phi, I} \end{Bmatrix}, \tag{2.2.7}$$

$$\begin{Bmatrix} T_{12}^I \\ T_{21}^I \\ M_{12}^I \\ M_{21}^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_{3,3} & D_{3,4} & D_{3,7} & D_{3,8} & D_{3,13} \\ D_{3,4} & D_{4,4} & D_{3,8} & D_{4,8} & D_{4,13} \\ D_{3,7} & D_{3,8} & D_{9,7} & D_{9,8} & D_{9,13} \\ D_{3,8} & D_{4,8} & D_{9,8} & D_{10,8} & D_{10,13} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{12}^I \\ E_{21}^I \\ \kappa_{II}^I \\ \kappa_{III}^I \\ \vartheta_1^I \vartheta_2^I \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta T_{12}^{\Phi,I} \\ \Delta T_{21}^{\Phi,I} \\ \Delta M_{12}^{\Phi,I} \\ \Delta M_{21}^{\Phi,I} \end{Bmatrix}, \quad (2.2.8)$$

$$Q_1^I = D_{5,9} \varphi_1^I + \Delta Q_1^{\Phi,I}, \quad Q_2^I = D_{6,10} \varphi_2^I + \Delta Q_2^{\Phi,I}. \quad (2.2.9)$$

Заменяя в описанных формулах основного состояния индекс I на звездочку, получим соотношения смежного состояния.

Для добавочного состояния сохраняются формулы (2.1.2), (2.1.8), за исключением вариаций полных деформаций

$$\delta \varepsilon_{11} = (\delta E_{11} + z \delta \kappa_I) / (1 + k_1 z) + \vartheta_1^I \delta \vartheta_1, \quad \delta \varepsilon_{13} = \delta \varphi_1; (1,2), \quad (2.2.10)$$

$$\delta \varepsilon_{12} = (\delta E_{12} + z \delta \kappa_{III}) / (1 + k_1 z) + (\delta E_{21} + z \delta \kappa_{III}) / (1 + k_2 z) + \vartheta_1^I \delta \vartheta_2 + \vartheta_2^I \delta \vartheta_1.$$

Вариации напряжений определяются формулами (2.1.4), (2.2.5). Принимая во внимание (2.2.7)–(2.2.9), запишем вариации усилий и моментов:

$$\begin{Bmatrix} \delta T_{11} \\ \delta T_{22} \\ \delta M_{11} \\ \delta M_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} & D_{1,5} & D_{1,6} & D_{1,11} & D_{1,12} \\ D_{1,2} & D_{2,2} & D_{1,6} & D_{2,6} & D_{2,11} & D_{2,12} \\ D_{1,5} & D_{1,6} & D_{7,5} & D_{7,6} & D_{7,11} & D_{7,12} \\ D_{1,6} & D_{2,6} & D_{7,6} & D_{8,6} & D_{8,11} & D_{8,12} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \delta E_{11} \\ \delta E_{22} \\ \delta \kappa_I \\ \delta \kappa_{III} \\ 2\vartheta_1^I \delta \vartheta_1 \\ 2\vartheta_2^I \delta \vartheta_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta \Delta T_{11}^{\Phi} \\ \delta \Delta T_{22}^{\Phi} \\ \delta \Delta M_{11}^{\Phi} \\ \delta \Delta M_{22}^{\Phi} \end{Bmatrix}, \quad (2.2.11)$$

$$\begin{Bmatrix} \delta T_{12} \\ \delta T_{21} \\ \delta M_{12} \\ \delta M_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_{3,3} & D_{3,4} & D_{3,7} & D_{3,8} & D_{3,13} \\ D_{3,4} & D_{4,4} & D_{3,8} & D_{4,8} & D_{4,13} \\ D_{3,7} & D_{3,8} & D_{9,7} & D_{9,8} & D_{9,13} \\ D_{3,8} & D_{4,8} & D_{9,8} & D_{10,8} & D_{10,13} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \delta E_{12} \\ \delta E_{21} \\ \delta \kappa_{III} \\ \delta \kappa_{III} \\ \vartheta_1^I \delta \vartheta_2 + \vartheta_2^I \delta \vartheta_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta \Delta T_{12}^{\Phi} \\ \delta \Delta T_{21}^{\Phi} \\ \delta \Delta M_{12}^{\Phi} \\ \delta \Delta M_{21}^{\Phi} \end{Bmatrix}, \quad (2.2.12)$$

$$\delta Q_1 = D_{5,9} \delta \varphi_1 + \delta \Delta Q_1^{\Phi}, \quad \delta Q_2 = D_{6,10} \delta \varphi_2 + \delta \Delta Q_2^{\Phi}. \quad (2.2.13)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
 d_{1,1} &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{1,1}^{I,i} \frac{1+k_2 z}{1+k_1 z} dz, & d_{1,2} &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{1,2}^{I,i} dz, \\
 d_{1,3} &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{1,3}^{I,i} \frac{1+k_2 z}{1+k_1 z} dz, & d_{1,4} &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{1,3}^{I,i} dz, \\
 d_{1,5} &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{1,1}^{I,i} \frac{1+k_2 z}{1+k_1 z} z dz, & d_{1,6} &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{1,2}^{I,i} z dz, \\
 d_{1,7} &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{1,3}^{I,i} \frac{1+k_2 z}{1+k_1 z} z dz, & d_{1,8} &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{1,3}^{I,i} z dz, \\
 d_{1,9} &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{1,4}^{I,i} (1+k_2 z) dz, & d_{1,10} &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{1,5}^{I,i} (1+k_2 z) dz, \quad (2.2.14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{1,11} &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{1,1}^{I,i} (1+k_2 z) dz, & d_{1,12} &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{1,2}^{I,i} (1+k_2 z) dz, \\
 d_{1,13} &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{1,3}^{I,i} (1+k_2 z) dz; \\
 d_{2,1} &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{2,1}^{I,i} dz, & d_{2,2} &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{2,2}^{I,i} \frac{1+k_1 z}{1+k_2 z} dz, \\
 d_{2,3} &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{2,3}^{I,i} dz, & d_{2,4} &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{2,3}^{I,i} \frac{1+k_1 z}{1+k_2 z} dz, \quad (2.2.15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{2,5} &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{2,1}^{I,i} z dz, & d_{2,6} &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{2,2}^{I,i} \frac{1+k_1 z}{1+k_2 z} z dz, \\
 d_{2,7} &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{2,3}^{I,i} z dz, & d_{2,8} &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{2,3}^{I,i} \frac{1+k_1 z}{1+k_2 z} z dz, \\
 d_{2,9} &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{2,4}^{I,i} (1+k_1 z) dz, & d_{2,10} &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{2,5}^{I,i} (1+k_1 z) dz, \\
 d_{2,11} &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{2,1}^{I,i} (1+k_1 z) dz, & d_{2,12} &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{2,2}^{I,i} (1+k_1 z) dz, \\
 d_{2,13} &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{2,3}^{I,i} (1+k_1 z) dz,
 \end{aligned}$$

Из коэффициентов  $d_{1,k} (k = \overline{1,13})$  получаются другие коэффициенты  $d_{3,k}, d_{5,k}, d_{7,k}, d_{9,k}$  заменой  $2N_{1,m}^{I,i}$  на  $N_{3,m}^{I,i}, N_{4,m}^{I,i}, 2N_{1,m}^{I,i}z, N_{3,m}^{I,i}z (m = \overline{1,5})$  соответственно. Аналогично из  $d_{2,k} (k = \overline{1,13})$  получаются  $d_{4,k}, d_{6,k}, d_{8,k}, d_{10,k}$  заменой  $2N_{2,m}^{I,i}$  на  $N_{3,m}^{I,i}, N_{5,m}^{I,i}, 2N_{2,m}^{I,i}z, N_{3,m}^{I,i}z (m = \overline{1,5})$  соответственно.

На основе (2.1.7), (2.2.5) и имея в виду (2.2.14), (2.2.15), можно выразить вариации упругопластических добавок в усилиях и моментах через вариации деформаций следующей формулой:

$$\delta\Delta\Phi = \{d_{m,n}\}\delta D, \quad (2.2.16)$$

где  $\{d_{m,n}\}, m = \overline{1,10}, n = \overline{1,13}$  — матрица размерности  $10 \times 13$ ;  $\delta\Delta\Phi = (\delta\Delta T_{11}^\Phi, \delta\Delta T_{22}^\Phi, \delta\Delta T_{12}^\Phi, \delta\Delta T_{21}^\Phi, \delta\Delta Q_1^\Phi, \delta\Delta Q_2^\Phi, \delta\Delta M_{11}^\Phi, \delta\Delta M_{22}^\Phi, \delta\Delta M_{12}^\Phi, \delta\Delta M_{21}^\Phi)'$  — вектор-столбец 10-го порядка;  $\delta D = (\delta E_{11}, \delta E_{22}, \delta E_{12}, \delta E_{21}, \delta\kappa_I, \delta\kappa_{II}, \delta\kappa_{III}, \delta\kappa_{III}, \delta\varphi_1, \delta\varphi_2, \vartheta_1^I\delta\vartheta_1, \vartheta_2^I\delta\vartheta_2, \vartheta_1^I\delta\vartheta_2 + \vartheta_2^I\delta\vartheta_1)'$  — вектор-столбец 13-го порядка.

### 2.3. КОНТУРНЫЙ ИНТЕГРАЛ. ВАРИАЦИИ ВНЕШНИХ НАГРУЗОК

Рассмотрим контурный интеграл (1.6.14) для уравнений нейтрального равновесия. Запишем его для основного состояния  $\sigma^I$ :

$$\int_c \left[ (T_n^{I,n} - t_n^{I,n}) \bar{\delta} v_n^I + (S_n^{I,n} - s_n^{I,n}) \bar{\delta} v_s^I + (Q_n^{I,n} - q_n^{I,n}) \bar{\delta} w_s^I + (G_n^{I,n} - g_n^{I,n}) \bar{\delta} \vartheta_n^I - (H_n^{I,n} - h_n^{I,n}) \bar{\delta} \vartheta_s^I \right] dc = 0, \quad (2.3.1)$$

для смежного состояния  $\sigma^*$ :

$$\int_c \left[ (T_n^{*,n} - t_n^{*,n}) \bar{\delta} v_n^* + (S_n^{*,n} - s_n^{*,n}) \bar{\delta} v_s^* + (Q_n^{*,n} - q_n^{*,n}) \bar{\delta} w^* + (G_n^{*,n} - g_n^{*,n}) \bar{\delta} \vartheta_n^* - (H_n^{*,n} - h_n^{*,n}) \bar{\delta} \vartheta_s^* \right] dc = 0. \quad (2.3.2)$$

Здесь  $\bar{\delta}$  — знак вариации перемещений в принципе возможных перемещений. Вычитая (2.3.1) из (2.3.2), получим контурный интеграл для добавочного состояния  $\delta\sigma$ :

$$\int_c \left[ (\delta T_n^H - \delta t_n^H) \bar{\delta} v_n^I + (T_n^{I,H} - t_n^{I,H}) \bar{\delta} \delta v_n + (\delta S_n^H - \delta s_n^H) \bar{\delta} v_s^I + (S_n^{I,H} - s_n^{I,H}) \bar{\delta} \delta v_s + (\delta Q_n^H - \delta q_n^H) \bar{\delta} w^I + (Q_n^{I,H} - q_n^{I,H}) \bar{\delta} \delta w + (\delta G_n^H - \delta g_n^H) \bar{\delta} \vartheta_n^I + (G_n^{I,H} - g_n^{I,H}) \bar{\delta} \delta \vartheta_n - (\delta H_n^H - \delta h_n^H) \bar{\delta} \vartheta_s^I - (H_n^{I,H} - h_n^{I,H}) \bar{\delta} \delta \vartheta_s \right] dc = 0. \quad (2.3.3)$$

Пусть для основного состояния выполняются геометрические гра-

ничные условия

$$\bar{\delta}v_n^I = \bar{\delta}v_s^I = \bar{\delta}w^I = \bar{\delta}\vartheta_n^I = \bar{\delta}\vartheta_s^I = 0. \quad (2.3.4)$$

Тогда из (2.3.3) следует, что для величин добавочного состояния выполняется геометрические граничные условия

$$\bar{\delta}\delta v_n = \bar{\delta}\delta v_s = \bar{\delta}\delta w = \bar{\delta}\delta\vartheta_n = \bar{\delta}\delta\vartheta_s = 0. \quad (2.3.5)$$

Аналогично при статических условиях для  $\sigma^I$ :

$$T_n^{I,H} = t_n^{I,H}, S_n^{I,H} = s_n^{I,H}, Q_n^{I,H} = q_n^{I,H}, G_n^{I,H} = g_n^{I,H}, H_n^{I,H} = h_n^{I,H}, \quad (2.3.6)$$

следуют из (2.3.3) статические граничные условия на вариации  $\delta\sigma$ :

$$\delta T_n^H = \delta t_n^H, \delta S_n^H = \delta s_n^H, \delta Q_n^H = \delta q_n^H, \delta G_n^H = \delta g_n^H, \delta H_n^H = \delta h_n^H. \quad (2.3.7)$$

Картина не изменится, если рассмотрим смешанные граничные условия.

Таким образом, граничными условиями для уравнений нейтрального равновесия будут вариации  $\delta$  от граничных условий основного состояния.

В уравнениях нейтрального равновесия (2.1.8) присутствуют вариации поверхностных сил:

$$\delta X_m^H = X_m^{*,H} - X_m^{I,H}, m = \overline{1,3}, \quad (2.3.8)$$

которые можно выразить через компоненты поверхностных сил основного состояния. Рассмотрим некоторые случаи.

а. В процессе потери устойчивости поверхностная сила не изменяется по направлению: вес груза, давление ветра, вертикальная кольцевая нагрузка и т.д. Тогда

$$X_m^{*,H} = X_m^{I,H}, \delta X_m^H = 0, m = \overline{1,3}. \quad (2.3.9)$$

б. Приложенная к оболочке нагрузка является следящей, т.е. вектор нагрузки во время деформации изменяется так, что его составляющие по основным координатным направлениям деформированной оболочки остаются неизменными. Пусть  $k_m, k_m^I, k_m^*$ ,  $m = \overline{1,3}$ , — сопут-

ствующие координатные тройки до деформации, в состоянии  $\sigma^I$  и в состоянии  $\sigma^*$ , при этом  $k_m$  — ортогональная тройка. Для указанных состояний справедливы формулы

$$\mathbf{X} = \sum_{m=1}^3 X_m k_m, \mathbf{X}^I = \sum_{m=1}^3 X_m^I k_m^I = \sum_{m=1}^3 X_m^{I,H} k_m, \quad (2.3.10)$$

$$\mathbf{X}^* = \sum_{m=1}^3 X_m^* k_m^* = \sum_{m=1}^3 X_m^{*,H} k_m^*.$$

Тогда по определению следящей нагрузки

$$X_m = X_m^I = X_m^*, m = \overline{1,3}. \quad (2.3.11)$$

Из (1.4.3) имеем на уровне поверхности приведения  $z = 0$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1^I &= \mathbf{k}_1 - \vartheta_1^I \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_1^* = \mathbf{k}_1 - \vartheta_1^* \mathbf{k}_3, \\
\mathbf{k}_2^I &= \mathbf{k}_2 - \vartheta_2^I \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2^* = \mathbf{k}_2 - \vartheta_2^* \mathbf{k}_3, \\
\mathbf{k}_3^I &= \vartheta_1^I \mathbf{k}_1 + \vartheta_{II}^I \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_3^* = \vartheta_1^* \mathbf{k}_1 + \vartheta_{II}^* \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3.
\end{aligned}
\tag{2.3.12}$$

С учетом (2.3.10)—(2.3.12) запишем

$$\begin{aligned}
X_1^{I^*} &= \mathbf{X}^I \mathbf{k}_1 = X_1 + X_3 \vartheta_1^I, X_1^{*n} = \mathbf{X}^* \mathbf{k}_1 = X_1 + X_3 \vartheta_1^*, \\
\delta X_1^n &= X_1^{*n} - X_1^{I^*} = X_3 \delta \vartheta_1.
\end{aligned}
\tag{2.3.13}$$

Аналогично

$$\delta X_2^H = X_3 \delta \vartheta_{II}, \delta X_3^H = -X_1 \delta \vartheta_1 - X_2 \delta \vartheta_2.
\tag{2.3.14}$$

Подобно поверхностной нагрузке можно рассмотреть получение вариаций внешних краевых сил.

### ГЛАВА 3

## КАНОНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

В данной главе выводятся канонические системы уравнений для ряда задач статики оболочек вращения. В теории оболочек известно много способов написания разрешающих уравнений. Например, для осесимметричной деформации оболочки вращения используются уравнения в перемещениях  $u, w$ , в функциях усилий и поворота (уравнения Мейснера), в функциях прогиба  $w$  и напряжений  $\Phi$ , для функции прогиба  $w$  одно уравнение высокого порядка, в канонической форме

$$\frac{dY}{ds} = A(s)Y + f(s, Y)$$

для вектора неизвестных  $Y$  с шестью компонентами.

Каноническая система отличается от всех остальных тем, что в ней только вектор неизвестных  $Y$  подвергается однократному дифференцированию. Производные  $Y$  не входят в граничные условия. Такие характеристики оболочки, как толщина, кривизны, параметры материала, не дифференцируются. Поэтому при численном решении каноническая система может быть более предпочтительной по сравнению с остальными. Особенно явно видны ее преимущества, например, в таких задачах: задачах оптимизации, когда закон изменения толщины отыскивается численно, отпадает необходимость численного дифференцирования функции, полученной с некоторой погрешностью; толщина и кривизны оболочки изменяются быстро, так что их производные терпят разрывы; в случае нетрадиционных граничных условий и т.д.



### 3.1 ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

Рассматривается оболочка вращения, замкнутая в окружном направлении [27]. За недеформированные координатные линии приняты меридианы, параллели и внешняя нормаль к ПП. Введены следующие обозначения:  $s$  — дуга меридиана,  $\varphi$  — угол, определяющий положение меридионального сечения по отношению к некоторому начальному сечению,  $\theta$  — угол между нормалью к ПП и осью вращения оболочки,  $r$  — радиус параллели,  $dC = r d\varphi$  — элемент дуги параллели (рис. 3.1). Тогда  $\alpha_1 = s$ ,  $\alpha_2 = \varphi$ ,  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = R_2 \sin \theta = r$ ,  $dr / ds = \cos \theta$ ,  $d\theta / ds = k_1$ .

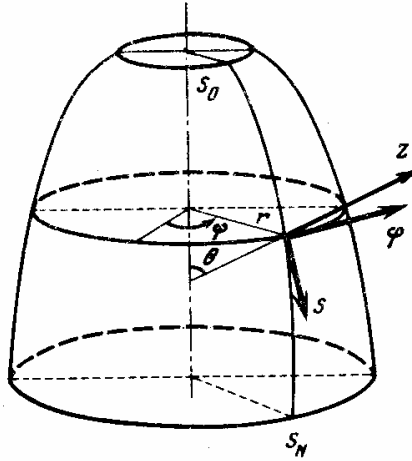


Рис. 3.1

Для оболочки вращения соотношения разд. 1.6, включающие коэффициенты Ляме  $A_1$ ,  $A_2$ , значительно упрощаются и принимают следующий вид:

перемещения, повороты, деформации:

$$u_1 = v_1 + z\vartheta_1, u_2 = v_2 + z\vartheta_2, u_3 = w; \quad (3.1.1)$$

$$\vartheta_1 = -\frac{\partial w}{\partial s} + k_1 v_1, \quad \vartheta_2 = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + k_2 v_2; \quad (3.1.2)$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_1 + \varphi_1; (1,2); \quad (3.1.3)$$

$$\theta_1 = \vartheta_1 + k_1 z \varphi_1, \quad \theta_1^2 = \vartheta_1^2 + 2k_1 z \vartheta_1 \varphi_1, \quad (3.1.4)$$

$$\theta_1 \theta_2 = \vartheta_1 \vartheta_2 + k_1 z \varphi_1 \vartheta_2 + k_2 z \varphi_2 \vartheta_1; (1,2);$$

$$E_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial s} + k_1 w, \quad E_{22} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} + \frac{\cos \theta}{r} v_1 + k_2 w, \quad (3.1.5)$$

$$E_{12} = \frac{\partial v_2}{\partial s}, \quad E_{21} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} - \frac{\cos \theta}{r} v_2;$$

$$\kappa_{11} = \frac{\partial \vartheta_1}{\partial s}, \quad \kappa_{22} = \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \varphi} + \frac{\cos \theta}{r} \vartheta_1,$$

$$\kappa_{12} = \frac{\partial \vartheta_2}{\partial s}, \quad \kappa_{21} = \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \varphi} - \frac{\cos \theta}{r} \vartheta_2; \quad (3.1.6)$$

$$\begin{aligned} \kappa_I &= \frac{\partial \vartheta_I}{\partial s}, \quad \kappa_{II} = \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_{II}}{\partial \varphi} + \frac{\cos \theta}{r} \vartheta_I, \\ \kappa_{III} &= \frac{\partial \vartheta_{II}}{\partial s}, \quad \kappa_{III} = \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_I}{\partial \varphi} + \frac{\cos \theta}{r} \vartheta_{II}; \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r T_{11}^H}{\partial s} - T_{22}^H \cos \theta + \frac{\partial T_{21}^H}{\partial \varphi} + r(k_1 Q_1^H + X_1^H) &= 0, \\ \frac{\partial T_{22}^H}{\partial \varphi} + T_{21}^H \cos \theta + \frac{\partial r T_{12}^H}{\partial s} + r(k_2 Q_2^H + X_2^H) &= 0, \\ \frac{\partial r Q_1^H}{\partial s} + \frac{\partial Q_2^H}{\partial \varphi} - r(k_1 T_{11}^H + k_2 T_{22}^H - X_3^H) &= 0, \\ \frac{\partial r M_{11}}{\partial s} - M_{22} \cos \theta + \frac{\partial M_{21}}{\partial \varphi} &= r Q_1 + r k_1 (M_{11} \vartheta_I + M_{12} \vartheta_2), \\ \frac{\partial M_{22}}{\partial \varphi} + \frac{\partial r M_{12}}{\partial s} + M_{21} \cos \theta &= r Q_2 + r k_2 (M_{22} \vartheta_2 + M_{21} \vartheta_I); \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

контурный интеграл, когда контур оболочки совпадает с параллелью:

$$\begin{aligned} \int_C [(T_{11}^n - t_{11}^n) \delta v_1 + (T_{12}^n - t_{12}^n) \delta v_2 + (Q_1^n - q_1^n) \delta w + \\ + (M_{11} - m_{11}) \delta \vartheta_I + (M_{12} - m_{12}) \delta \vartheta_{II}] dC = 0. \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

### 3.2. НЕЛИНЕЙНЫЙ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ИЗГИБ ОБОЛОЧКИ СРЕДНЕЙ ТОЛЩИНЫ

Известно [118], что линейная осесимметричная задача по теории Кирхгофа—Лява описывается уравнениями восьмого порядка, которые характеризуют две независимые задачи: задачу изгиба шестого порядка с разрешающими функциями  $T_{11}, M_{11}, Q_1^*, v_1, w, \vartheta_I$  и задачу кручения второго порядка с разрешающими функциями  $T_{12}, v_2$ . Анализируя соотношения разд. 3.1, можно установить, что в теории типа Тимошенко система уравнений линейной осесимметричной задачи имеет десятый порядок. Она разделяется на две независимые задачи: изгиб ( $T_{11}, M_{11}, Q_1, v_1, w, \vartheta_I$ ) и кручение ( $T_{12}, M_{12}, v_2, \vartheta_{II}$ ). В нелинейном случае, вообще говоря, задачи изгиба и кручения не разделяются. Однако соотношения разд. 3.1 показывают, что в геометрически нелинейной теории при умеренных поворотах задача осесимметричного изгиба может быть выделена в самостоятельную, не связанную с величинами кручения. Это возможно, когда на оболочку вращения действуют осесимметричные силы с компонен-

тами  $X_1^H(s)$ ,  $X_2^H = 0$ ,  $X_3^H(s)$  и граничные условия на контуре для величин задачи кручения однородные.

Далее приводятся соотношения нелинейного осесимметричного изгиба при умеренных поворотах [27], при этом обозначено  $u_1 = u$ : перемещения и деформации:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= u + z\vartheta_1, \quad u_3 = w; \quad \vartheta_1 = -\frac{dw}{ds} + k_1u, \quad \vartheta_I = \vartheta_1 + \varphi_1; \\
 E_{11} &= \frac{du}{ds} + k_1w, \quad E_{22} = \frac{\cos\theta}{r}u + k_2w; \quad \kappa_{11} = \frac{d\vartheta_1}{ds}, \\
 \kappa_{22} &= \frac{\cos\theta}{r}\vartheta_1, \quad \kappa_I = \frac{d\vartheta_I}{ds}, \quad \kappa_{II} = \frac{\cos\theta}{r}\vartheta_I; \\
 \varepsilon_{11} &= (E_{11} + z\kappa_I) / (1 + k_1z) + 0,5(\vartheta_1^2 + 2k_1z\vartheta_1\varphi_1), \\
 \varepsilon_{22} &= (E_{22} + z\kappa_{II}) / (1 + k_2z), \quad \varepsilon_{13} = \varphi_1;
 \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}
 \frac{dT_{11}^H}{ds} - T_{22}^H \cos\theta + r(k_1Q_1^H + X_1^H) &= 0, \quad \frac{dQ_1^H}{ds} - r(k_1T_{11}^H + \\
 + k_2T_{22}^H - X_3^H) &= 0, \quad \frac{dM_{11}}{ds} - M_{22} \cos\theta = r(Q_1^H + \vartheta_1T_{11}^H + k_1M_{11}\vartheta_I),
 \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

где

$$T_{11}^H \approx T_{11} + Q_1\vartheta_I, \quad T_{22}^H \approx T_{22}, \quad Q_1^H \approx Q_1 - T_{11}\vartheta_1 - k_1\varphi_1M_{11}; \tag{3.2.3}$$

контурный интеграл (контур оболочки совпадает с параллелью):

$$\int_C [(T_{11}^H - t_{11}^H)\delta u + (Q_1^H - q_1^H)\delta w + (M_{11} - m_{11})\delta\vartheta_I] dc = 0. \tag{3.2.4}$$

Напряжения в  $j$ -м слое, с учетом (1.7.2), (1.7.3), будут

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11}^j &= A_j\varepsilon_{11} + C_j\varepsilon_{22} + \Delta\sigma_{11}^j, \quad \sigma_{22}^j = C_j\varepsilon_{11} + B_j\varepsilon_{22} + \Delta\sigma_{22}^j, \\
 \sigma_{13}^j &= G_{13}^j\varepsilon_{13} + \Delta\sigma_{13}^j.
 \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Усилия  $T_{11}$ ,  $T_{22}$ ,  $Q_1$  и моменты  $M_{11}$ ,  $M_{22}$  определяются по формулам (1.8.6), (1.8.8) с учетом табл. 1.1, формул (1.8.5) и следующих соотношений:

$$\begin{aligned}
 \Delta T_{11}^\Gamma &= D_{1,11}\vartheta_1^2 + \underline{D_{1,14}\vartheta_1\varphi_1}, \quad \Delta T_{22}^\Gamma = D_{2,11}\vartheta_1^2 + \underline{D_{2,14}\vartheta_1\varphi_1}, \\
 \Delta M_{11}^\Gamma &= D_{7,11}\vartheta_1^2 + \underline{D_{7,14}\vartheta_1\varphi_1}, \quad \Delta M_{22}^\Gamma = D_{8,11}\vartheta_1^2 + \underline{D_{8,14}\vartheta_1\varphi_1}.
 \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Примем в качестве разрешающих функций обобщенные усилия и перемещения

$$T_{11}^H, \quad Q_1^H, \quad M_{11}, \quad u, \quad w, \quad \vartheta_I, \tag{3.2.7}$$

фигурирующие в контурном интеграле (3.2.4). Получим каноническую систему для функций (3.2.7) с граничными условиями, следующими из (3.2.4).

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \Delta &= D_{1,1}D_{7,5} - D_{1,5}^2, \quad d_1 = D_{7,5}/\Delta, \quad d_2 = D_{1,5}/\Delta, \\ d_3 &= (D_{1,5}D_{1,6} - D_{7,5}D_{1,2})/\Delta, \quad d_4 = (D_{1,5}D_{7,6} - D_{1,6}D_{7,5})/\Delta, \\ d_5 &= D_{1,1}/\Delta, \quad d_6 = (D_{1,5}D_{1,2} - D_{1,1}D_{1,6})/\Delta, \\ d_7 &= (D_{1,5}D_{1,6} - D_{1,1}D_{7,6})/\Delta; \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -d_3, \quad \gamma_2 = -d_6, \quad \gamma_3 = D_{2,2} + d_3D_{1,2} + d_6D_{1,6}, \\ \gamma_4 &= D_{2,6} + d_4D_{1,2} + d_7D_{1,6}, \quad \gamma_5 = -d_4, \quad \gamma_6 = -d_7, \\ \gamma_7 &= D_{2,6} + d_3D_{1,6} + d_6D_{7,6}, \quad \gamma_8 = D_{8,6} + d_4D_{1,6} + d_7D_{7,6}. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Из (1.8.8) следует

$$\varphi_1 = (Q_1 - \Delta Q_1^\Phi) / D_{5,9}. \quad (3.2.10)$$

Приведем формулы, следующие из (1.8.6) и (1.8.8), с учетом (3.2.3), (1.4.11), (3.2.8), (3.2.9):

$$\begin{pmatrix} E_{11} \\ \kappa_1 \\ T_{22}^H \\ M_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & -d_2 & d_3 & d_4 \\ -d_2 & d_5 & d_6 & d_7 \\ -d_3 & -d_6 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ -d_4 & -d_7 & \gamma_7 & \gamma_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11}^0 \\ M_{11}^0 \\ E_{22} \\ \kappa_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta T_{22}^\Gamma \\ \Delta M_{22}^\Gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta T_{22}^\Phi \\ \Delta M_{22}^\Phi \end{pmatrix}, \quad (3.2.11)$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{D_{5,9}} \left[ (Q_1^H - \Delta Q_1^\Phi) + T_{11}^H \vartheta_1 \right] \frac{1}{1 + (T_{11}^H - k_1 M_{11}) / D_{5,9}}.$$

В (3.2.11) нужно подставить

$$\begin{aligned} T_{11}^0 &= T_{11}^H - \underline{Q_1^H} \vartheta_1 - \Delta T_{11}^\Gamma - \Delta T_{11}^\Phi, \quad E_{22} = \frac{\cos \theta}{r} u + k_2 w, \\ M_{11}^0 &= M_{11}^H - \Delta M_{11}^\Gamma - \Delta M_{11}^\Phi, \quad \kappa_{11} = \frac{\cos \theta}{r} \vartheta_1. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Каноническая система для разрешающих функций (3.2.7) запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{dT_{11}^H}{ds} &= \frac{\cos \theta}{r} (\gamma_1 - 1) T_{11}^H - k_1 Q_1^H + \frac{\cos \theta}{r} \gamma_2 M_{11} + \gamma_3 \frac{\cos \theta}{r} \left( \frac{\cos \theta}{r} u + k_2 w \right) + \\ &+ \gamma_4 \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \vartheta_1 - X_1^H + \frac{\cos \theta}{r} [\Delta T_{22}^\Gamma + \Delta T_{22}^\Phi - \gamma_1 (\Delta T_{11}^\Gamma + \Delta T_{11}^\Phi + Q_1^H \vartheta_1) - \\ &- \gamma_2 (\Delta M_{11}^\Gamma + \Delta M_{11}^\Phi)], \\ \frac{dQ_1^H}{ds} &= (k_1 + \gamma_1 k_2) T_{11}^H - \frac{\cos \theta}{r} Q_1^H + k_2 \gamma_2 M_{11} + k_2 \gamma_3 \left( \frac{\cos \theta}{r} u + k_2 w \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +k_2\gamma_4 \frac{\cos\theta}{r} \vartheta_1 - X_3^n + k_2[\Delta T_{22}^\Gamma + \Delta T_{22}^\Phi - \gamma_1(\Delta T_{11}^\Gamma + T_{11}^\Phi + \underline{Q_1^n \vartheta_1}) - \\
& - \gamma_2(\Delta M_{11}^\Gamma + \Delta M_{11}^\Phi)], \\
\frac{dM_{11}}{ds} & = \frac{\cos\theta}{r} \gamma_5 T_{11}^n + Q_1^n + \frac{\cos\theta}{r} (\gamma_6 - 1) M_{11} + \frac{\cos\theta}{r} \gamma_7 \left( \frac{\cos\theta}{r} u + k_2 w \right) + \\
& + \gamma_8 \frac{\cos^2\theta}{r^2} \vartheta_1 + T_{11}^n \vartheta_1 + \underline{k_1 M_{11} \vartheta_1} + \frac{\cos\theta}{r} [\Delta M_{22}^\Gamma + \Delta M_{22}^\Phi - \\
& - \gamma_5(\Delta T_{11}^\Gamma + \Delta T_{11}^\Phi + \underline{Q_1^n \vartheta_1}) - \gamma_6(\Delta M_{11}^\Gamma + \Delta M_{11}^\Phi)], \tag{3.2.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{du}{ds} & = d_1 T_{11}^n - d_2 M_{11} + d_3 \left( \frac{\cos\theta}{r} u + k_2 w \right) - k_1 w + d_4 \frac{\cos\theta}{r} \vartheta_1 - \\
& - d_1 (\underline{Q_1^n \vartheta_1} + \Delta T_{11}^\Gamma + \Delta T_{11}^\Phi) + d_2 (\Delta M_{11}^\Gamma + \Delta M_{11}^\Phi), \\
\frac{dw}{ds} & = \frac{Q_1^n}{D_{5,9}} + k_1 u - \vartheta_1 + \frac{1}{D_{5,9}} (-\Delta Q_1^\Phi + T_{11}^n \vartheta_1 + \underline{k_1 \varphi_1 M_{11}}), \\
\frac{d\vartheta_1}{ds} & = -d_2 T_{11}^n + d_5 M_{11} + d_6 \left( \frac{\cos\theta}{r} u + k_2 w \right) + d_7 \frac{\cos\theta}{r} \vartheta_1 + \\
& + d_2 (\underline{Q_1^n \vartheta_1} + \Delta T_{11}^\Gamma + \Delta T_{11}^\Phi) - d_5 (\Delta M_{11}^\Gamma + \Delta M_{11}^\Phi).
\end{aligned}$$

Как следует из принятых предположений, в системе (3.2.13) учтены геометрическая и физическая нелинейности, деформация поперечного сдвига, нетонкость оболочки, ортотропия материала и несимметричное строение оболочки по толщине. Из нее легко получить более простые случаи. Отметим, что в осесимметричной задаче изгиба учет деформации поперечного сдвига не повышает порядка системы дифференциальных уравнений и соответственно не изменяет количества граничных условий. Для перехода к уравнениям теории Кирхгофа—Лява достаточно положить в (3.2.13) и остальных соотношениях  $1/D_{5,9} = 0$ .

Приведем каноническую систему уравнений по теории Кирхгофа—Лява для однослойной тонкой оболочки из изотропного материала, когда совместно учитываются геометрическая и физическая нелинейности. Толщина оболочки  $h(s)$  переменная. Поверхность приведения не совпадает со срединной,  $-\gamma h \leq z \leq (1 - \gamma)h$ . В недеформированных осях указанная система имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{dT_{11}^n}{ds} & = (\nu - 1) \frac{\cos\theta}{r} T_{11}^n - k_1 Q_1^n + Eh \frac{\cos\theta}{r^2} (u \cos\theta + w \sin\theta) + \\
& + Eh^2 n_1 \frac{\cos^2\theta}{r^2} \vartheta_1 + \frac{\cos\theta}{r} (\Delta T_{22}^\Phi - \nu \Delta T_{11}^\Phi) - Eh^2 n_1 k_2 \frac{\cos\theta}{r} \frac{\vartheta_1^2}{2} - X_1^n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dQ_1^n}{ds} &= (k_1 + vk_2)T_{11}^n - \frac{\cos\theta}{r}Q_1^n + Eh\frac{k_2}{r}(u\cos\theta + w\sin\theta + hn_1\vartheta_1\cos\theta) - \\
&- X_3^n + k_2(\Delta T_{22}^\circ - v\Delta T_{11}^\circ) - Eh^2n_1k_2\frac{\vartheta_1^2}{2}, \\
\frac{dM_{11}}{ds} &= Q_1^n + (v-1)\frac{\cos\theta}{r}M_{11} + Eh^2n_1\frac{\cos\theta}{r^2}(u\cos\theta + w\sin\theta) + \\
&+ Eh^3n_2\frac{\cos^2\theta}{r^2}\vartheta_1 + \frac{\cos\theta}{r}(\Delta M_{22}^\circ - v\Delta M_{11}^\circ) + T_{11}^n\vartheta_1 - Eh^3n_2k_2\frac{\cos\theta}{r}\frac{\vartheta_1^2}{2}, \\
\frac{du}{ds} &= \frac{12(1-v^2)}{Eh}n_2T_{11}^n - \frac{12(1-v^2)}{Eh^2}n_1M_{11} - v\frac{\cos\theta}{r}u - (k_1 + vk_2)w - \\
&- \frac{12(1-v^2)}{Eh}n_2\Delta T_{11}^\circ + \frac{12(1-v^2)}{Eh^2}n_1\Delta M_{11}^\circ - \frac{\vartheta_1^2}{2}, \\
\frac{dw}{ds} &= k_1u - \vartheta_1, \tag{3.2.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\vartheta_1}{ds} &= -\frac{12(1-v^2)}{Eh^2}n_1T_{11}^n + \frac{12(1-v^2)}{Eh^3}M_{11} - v\frac{\cos\theta}{r}\vartheta_1 + \\
&+ \frac{12(1-v^2)}{Eh^2}n_1\Delta T_{11}^\circ - \frac{12(1-v^2)}{Eh^3}\Delta M_{11}^\circ + vk_2\frac{\vartheta_1^2}{2}.
\end{aligned}$$

Здесь  $n_1 = 1/2 - \gamma$ ,  $n_2 = 1/3 - \gamma + \gamma^2$ .

Каноническая система уравнений в деформированных осях записывается в виде

$$\begin{aligned}
\frac{dT_{11}}{ds} &= (v-1)\frac{\cos\theta}{r}T_{11} - k_1Q_1 + Eh\frac{\cos\theta}{r^2}(u\cos\theta + w\sin\theta) + \\
&+ Eh^2n_1\frac{\cos^2\theta}{r^2}\vartheta_1 + \frac{\cos\theta}{r}(\Delta T_{22}^\circ - v\Delta T_{11}^\circ) - Q_1\kappa_{11} - \\
&- Eh^2n_1k_2\frac{\cos\theta}{r}\frac{\vartheta_1^2}{2} - X_1, \\
\frac{dQ_1}{ds} &= (k_1 + vk_2)T_{11} - \frac{\cos\theta}{r}Q_1 + Eh\frac{k_2}{r}(u\cos\theta + w\sin\theta + hn_1\vartheta_1\cos\theta) - \\
&- X_3 + k_2(\Delta T_{22}^\circ - v\Delta T_{11}^\circ) + T_{11}\kappa_{11} + T_{22}\kappa_{22} - Eh^2n_1k_2\frac{\vartheta_1^2}{2}, \\
\frac{dM_{11}}{ds} &= Q_1 + (v-1)\frac{\cos\theta}{r}M_{11} + Eh^2n_1\frac{\cos\theta}{r^2}(u\cos\theta + w\sin\theta) + \\
&+ Eh^3n_2\frac{\cos^2\theta}{r^2}\vartheta_1 + \frac{\cos\theta}{r}(\Delta M_{22}^\circ - v\Delta M_{11}^\circ) - Eh^3n_2k_2\frac{\cos\theta}{r}\frac{\vartheta_1^2}{2}, \tag{3.2.15}
\end{aligned}$$

$$\frac{du}{ds} = \frac{12(1-\nu^2)}{Eh} n_2 T_{11} - \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^2} n_1 M_{11} - \nu \frac{\cos \theta}{r} u - (k_1 + \nu k_2) w -$$

$$-\frac{\vartheta_1^2}{2} - \frac{12(1-\nu^2)}{Eh} n_2 \Delta T_{11}^\Phi + \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^2} n_1 \Delta M_{11}^\Phi,$$

$$\frac{dw}{ds} = k_1 u - \vartheta_1,$$

$$\frac{d\vartheta_1}{ds} = -\frac{12(1-\nu^2)}{Eh^2} n_1 T_{11} + \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} M_{11} - \nu \frac{\cos \theta}{r} \vartheta_1 +$$

$$+ \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^2} n_1 \Delta T_{11}^\Phi - \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} \Delta M_{11}^\Phi + \nu k_2 \frac{\vartheta_1^2}{2}.$$

### 3.3. МАЛЫЕ НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ПРОГИБЫ НЕТОНКОЙ ОБОЛОЧКИ

Основные соотношения задачи определяются формулами (3.1.1)—(3.1.3), (3.1.5)—(3.1.7), (1.6.10), (3.1.8), (3.1.9), (1.7.1), (1.8.6)—(1.8.8), в которых нужно опустить геометрически нелинейные члены вида  $\theta_1^2$ ,

$\theta_1 \theta_2$ ,  $M_{jk} \vartheta_i$ ,  $\Delta T_{ik}^\Gamma$ ,  $\Delta M_{ik}^\Gamma$  и индекс "н" при усилиях.

Задача сводится к одномерной по переменной  $s$ . Для этого решение ее отыскивается в виде тригонометрических рядов [118] по переменной  $\varphi$  с коэффициентами, зависящими от дуги  $s$ :

$$v_1 = \sum_{k=0}^{\infty} (v_{1,k}(s) \cos k\varphi + v_1^k(s) \sin k\varphi), \quad (3.3.1)$$

$$v_2 = \sum_{k=0}^{\infty} (v_{2,k}(s) \sin k\varphi + v_2^k(s) \cos k\varphi). \quad (3.3.2)$$

Разложения для величин  $w$ ,  $u_1$ ,  $u_3$ ,  $\vartheta_1$ ,  $\varphi_1$ ,  $\vartheta_I$ ,  $E_{11}$ ,  $E_{22}$ ,  $\kappa_I$ ,  $\kappa_{II}$ ,  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{13}$ ,  $M_{11}$ ,  $M_{22}$ ,  $T_{11}$ ,  $T_{22}$ ,  $Q_1$  запишутся аналогично (3.3.1), а для  $u_2$ ,  $\vartheta_2$ ,  $\varphi_2$ ,  $\vartheta_{II}$ ,  $E_{12}$ ,  $E_{21}$ ,  $\kappa_{I,II}$ ,  $\kappa_{II,I}$ ,  $\varepsilon_{12}$ ,  $\varepsilon_{23}$ ,  $M_{12}$ ,  $M_{21}$ ,  $T_{12}$ ,  $T_{21}$ ,  $Q_2$  — аналогично (3.3.2).

Разложим в тригонометрические ряды действующие на оболочку поверхностные нагрузки:

$$X_i = \sum_{k=0}^{\infty} (X_{i,k} \cos k\varphi + X_i^k \sin k\varphi), \quad i = 1, 3,$$

$$X_2 = \sum_{k=0}^{\infty} (X_{2,k} \sin k\varphi + X_2^k \cos k\varphi). \quad (3.3.3)$$

Получим приближенным способом разложения для упругопласти-

ческих добавок в усилиях и моментах [82]:

$$\Delta T_{11}^{\Phi} = \sum_{k=0}^{\infty} (\Delta T_{11,k}^{\Phi} \cos k\varphi + \Delta T_{11}^{\Phi,k} \sin k\varphi), \quad (3.3.4)$$

$$\Delta T_{12}^{\Phi} = \sum_{k=0}^{\infty} (\Delta T_{12,k}^{\Phi} \sin k\varphi + \Delta T_{12}^{\Phi,k} \cos k\varphi). \quad (3.3.5)$$

Разложения для  $\Delta T_{22}^{\Phi}$ ,  $\Delta Q_1^{\Phi}$ ,  $\Delta M_{11}^{\Phi}$ ,  $\Delta M_{22}^{\Phi}$  аналогичны (3.3.4), а для  $\Delta T_{21}^{\Phi}$ ,  $\Delta Q_2^{\Phi}$ ,  $\Delta M_{12}^{\Phi}$ ,  $\Delta M_{21}^{\Phi}$  — (3.3.5).

Подстановка рядов (3.3.1)—(3.3.5) в указанные соотношения показывает, что задачи для амплитудных величин с нижними и верхними индексами связаны через нелинейные члены. В дальнейшем приводятся формулы лишь для величин с нижними индексами. Для величин с верхними индексами они будут получаться из приведенных поднятием индекса  $k$  при переменных и заменой  $k$  на  $-k$  в коэффициентах. Назовем эту замену операцией  $[k \uparrow^k \rightarrow -k]$ .

Введем вектор неизвестных  $Y_k$  с десятью компонентами — разрешающими функциями:

$$Y_k = (T_{11,k}, T_{12,k}, Q_{1,k}, M_{11,k}, M_{12,k}, v_{1,k}, v_{2,k}, w_k, \vartheta_{I,k}, \vartheta_{II,k})'. \quad (3.3.6)$$

Выразим участвующие в соотношениях величины через функции (3.3.6). С учетом (1.8.6), (1.8.8), (3.1.5)—(3.1.7), (3.2.8), (3.2.9) запишем

$$\varphi_{1,k} = (Q_{1,k} - \Delta Q_{1,k}^{\Phi}) / D_{5,9}, \quad \varphi_{2,k} = \vartheta_{II,k} - kw_k / r - k_2 v_{2,k}, \quad (3.3.7)$$

$$Q_{2,k} = D_{6,10} (\vartheta_{II,k} - kw_k / r - k_2 v_{2,k}) + \Delta Q_{2,k}^{\Phi};$$

$$\begin{Bmatrix} E_{11,k} \\ \kappa_{1,k} \\ T_{22,k} \\ M_{22,k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 & -d_2 & d_3 & d_4 \\ -d_2 & d_5 & d_6 & d_7 \\ -d_3 & -d_6 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ -d_4 & -d_7 & \gamma_7 & \gamma_8 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{11,k}^0 \\ M_{11,k}^0 \\ E_{22,k} \\ \kappa_{II,k} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta T_{22,k}^{\Phi} \\ \Delta M_{22,k}^{\Phi} \end{Bmatrix}, \quad (3.3.8)$$

где  $T_{11,k}^0 = T_{11,k} - \Delta T_{11,k}^{\Phi}$ ,  $M_{11,k}^0 = M_{11,k} - \Delta M_{11,k}^{\Phi}$ .

Обозначим:

$$\Delta_1 = D_{3,3} D_{9,7} - D_{3,7}^2, \quad d_8 = D_{9,7} / \Delta_1, \quad d_9 = D_{3,7} / \Delta_1, \quad (3.3.9)$$

$$d_{10} = (D_{3,7} D_{3,8} - D_{9,7} D_{3,4}) / \Delta_1, \quad d_{11} = (D_{3,7} D_{9,8} - D_{9,7} D_{3,8}) / \Delta_1,$$

$$d_{12} = D_{3,3} / \Delta_1, \quad d_{13} = (D_{3,7} D_{3,4} - D_{3,3} D_{3,8}) / \Delta_1,$$

$$d_{14} = (D_{3,7} D_{3,8} - D_{3,3} D_{9,8}) / \Delta_1;$$

$$\gamma_9 = -d_{10}, \quad \gamma_{10} = -d_{13}, \quad \gamma_{11} = D_{4,4} + d_{10} D_{3,4} + d_{13} D_{3,8},$$



Таблица 3.1

m	n				
	1	2	3	4	5
1	$\gamma(\gamma_1 - 1)$	$-\varepsilon\gamma_9$	$-k_1$	$\gamma\gamma_2$	$-\varepsilon\gamma_{10}$
2	$\varepsilon\gamma_1$	$-\gamma(1 + \gamma_9)$	0	$\varepsilon\gamma_2$	$-\gamma\gamma_{10}$
3	$k_1 + \gamma_1 k_2$	0	$-\gamma$	$k_2 \gamma_2$	0
4	$\gamma\gamma_5$	$-\gamma_{13}\varepsilon$	1	$\gamma(\gamma_6 - 1)$	$-\varepsilon\gamma_{14}$
5	$\varepsilon\gamma_5$	$-\gamma\gamma_{13}$	0	$\varepsilon\gamma_6$	$-\gamma(1 + \gamma_{14})$
6	$d_1$	0	0	$-d_2$	0
7	0	$d_8$	0	0	$-d_9$
8	0	0	$1/D_{5,9}$	0	0
9	$-d_2$	0	0	$d_5$	0
10	0	$-d_9$	0	0	$d_{12}$

$$\gamma_{12} = D_{4,8} + d_{11}D_{3,4} + d_{14}D_{3,8}, \gamma_{13} = -d_{11}, \gamma_{14} = -d_{14}, \quad (3.3.10)$$

$$\gamma_{15} = D_{4,8} + d_{10}D_{3,8} + d_{13}D_{9,8}, \gamma_{16} = D_{10,8} + d_{11}D_{3,8} + d_{14}D_{9,8}.$$

Тогда из (1.8.7) получим

$$\begin{Bmatrix} E_{12,k} \\ \varepsilon_{III,k} \\ T_{21,k} \\ M_{21,k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_8 & -d_9 & d_{10} & d_{11} \\ -d_9 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ -d_{10} & -d_{13} & \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ -d_{11} & -d_{14} & \gamma_{15} & \gamma_{16} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{12,k}^0 \\ M_{12,k}^0 \\ E_{21,k} \\ \kappa_{III,k} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta T_{21,k}^\Phi \\ \Delta M_{21,k}^\Phi \end{Bmatrix}, \quad (3.3.11)$$

где  $T_{12,k}^0 = T_{12,k} - \Delta T_{12,k}^\Phi$ ,  $M_{12,k}^0 = M_{12,k} - \Delta M_{12,k}^\Phi$ .

Окончательно каноническая система для вектора  $Y_k$  запишется в виде [28]

$$\frac{dY_k}{ds} = A(s)Y_k + \Phi_k, \quad (3.3.12)$$

где  $A(s)$  — матрица коэффициентов системы десятого порядка;  $\Phi_k = (\Phi_{k,1}, \dots, \Phi_{k,10})'$  — вектор правых частей, обусловленный нагрузочными членами и фиктивной нагрузкой от упругопластических добавок. Если обозначить

		n				
	6	7	8	9	10	
	$\gamma_3\gamma_0^2 + \gamma_{11}\varepsilon^2$	$(\gamma_3 + \gamma_{11})\varepsilon\gamma_0$	$\gamma_3 k_2 \gamma_0$	$\gamma_4 \gamma_0^2 + \gamma_{12}\varepsilon^2$	$(\gamma_4 + \gamma_{12})\varepsilon\gamma_0$	
	$(\gamma_3 + \gamma_{11})\varepsilon\gamma_0$	$\gamma_3 \varepsilon^2 + \gamma_{11}\gamma_0^2 + D_{6,10} k_2^2$	$(\gamma_3 + D_{6,10})\varepsilon k_2$	$(\gamma_4 + \gamma_{12})\varepsilon\gamma_0$	$\gamma_4 \varepsilon^2 + \gamma_{12}\gamma_0^2 - D_{6,10} k_2$	
	$k_2 \gamma_3 \gamma_0$	$k_2 \varepsilon \gamma_3 + D_{6,10} \varepsilon^3 k_2$	$\gamma_3 k_2^2 + D_{6,10} \varepsilon^2$	$k_2 \gamma_4 \gamma_0$	$k_2 \gamma_4 \varepsilon - D_{6,10} \varepsilon^3$	
	$\gamma_7 \gamma_0^2 + \gamma_{15}\varepsilon^2$	$(\gamma_7 + \gamma_{15})\varepsilon\gamma_0$	$k_2 \gamma_7 \gamma_0$	$\gamma_8 \gamma_0^2 + \gamma_{16}\varepsilon^2$	$(\gamma_8 + \gamma_{16})\varepsilon\gamma_0$	
	$(\gamma_7 + \gamma_{15})\varepsilon\gamma_0$	$\gamma_7 \varepsilon^2 + \gamma_{15}\gamma_0^2 - D_{6,10} k_2$	$\varepsilon(k_2 \gamma_7 - D_{6,10})$	$(\gamma_8 + \gamma_{16})\varepsilon\gamma_0$	$\gamma_8 \varepsilon^2 + \gamma_{16}\gamma_0^2 + D_{6,10}$	
	$d_3 \gamma_0$	$d_3 \varepsilon$	$d_3 k_2 - k_1$	$d_4 \gamma_0$	$d_4 \varepsilon$	
	$-d_{10} \varepsilon$	$-d_{10} \gamma_0$	0	$-d_{11} \varepsilon$	$-d_{11} \gamma_0$	
	$k_1$	0	0	-1	0	
	$d_6 \gamma_0$	$d_6 \varepsilon$	$d_6 k_2$	$d_7 \gamma_0$	$d_7 \varepsilon$	
	$-d_{13} \varepsilon$	$-d_{13} \gamma_0$	0	$-d_{14} \varepsilon$	$-d_{14} \gamma_0$	

$$\begin{aligned}
k/r &= \varepsilon, \cos \theta/r = \gamma_0, \Pi_1 = \Delta T_{22,k}^\Phi - \gamma_2 \Delta M_{11,k}^\Phi - \gamma_1 \Delta T_{11,k}^\Phi, \\
\Pi_2 &= \Delta T_{21,k}^\Phi - \gamma_9 \Delta T_{12,k}^\Phi - \gamma_{10} \Delta M_{12,k}^\Phi, \Pi_3 = \Delta M_{22,k}^\Phi - \gamma_5 \Delta T_{11,k}^\Phi - \gamma_6 \Delta M_{11,k}^\Phi, \\
\Pi_4 &= \Delta M_{21,k}^\Phi - \gamma_{13} \Delta T_{12,k}^\Phi - \gamma_{14} \Delta M_{12,k}^\Phi,
\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

то компоненты вектора  $\Phi_k$  будут

$$\begin{aligned}
\Phi_{k,1} &= -X_{1,k} + \gamma_0 \Pi_1 - \varepsilon \Pi_2, \Phi_{k,2} = -X_{2,k} + \varepsilon \Pi_1 - \gamma_0 \Pi_2 - k_2 \Delta Q_{2,k}^\Phi, \\
\Phi_{k,3} &= -X_{3,k} - \varepsilon \Delta Q_{2,k}^\Phi + k_2 \Pi_1, \Phi_{k,4} = \gamma_0 \Pi_3 - \varepsilon \Pi_4, \Phi_{k,5} = \varepsilon \Pi_3 - \gamma_0 \Pi_4 + \Delta Q_{2,k}^\Phi, \\
\Phi_{k,6} &= -d_1 \Delta T_{11,k}^\Phi + d_2 \Delta M_{11,k}^\Phi, \Phi_{k,7} = -d_8 \Delta T_{12,k}^\Phi + d_9 \Delta M_{12,k}^\Phi, \\
\Phi_{k,8} &= -\Delta Q_{1,k}^\Phi / D_{5,9}, \Phi_{k,9} = d_2 \Delta T_{11,k}^\Phi - d_5 \Delta M_{11,k}^\Phi, \\
\Phi_{k,10} &= -d_{12} \Delta M_{12,k}^\Phi + d_9 \Delta T_{12,k}^\Phi.
\end{aligned} \tag{3.3.14}$$

Элементы  $A_{mn}$  матрицы  $A(s)$  приведены в табл. 3.1.

Таким образом, в неосесимметричной задаче при учете в соотношениях деформации поперечного сдвига общий порядок системы дифференциальных уравнений будет десятый вместо восьмого. Канонические системы восьмого порядка (теория Кирхгофа—Лява) для изотропной упругой однослойной тонкой оболочки приведены в [118], а для упругой тонкой многослойной ортотропной — в работе [56].

### 3.4. БОЛЬШИЕ НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ПРОГИБЫ ТОНКОЙ ОБОЛОЧКИ

По сравнению с оболочкой вращения средней толщины для тонкой оболочки соотношения (3.1.1.)—(3.1.3), (3.1.5)—(3.1.7), (1.7.1) не изменяются. Упрощения нужно внести в формулы, в которых имеются члены порядка  $k_{1z}$  по сравнению с основными. В выражениях для поворотов (3.1.4) и деформаций (1.6.10) нужно опустить члены с коэффициентами  $k_{1z}, k_{2z}$ . В четвертое и пятое уравнения равновесия (3.1.8) не включаются нелинейные члены вида  $M_{ik}\vartheta_j$ . Связь между усилиями в деформированных и недеформированных осях будет

$$\begin{aligned} T_{11}^H &\approx T_{11}, T_{22}^H \approx T_{22}, Q_1^H \approx Q_1 - T_{11}\vartheta_1 - T_{12}\vartheta_2, \\ Q_2^H &\approx Q_2 - T_{22}\vartheta_2 - T_{12}\vartheta_1, T_{12}^H \approx T_{12}, \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

причем для тонкой оболочки  $T_{12} = T_{21}$ ,  $M_{12} = M_{21}$ . В формулах (1.8.2) нужно отбросить члены, содержащие  $k_{1z}, k_{2z}$ . Тогда несколько упростятся соотношения упругости:

$$\begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ M_{11} \\ M_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} & D_{1,5} & D_{1,6} \\ D_{1,2} & D_{2,2} & D_{1,6} & D_{2,6} \\ D_{1,5} & D_{1,6} & D_{7,5} & D_{7,6} \\ D_{1,6} & D_{2,6} & D_{7,6} & D_{8,6} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ \kappa_I \\ \kappa_{II} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta T_{11}^\Gamma \\ \Delta T_{22}^\Gamma \\ \Delta M_{11}^\Gamma \\ \Delta M_{22}^\Gamma \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta T_{11}^\Phi \\ \Delta T_{22}^\Phi \\ \Delta M_{11}^\Phi \\ \Delta M_{22}^\Phi \end{Bmatrix}, \quad (3.4.2)$$

$$Q_1 = D_{5,9}\varphi_1 + \Delta Q_1^\Phi, Q_2 = D_{6,10}\varphi_2 + \Delta Q_2^\Phi, \quad (3.4.3)$$

$$T_{12} = D_{3,3}(E_{12} + E_{21}) + D_{3,7}(\kappa_{I\Pi} + \kappa_{\Pi I}) + \Delta T_{12}^\Gamma + \Delta T_{12}^\Phi,$$

$$M_{12} = D_{3,7}(E_{12} + E_{21}) + D_{9,7}(\kappa_{I\Pi} + \kappa_{\Pi I}) + \Delta M_{12}^\Gamma + \Delta M_{12}^\Phi. \quad (3.4.4)$$

Здесь жесткости  $D_{m,k}$  по-прежнему определяются по формулам табл. 1.1, а геометрически нелинейные добавки имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta T_{11}^\Gamma &= 0,5(D_{1,1}\vartheta_1^2 + D_{1,2}\vartheta_2^2), \Delta T_{22}^\Gamma = 0,5(D_{1,2}\vartheta_1^2 + D_{2,2}\vartheta_2^2), \\ \Delta M_{11}^\Gamma &= 0,5(D_{1,5}\vartheta_1^2 + D_{1,6}\vartheta_2^2), \Delta M_{22}^\Gamma = 0,5(D_{1,6}\vartheta_1^2 + D_{2,6}\vartheta_2^2), \\ \Delta T_{12}^\Gamma &= D_{3,3}\vartheta_1\vartheta_2, \Delta M_{12}^\Gamma = D_{3,7}\vartheta_1\vartheta_2. \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

В выражениях (1.8.5) нужно пренебречь членами  $k_{1z}, k_{2z}$ .

Введем вектор неизвестных  $Y$  с десятью компонентами — разрешающими функциями:

$$Y = (T_{11}^H, T_{12}^H, Q_1^H, M_{11}, M_{12}, v_1, v_2, w, \vartheta_I, \vartheta_{II})'. \quad (3.4.6)$$

Приведем некоторые необходимые соотношения. Отметим, что фор-

мулы (3.2.8), (3.2.9) не изменятся, а (3.3.9), (3.3.10) упростятся:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= D_{3,3}D_{9,7} - D_{3,7}^2, d_8 = D_{9,7}/\Delta_1, d_9 = D_{3,7}/\Delta_1, d_{10} = -1, \\ d_{11} &= 0, d_{12} = D_{3,3}/\Delta_1, d_{13} = 0, d_{14} = -1; \gamma_9 = 1, \gamma_{10} = \gamma_{11} = \\ &= \gamma_{12} = \gamma_{13} = 0, \gamma_{14} = 1, \gamma_{15} = \gamma_{16} = 0. \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Тогда из (3.4.2) получим формулы (3.2.11), где  $T_{11}^0 = T_{11}^H - \Delta T_{11}^\Gamma -$   
 $-\Delta T_{11}^\Phi, M_{11}^0 = M_{11} - \Delta M_{11}^\Gamma - \Delta M_{11}^\Phi$ . Из (3.4.4) следует:

$$\begin{aligned} E_{12} &= d_8(T_{12}^H - \Delta T_{12}^\Gamma - \Delta T_{12}^\Phi) - d_9(M_{12} - \Delta M_{12}^\Gamma - \Delta M_{12}^\Phi) - E_{21}, \\ \kappa_{III} &= d_{12}(M_{12} - \Delta M_{12}^\Gamma - \Delta M_{12}^\Phi) - d_9(T_{12}^H - \Delta T_{12}^\Gamma - \Delta T_{12}^\Phi) - \kappa_{III}. \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

Сведем задачу к одномерной по переменной  $s$  с помощью метода Л.В. Канторовича [71]. Пусть поверхностная нагрузка  $X_1^H, X_2^H, X_3^H$  задана в виде тригонометрических рядов (3.3.3),  $k = 0, M$ . Будем отыскивать разрешающие функции (3.4.6) в виде таких же рядов:

$$T_{11}^H = \sum_{k=0}^M (T_{11,k} \cos k\varphi + T_{11}^k \sin k\varphi), \quad (3.4.9)$$

$$T_{12}^H = \sum_{k=0}^M (T_{12,k} \sin k\varphi + T_{12}^k \cos k\varphi), \quad (3.4.10)$$

$Q_1^H, M_{11}, \nu_1, w, \vartheta_I$  аналогичны (3.4.9),  $M_{12}, \nu_2, \vartheta_{II}$  — (3.4.10). Величины  $\vartheta_1,$   
 $\vartheta_2, \varphi_1, \varphi_2, E_{11}, E_{22}, E_{12}, E_{21}, \kappa_I, \kappa_{II}, \kappa_{III}, \kappa_{III}$  будут представлены в виде рядов (3.4.9), (3.4.10) с коэффициентами, линейно выражающимися через амплитудные величины вектора (3.4.6).

Разложение геометрически нелинейных членов в тригонометрические ряды получим с помощью метода Бубнова—Галеркина. Введем необходимые интегралы:

$$\begin{pmatrix} k \\ m \\ -n \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos(k+m-n)\varphi d\varphi = \begin{cases} 0, & \text{если } k+m-n \neq 0, \\ 0,5 & \text{если } k+m-n = 0, \end{cases}$$

$$I_{1,kmn} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos k\varphi \cos m\varphi \cos n\varphi d\varphi = \begin{pmatrix} k \\ m \\ -n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -k \\ m \\ n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \\ -m \\ n \end{pmatrix}, \quad (3.4.11)$$

$$I_{2,kmn} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin k\varphi \cos m\varphi \sin n\varphi d\varphi = -\begin{pmatrix} k \\ -m \\ n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -k \\ m \\ n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \\ m \\ -n \end{pmatrix}.$$

Т а б л и ц а 3.2

m	n				
	1	2	3	4	5
1	$\gamma(\gamma_1-1)$	-э	$-k_1$	$\gamma\gamma_2$	0
2	$\varepsilon\gamma_1$	-2ю	0	$\varepsilon\gamma_2$	0
3	$k_1+\gamma_1k_2$	0	-ю	$k_2\gamma_2$	0
4	$\gamma\gamma_5$	0	1	$\gamma(\gamma_6-1)$	-э
5	$\varepsilon\gamma_5$	0	0	$\varepsilon\gamma_6$	-2ю
6	$d_1$	0	0	$-d_2$	0
7	0	$d_8$	0	0	$-d_9$
8	0	0	$1/D_{5,9}$	0	0
9	$-d_2$	0	0	$d_5$	0
10	0	$-d_9$	0	0	$d_{12}$

Приведем полученные разложения:

$$\vartheta_1\vartheta_2 = A_2^0 + \sum_{k=1}^M (A_{2,k} \sin k\varphi + A_2^k \cos k\varphi),$$

$$A_2^0 = \vartheta_{1,0}\vartheta_2^0 + 0,5 \sum_{n=1}^M (\vartheta_1^n \vartheta_{2,n} + \vartheta_{1,n} \vartheta_2^n), \quad (3.4.12)$$

$$A_{2,k} = \vartheta_2^0 \vartheta_1^k + \vartheta_{1,0} \vartheta_{2,k} + \sum_{m,n=1}^M (\vartheta_{1,m} \vartheta_{2,n} + \vartheta_1^n \vartheta_2^m) I_{2,nmk},$$

$$A_2^k = \vartheta_2^0 \vartheta_{1,k} + \vartheta_{1,0} \vartheta_2^k + \sum_{m,n=1}^M (\vartheta_1^n \vartheta_{2,m} I_{2,nkm} + \vartheta_{1,n} \vartheta_2^m I_{1,nmk});$$

$$T_{11}^n \vartheta_1 = A_{4,0} + \sum_{k=1}^M (A_{4,k} \cos k\varphi + A_4^k \sin k\varphi),$$

$$A_{4,0} = T_{11,0} \vartheta_{1,0} + 0,5 \sum_{n=1}^M (T_{11,n} \vartheta_{1,n} + T_{11}^n \vartheta_1^n), \quad (3.4.13)$$

$$A_{4,k} = \vartheta_{1,0} T_{11,k} + T_{11,0} \vartheta_{1,k} + \sum_{m,n=1}^M (T_{11,n} \vartheta_{1,m} I_{1,nmk} + T_{11}^n \vartheta_1^m I_{2,nkm}),$$

$$A_4^k = \vartheta_{1,0} T_{11}^k + \vartheta_1^k T_{11,0} + \sum_{m,n=1}^M (T_{11}^n \vartheta_{1,m} + T_{11,m} \vartheta_1^n) I_{2,nmk};$$

$$T_{12}^n \vartheta_2 = A_{5,0} + \sum_{k=1}^M (A_{5,k} \cos k\varphi + A_5^k \sin k\varphi),$$

		n				
		6	7	8	9	10
	$\gamma_{3ю}^2$		$\gamma_{3юэ}$	$k_2\gamma_{3ю}$		$\gamma_{4ю}^2$
	$\gamma_{3юэ}$		$\gamma_{3э}^2 + D_{6,10}k_2^2$	$k_2э(\gamma_3 + D_{6,10})$		$\gamma_{4юэ}$
	$k_2\gamma_{3ю}$		$k_2э(\gamma_3 + D_{6,10})$	$k_2^2\gamma_3 + э^2D_{6,10}$		$э(k_2\gamma_4 - D_{6,10})$
	$\gamma_{7ю}^2$		$\gamma_{7юэ}$	$\gamma_7k_2ю$		$\gamma_{8ю}^2$
	$\gamma_{7юэ}$		$\gamma_7э^2 - k_2D_{6,10}$	$э(\gamma_7k_2 - D_{6,10})$		$\gamma_{8юэ}$
	$d_{3ю}$		$d_{3э}$	$d_3k_2 - k_1$		$d_{4ю}$
	$-d_{10э}$		$-d_{10ю}$	0		0
	$k_1$		0	0		-1
	$d_{6ю}$		$d_{6э}$	$d_6k_2$		$d_{7ю}$
	0		0	0		э
						ю

$$A_{5,0} = T_{12}^0 \vartheta_2^0 + 0,5 \sum_{n=1}^M (T_{12,n} \vartheta_{2,n} + T_{12}^n \vartheta_2^n), \quad (3.4.14)$$

$$A_{5,k} = \vartheta_2^0 T_{12}^k + T_{12}^0 \vartheta_2^k + \sum_{m,n=1}^M (T_{12,n} \vartheta_{2,m} I_{2,nkm} + T_{12}^n \vartheta_2^m I_{1,nmk}),$$

$$A_5^k = \vartheta_2^0 T_{12,k} + T_{12}^0 \vartheta_{2,k} + \sum_{m,n=1}^M (T_{12}^n \vartheta_{2,m} + T_{12,m} \vartheta_2^n) I_{2,mnk};$$

$$\vartheta_1^2 = A_{1,0} + \sum_{k=1}^M (A_{1,k} \cos k\varphi + A_1^k \sin k\varphi); \quad (3.4.15)$$

$$\vartheta_2^2 = A_{3,0} + \sum_{k=1}^M (A_{3,k} \cos k\varphi + A_3^k \sin k\varphi); \quad (3.4.16)$$

$$T_{22}^H \vartheta_2 = A_6^0 + \sum_{k=1}^M (A_{6,k} \sin k\varphi + A_6^k \cos k\varphi); \quad (3.4.17)$$

$$T_{12}^H \vartheta_1 = A_7^0 + \sum_{k=1}^M (A_{7,k} \sin k\varphi + A_7^k \cos k\varphi). \quad (3.4.18)$$

Коэффициенты разложений (3.4.15)–(3.4.18) получаются из (3.4.13); (3.4.14); (3.4.12) заменой  $T_{11}^H$ ;  $T_{12}^H$ ;  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  на  $\vartheta_1$ ;  $\vartheta_2$ ;  $T_{22}^H$  и  $T_{12}^H$  соответственно. Имея (3.4.12)–(3.4.18), возможно записать разложения вида (3.4.9), (3.4.10) для геометрически нелинейных выражений  $\Delta T_{ik}^\Gamma$ ,  $\Delta M_{ik}^\Gamma$ .

Можно получить численно подобные разложения для упругоплас-

тических добавок в усилиях и моментах [82]. Не приводя всех промежуточных выкладок, запишем каноническую систему [28] для вектора (3.3.6):

$$\frac{dY_k}{ds} = B(s)Y_k + F_k, \quad (3.4.19)$$

где  $B(s)$  — матрица коэффициентов системы десятого порядка,  $F_k = (F_{k,1}, \dots, F_{k,10})'$  — вектор правых частей, включающий нагрузку и нелинейные члены. Если обозначить

$$P_5 = \Delta T_{22,k}^\Gamma + \Delta T_{22,k}^\Phi - \gamma_1(\Delta T_{11,k}^\Gamma + \Delta T_{11,k}^\Phi) - \gamma_2(\Delta M_{11,k}^\Gamma + \Delta M_{11,k}^\Phi), \quad (3.4.20)$$

$$P_6 = \Delta M_{22,k}^\Gamma + \Delta M_{22,k}^\Phi - \gamma_5(\Delta T_{11,k}^\Gamma + \Delta T_{11,k}^\Phi) - \gamma_6(\Delta M_{11,k}^\Gamma + \Delta M_{11,k}^\Phi),$$

то компоненты вектора  $F_k$  будут:

$$\begin{aligned} F_{k,1} &= -X_{1,k} + \gamma_0 P_5, F_{k,2} = -X_{2,k} + \gamma_3 P_5 - k_2(\Delta Q_{2,k}^\Phi - A_{6,k} - A_{7,k}), \\ F_{k,3} &= -X_{3,k} - \gamma_3(\Delta Q_{2,k}^\Phi - A_{6,k} - A_{7,k}) + k_2 P_5, F_{k,4} = \gamma_0 P_6 + A_{4,k} + A_{5,k}, \\ F_{k,5} &= \gamma_3 P_6 + \Delta Q_{2,k}^\Phi, F_{k,6} = -d_1(\Delta T_{11,k}^\Gamma + \Delta T_{11,k}^\Phi) + d_2(\Delta M_{11,k}^\Gamma + \Delta M_{11,k}^\Phi), \\ F_{k,7} &= -d_8(\Delta T_{12,k}^\Gamma + \Delta T_{12,k}^\Phi) + d_9(\Delta M_{12,k}^\Gamma + \Delta M_{12,k}^\Phi), \quad (3.4.21) \\ F_{k,8} &= (-\Delta Q_{1,k}^\Phi + A_{4,k} + A_{5,k})/D_{5,9}, F_{k,9} = d_2(\Delta T_{11,k}^\Gamma + \Delta T_{11,k}^\Phi) - \\ &- d_5(\Delta M_{11,k}^\Gamma + \Delta M_{11,k}^\Phi), \\ F_{k,10} &= d_9(\Delta T_{12,k}^\Gamma + \Delta T_{12,k}^\Phi) - d_{12}(\Delta M_{12,k}^\Gamma + \Delta M_{12,k}^\Phi). \end{aligned}$$

Элементы  $B_{mn}$  матрицы  $B(s)$  даны в табл. 3.2.

Таким образом, получена система десятого порядка для вектора  $Y_k$ . Соотношения для  $Y^k$  получаются из (3.4.19) с помощью описанной ранее замены  $[k \uparrow^k \rightarrow -k]$ . Видно, что системы для  $Y_k$  и  $Y^k$  не разделяются — они связаны между собой через нелинейные члены.

### 3.5. О ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Для рассмотрения вопроса о записи граничных условий в краевых задачах уточненной теории оболочек вращения, так же как и в теории Кирхгофа—Лява, можно привлечь первые интегралы уравнений равновесия [118]. В случае осесимметричного изгиба ( $k=0$ ) система уравнений равновесия шестого порядка имеет один первый интеграл, что исключает один произвол при задании статических краевых условий.

Следовательно, в случае осесимметричного изгиба нельзя задавать все шесть граничных условий статическими. Одно из шести условий должно быть условием на обобщенное перемещение. Обычно задают перемещение одного из краевых срезов оболочки вдоль ее оси вращения.

Когда деформация антисимметричная ( $k=1$ ), первых интегралов будет два. Тогда из десяти граничных условий статическими могут

быть только восемь, остальные два будут кинематическими. При  $k \geq 2$  (циклически-симметричная деформация) система уравнений равновесия не имеет первых интегралов. Все десять граничных условий могут быть или статическими, или в перемещениях, или смешанными.

Подобные же выводы можно получить, если рассмотреть условия разрешимости алгебраической системы для обобщенных перемещений  $v_{1,k}, v_{2,k}, w_k, \vartheta_{I,k}, \vartheta_{II,k}$  через компоненты деформации оболочки.

## Г Л А В А 4

### КАНОНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

#### 4.1. УРАВНЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ МНОГОСЛОЙНОЙ ТОНКОЙ УПРУГОЙ ОРТОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКИ

Основное состояние  $\sigma^I$  будет описываться соотношениями (1.6.3)—(1.6.15), в которых для тонкой оболочки нужно отбросить подчеркнутые члены, а также формулами (1.7.1), (3.4.2)—(3.4.5), (3.4.7), (3.4.8). В этих формулах следует положить  $\Delta\sigma_{ik} = \Delta T_{ik}^\Phi = \Delta M_{ik}^\Phi = 0$ , а величинам,

характеризующим напряженно-деформированное состояние, присвоить индекс I сверху. Смежное состояние будет описываться теми же формулами с присвоением вместо индекса I звездочки.

Приведем основные соотношения [29] для добавочного состояния: перемещения и деформации:

$$\delta v_1 = v_1^* - v_1^I, \delta w = w^* - w^I, \delta \varphi_1 = \varphi_1^* - \varphi_1^I;$$

$$\delta \vartheta_1 = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial \delta w}{\partial \alpha_1} + k_1 \delta v_1, \delta \vartheta_1 = \delta \vartheta_1 + \delta \varphi_1;$$

$$\delta E_{11} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \delta v_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\delta v_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + k_1 \delta w, \quad (4.1.1)$$

$$\delta E_{12} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \delta v_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\delta v_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2};$$

$$\delta \kappa_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \delta \vartheta_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\delta \vartheta_{II}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2},$$

$$\delta \kappa_{III} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \delta \vartheta_{II}}{\partial \alpha_1} - \frac{\delta \vartheta_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2};$$

$$\delta \varepsilon_{11} = \delta E_{11} + z \delta \kappa_1 + \vartheta_1^I \delta \vartheta_1, \quad \delta \varepsilon_{13} = \delta \varphi_1,$$

$$\delta \varepsilon_{12} = \delta E_{12} + \delta E_{21} + z(\delta \kappa_{II} + \delta \kappa_{III}) + \vartheta_1^I \delta \vartheta_2 + \vartheta_2^I \delta \vartheta_1;$$

$$\delta T_{11}^H = \delta T_{11}, \quad \delta T_{12}^H = \delta T_{12}; \quad (1,2),$$

$$\delta Q_1^H = \delta Q_1 - (T_{11}^H \delta \vartheta_1 + \vartheta_1^I \delta T_{11}) - (T_{12}^H \delta \vartheta_2 + \vartheta_2^I \delta T_{12});$$



Т а б л и ц а 4.1

m	n				
	1	2	3	4	5
1	$\gamma(\gamma_1 - 1 + \chi_5 \vartheta_1^I / A)$	-э	$\gamma \chi_5 / A - k_1$	$\gamma \gamma_2$	0
2	$\varepsilon(\gamma_1 + \chi_5 \vartheta_1^I / A)$	$k_2 \vartheta_1^I - 2\gamma$	$\varepsilon \chi_5 / A$	$\varepsilon \gamma_2$	0
3	$k_1 + \gamma_1 k_2 + k_2 \chi_5 \vartheta_1^I / A$	$\varepsilon \vartheta_1^I$	$k_2 \chi_5 / A - \gamma$	$k_2 \gamma_2$	0
4	$\gamma \gamma_5 + \vartheta_1^I \times \times (1 + \gamma \chi_7) / A$	0	$(1 + \gamma \chi_7) / A$	$\gamma(\gamma_6 - 1)$	-э
5	$\varepsilon(\gamma_5 + \chi_7 \vartheta_1^I / A)$	0	$\varepsilon \chi_7 / A$	$\gamma_6 \varepsilon$	-2γ
6	$d_1 + \chi_1 \vartheta_1^I / A$	0	$\chi_1 / A$	-d <sub>2</sub>	0
7	0	d <sub>8</sub>	0	0	-d <sub>9</sub>
8	$\vartheta_1^I / (AD_{5,9})$	0	$1 / (AD_{5,9})$	0	0
9	$\chi_3 \vartheta_1^I / A - d_2$	0	$\chi_3 / A$	d <sub>5</sub>	0
10	0	-d <sub>9</sub>	0	0	d <sub>12</sub>

напряжения:

$$\delta \sigma_{11}^i = A_i \delta \varepsilon_{11} + C_i \delta \varepsilon_{22}, \delta \sigma_{22}^i = C_i \delta \varepsilon_{11} + B_i \delta \varepsilon_{22},$$

$$\delta \sigma_{12}^i = G_{12}^i \delta \varepsilon_{12}, \delta \sigma_{13}^i = G_{13}^i \delta \varepsilon_{13}, \delta \sigma_{23}^i = G_{23}^i \delta \varepsilon_{23}; \quad (4.1.2)$$

усилия и моменты:

$$\begin{Bmatrix} \delta T_{11} \\ \delta T_{22} \\ \delta M_{11} \\ \delta M_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} & D_{1,5} & D_{1,6} \\ D_{1,2} & D_{2,2} & D_{1,6} & D_{2,6} \\ D_{1,5} & D_{1,6} & D_{7,5} & D_{7,6} \\ D_{1,6} & D_{2,6} & D_{7,6} & D_{8,6} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta E_{11} \\ \delta E_{22} \\ \delta \kappa_I \\ \delta \kappa_{II} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta \Delta T_{11}^\Gamma \\ \delta \Delta T_{22}^\Gamma \\ \delta \Delta M_{11}^\Gamma \\ \delta \Delta M_{22}^\Gamma \end{Bmatrix}; \quad (4.1.3)$$

$$\delta Q_1 = D_{5,9} \delta \varphi_1, \delta Q_2 = D_{6,10} \delta \varphi_2; \quad (4.1.4)$$

$$\delta T_{12} = D_{3,3} (\delta E_{12} + \delta E_{21}) + D_{3,7} (\delta \kappa_{II} + \delta \kappa_{III}) + \delta \Delta T_{12}^\Gamma, \quad (4.1.5)$$

$$\delta M_{12} = D_{3,7} (\delta E_{12} + \delta E_{21}) + D_{9,7} (\delta \kappa_{III} + \delta \kappa_{II}) + \delta \Delta M_{12}^\Gamma.$$

n				
6	7	8	9	10
$\gamma_3 \gamma_0^2$	$\gamma_3 \gamma_0 \varepsilon$	$\gamma_3 \gamma_0 k_2$	$\gamma_0 (\chi_6 + \chi_5 T_{11}^{I,H}/A)$	$\gamma_4 \gamma_0 \varepsilon$
$\gamma_3 \gamma_0 \varepsilon$	$\gamma_3 \varepsilon^2 + k_2^2 \times$ $\times (T_{22}^I + D_{6,10})$	$k_2 \varepsilon (\gamma_3 + T_{22}^I + D_{6,10})$	$\varepsilon (\chi_6 + \chi_5 T_{11}^{I,H}/A)$	$\gamma_4 \varepsilon^2 - k_2 D_{6,10}$
$\gamma_3 \gamma_0 k_2$	$k_2 \varepsilon (\gamma_3 +$ $+ T_{22}^I + D_{6,10})$	$\gamma_3 k_2^2 + \varepsilon^2 (T_{22}^I + D_{6,10})$	$k_2 (\chi_6 + \chi_5 T_{11}^{I,H}/A)$	$\varepsilon (\gamma_4 k_2 - D_{6,10})$
$\gamma_7 \gamma_0^2$	$\gamma_7 \gamma_0 \varepsilon$	$\gamma_7 \gamma_0 k_2$	$\gamma_0 \chi_8 + (1 + \gamma_0 \chi_7) \times$ $\times T_{11}^{I,H}/A$	$\gamma_8 \gamma_0 \varepsilon$
$\gamma_7 \gamma_0 \varepsilon$	$\gamma_7 \varepsilon^2 - k_2 D_{6,10}$	$\varepsilon (\gamma_7 k_2 - D_{6,10})$	$\varepsilon (\chi_8 + \chi_7 T_{11}^{I,H}/A)$	$\gamma_8 \varepsilon^2 + D_{6,10}$
$d_3 \gamma_0$	$d_3 \varepsilon$	$d_3 k_2 - k_1$	$\chi_2 + \chi_1 T_{11}^{I,H}/A$	$d_4 \varepsilon$
$\varepsilon$	$\chi_9$	$\chi_{10}$	0	0
$k_1$	0	0	$T_{11}^{I,H}/(AD_{5,9}) - 1$	0
$d_6 \gamma_0$	$d_6 \varepsilon$	$d_6 k_2$	$\chi_4 + \chi_3 T_{11}^{I,H}/A$	$d_7 \varepsilon$
0	0	0	$\varepsilon$	$\gamma_0$

Здесь

$$\begin{Bmatrix} \delta \Delta T_{11}^{\Gamma} \\ \delta \Delta T_{22}^{\Gamma} \\ \delta \Delta M_{11}^{\Gamma} \\ \delta \Delta M_{22}^{\Gamma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} \\ D_{1,2} & D_{2,2} \\ D_{1,5} & D_{1,6} \\ D_{1,6} & D_{2,6} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \vartheta_1^I \delta \vartheta_1 \\ \vartheta_2^I \delta \vartheta_2 \end{Bmatrix}, \quad (4.1.6)$$

$$\delta \Delta T_{12}^{\Gamma} = D_{3,3} (\vartheta_1^I \delta \vartheta_2 + \vartheta_2^I \delta \vartheta_1),$$

$$\delta \Delta M_{12}^{\Gamma} = D_{3,7} (\vartheta_1^I \delta \vartheta_2 + \vartheta_2^I \delta \vartheta_1).$$

Жесткости  $D_{m,k}$  по-прежнему определяются по формулам табл. 1.1 с учетом того, что в соотношениях (1.8.2) нужно пренебречь членами порядка  $k_1 z$ ,  $k_2 z$  по сравнению с единицей.

Уравнения нейтрального равновесия в недеформированных осях

имеют вид

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial A_2 \delta T_{11}^n}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \delta T_{22}^n + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \delta T_{12}^n + \frac{\partial A_1 \delta T_{12}^n}{\partial \alpha_2} + A_1 A_2 k_1 \delta Q_1^n + \\
& + A_1 A_2 (X_1^{*n} - X_1^{In}) = 0, (1, 2) \\
& \frac{\partial A_2 \delta Q_1^n}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 \delta Q_2^n}{\partial \alpha_2} - A_1 A_2 (k_1 \delta T_{11}^n + k_2 \delta T_{22}^n) + \\
& + A_1 A_2 (X_3^{*n} - X_3^{In}) = 0, \\
& \frac{\partial A_2 \delta M_{11}}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \delta M_{22} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \delta M_{12} + \frac{\partial A_1 \delta M_{12}}{\partial \alpha_2} - A_1 A_2 \delta Q_1 = 0, (1, 2).
\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

Перейдем к оболочке вращения. Пусть основное состояние оболочки до потери устойчивости описывается соотношениями геометрически нелинейного осесимметричного изгиба из разд. 3.2. Отметим, что в формулах разд. 3.2 для упругой тонкой оболочки нужно пренебречь подчеркнутыми членами и упругопластическими добавками.

Сведем с помощью рядов вида (3.3.1)—(3.3.3) уравнения в частных производных для добавочного состояния к обыкновенным дифференциальным уравнениям для коэффициентов рядов. Введем вектор неизвестных  $\delta Y_k$  с десятью компонентами:

$$\begin{aligned}
\delta Y_k = & (\delta T_{11,k}^n, \delta T_{12,k}^n, \delta Q_{1,k}^n, \delta M_{11,k}, \delta M_{12,k}, \delta v_{1,k}, \delta v_{2,k}, \\
& \delta w_k, \delta \vartheta_{I,k}, \delta \vartheta_{II,k})'
\end{aligned} \tag{4.1.8}$$

и ряд обозначений с учетом (3.2.8), (3.2.9), (3.3.9):

$$\begin{aligned}
k/r = \varepsilon, \cos \theta/r = \gamma; \quad \psi_1 = D_{1,1} \vartheta_1^I, \quad \psi_3 = D_{1,2} \vartheta_1^I, \quad \psi_5 = D_{1,5} \vartheta_1^I, \\
\psi_7 = D_{1,6} \vartheta_1^I; \quad \psi_2 = -\psi_1/D_{5,9}, \psi_4 = -\psi_3/D_{5,9}, \psi_6 = -\psi_5/D_{5,9}, \\
\psi_8 = -\psi_7/D_{5,9}; \psi_{10} = \psi_{13} = D_{3,3} \vartheta_1^I \varepsilon, \quad \psi_{16} = \psi_{19} = D_{3,7} \vartheta_1^I \varepsilon; \\
\psi_{11} = \psi_{14} = D_{3,3} \vartheta_1^I k_2, \quad \psi_{17} = \psi_{20} = D_{3,7} \vartheta_1^I k_2; \quad A = 1 + T_{11}^{In}/D_{5,9}; \\
\chi_1 = -d_1 \psi_2 + d_2 \psi_6, \quad \chi_2 = -d_1 \psi_1 + d_2 \psi_5 + d_4 \gamma, \\
\chi_3 = d_2 \psi_2 - d_5 \psi_6, \quad \chi_4 = d_2 \psi_1 - d_5 \psi_5 + d_7 \gamma, \\
\chi_5 = -\gamma_1 \psi_2 - \gamma_2 \psi_6 + \psi_4, \quad \chi_6 = -\gamma_1 \psi_1 - \gamma_2 \psi_5 + \gamma_4 \gamma + \psi_3, \\
\chi_7 = -\gamma_5 \psi_2 - \gamma_6 \psi_6 + \psi_8, \quad \chi_8 = -\gamma_5 \psi_1 - \gamma_6 \psi_5 + \gamma_8 \gamma + \psi_7, \\
\chi_9 = -d_8 \psi_{11} + d_9 \psi_{17} - \gamma d_{10}, \quad \chi_{10} = -d_8 \psi_{10} + d_9 \psi_{16}, \quad \chi_{14} = -d_{14} \gamma.
\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

Для вектора  $\delta Y_k$  запишем каноническую систему в виде

$$\frac{d \delta Y_k}{ds} = C(s) \delta Y_k + \delta f_k, \tag{4.1.10}$$

где  $\delta f_k$  — вектор вариации внешних сил:

$$\delta f_k = (-\delta X_{1,k}^H, -\delta X_{2,k}^H, -\delta X_{3,k}^H, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \quad (4.1.11)$$

$C(s)$  — матрица коэффициентов системы десятого порядка. Элементы ее  $C_{mn}$  приведены в табл. 4.1. Соотношения для вектора  $\delta Y^k$  получаются из (4.1.10) с помощью операции  $[k \uparrow^k \rightarrow -k]$  описанной ранее.

#### 4.2. УРАВНЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ МНОГОСЛОЙНОЙ ТОНКОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ИЗОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКИ

Основное состояние будет описываться соотношениями (1.6.3)—(1.6.15), (1.7.1), (3.4.2)—(3.4.8). В этих формулах к соответствующим величинам нужно добавить индекс I сверху, пренебречь подчеркнутыми членами и учесть изотропию:

$$B_j = A_j, \quad v_{12}^j = v_{21}^j = v_j, \quad E_1^j = E_2^j = E^j, \\ G_{12}^j = G_{13}^j = G_{23}^j = G^j = E^j / [2(1 + \nu_j)]. \quad (4.2.1)$$

Указанными формулами определяется и смежное состояние, если заменить индекс I на звездочку.

Для добавочного состояния формулы (4.1.1), (4.1.7) сохраняют свою силу и в упругопластическом случае. Вариации напряжений выражаются формулами (2.1.4), (2.2.1)—(2.2.5). Получим выражения вариаций усилий и моментов. С учетом (3.4.2)—(3.4.5) имеем

$$\begin{Bmatrix} \delta T_{11} \\ \delta T_{22} \\ \delta M_{11} \\ \delta M_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} & D_{1,5} & D_{1,6} \\ D_{1,2} & D_{1,1} & D_{1,6} & D_{1,5} \\ D_{1,5} & D_{1,6} & D_{7,5} & D_{7,6} \\ D_{1,6} & D_{1,5} & D_{7,6} & D_{7,5} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta E_{11} + \vartheta_1^I \delta \vartheta_1 \\ \delta E_{22} + \vartheta_2^I \delta \vartheta_2 \\ \delta \kappa_I \\ \delta \kappa_{II} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta \Delta T_{11}^\Phi \\ \delta \Delta T_{22}^\Phi \\ \delta \Delta M_{11}^\Phi \\ \delta \Delta M_{22}^\Phi \end{Bmatrix}, \\ \delta T_{12} = D_{3,3} (\delta E_{12} + \delta E_{21} + \vartheta_1^I \delta \vartheta_2 + \vartheta_2^I \delta \vartheta_1) + D_{3,7} (\delta \kappa_{III} + \delta \kappa_{PI}) + \delta \Delta T_{12}^\Phi, \\ \delta M_{12} = D_{3,7} (\delta E_{12} + \delta E_{21} + \vartheta_1^I \delta \vartheta_2 + \vartheta_2^I \delta \vartheta_1) + D_{9,7} (\delta \kappa_{III} + \delta \kappa_{PI}) + \delta \Delta M_{12}^\Phi, \\ \delta Q_1 = D_{5,9} \delta \varphi_1 + \delta \Delta Q_1^\Phi, \quad \delta Q_2 = D_{6,10} \delta \varphi_2 + \delta \Delta Q_2^\Phi, \quad (4.2.2)$$

где

$$\delta \Delta T_{11}^\Phi = \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} \delta \Delta \sigma_{11}^i dz, \quad \delta \Delta T_{12}^\Phi = \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} \delta \Delta \sigma_{12}^i dz, \\ \delta \Delta M_{11}^\Phi = \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} \delta \Delta \sigma_{11}^i z dz, \quad \delta \Delta M_{12}^\Phi = \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} \delta \Delta \sigma_{12}^i z dz, \quad (4.2.3) \\ \delta \Delta Q_1^\Phi = \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} \delta \Delta \sigma_{13}^i dz; (1,2).$$

Введем обозначения:

$$d_{1,1}^I = \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{1,1}^{I,i} dz, \quad d_{1,2}^I = \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{1,2}^{I,i} dz,$$

$$\begin{aligned}
d_{1,3}^I &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{1,3}^{I,i} dz, & d_{1,4}^I &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{1,4}^{I,i} dz, \\
d_{1,5}^I &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{1,5}^{I,i} dz, & d_{1,6}^I &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{1,1}^{I,i} z dz, \\
d_{1,7}^I &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{1,2}^{I,i} z dz, & d_{1,8}^I &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{1,3}^{I,i} z dz, \\
d_{1,9}^I &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{1,4}^{I,i} z dz, & d_{1,10}^I &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{1,5}^{I,i} z dz, \\
d_{1,11}^I &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{1,1}^{I,i} z^2 dz, & d_{1,12}^I &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{1,2}^{I,i} z^2 dz, \\
d_{1,13}^I &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2G^i N_{1,3}^{I,i} z^2 dz.
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

Из коэффициентов  $d_{1,k}^I$  ( $k = \overline{1,13}$ ) получаются другие коэффициенты:

$d_{2,k}^I, d_{3,k}^I, d_{4,k}^I, d_{5,k}^I$ , заменой  $2N_{1,m}^{I,i}$  на  $2N_{2,m}^{I,i}, N_{3,m}^{I,i}, N_{4,m}^{I,i}, N_{5,m}^{I,i}$  ( $m = \overline{1,5}$ )

соответственно.

Тогда с учетом (2.2.5) вариации упругопластических добавок в усилиях и моментах выражаются через вариации деформаций в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{l} \delta \Delta T_{11}^\phi \\ \delta \Delta T_{22}^\phi \\ \delta \Delta T_{12}^\phi \\ \delta \Delta Q_1^\phi \\ \delta \Delta Q_2^\phi \\ \delta \Delta M_{11}^\phi \\ \delta \Delta M_{22}^\phi \\ \delta \Delta M_{12}^\phi \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cccccccc} d_{1,1}^I & d_{1,2}^I & d_{1,3}^I & d_{1,4}^I & d_{1,5}^I & d_{1,6}^I & d_{1,7}^I & d_{1,8}^I \\ d_{2,1}^I & d_{2,2}^I & d_{2,3}^I & d_{2,4}^I & d_{2,5}^I & d_{2,6}^I & d_{2,7}^I & d_{2,8}^I \\ d_{3,1}^I & d_{3,2}^I & d_{3,3}^I & d_{3,4}^I & d_{3,5}^I & d_{3,6}^I & d_{3,7}^I & d_{3,8}^I \\ d_{4,1}^I & d_{4,2}^I & d_{4,3}^I & d_{4,4}^I & d_{4,5}^I & d_{4,6}^I & d_{4,7}^I & d_{4,8}^I \\ d_{5,1}^I & d_{5,2}^I & d_{5,3}^I & d_{5,4}^I & d_{5,5}^I & d_{5,6}^I & d_{5,7}^I & d_{5,8}^I \\ d_{1,6}^I & d_{1,7}^I & d_{1,8}^I & d_{1,9}^I & d_{1,10}^I & d_{1,11}^I & d_{1,12}^I & d_{1,13}^I \\ d_{2,6}^I & d_{2,7}^I & d_{2,8}^I & d_{2,9}^I & d_{2,10}^I & d_{2,11}^I & d_{2,12}^I & d_{2,13}^I \\ d_{3,6}^I & d_{3,7}^I & d_{3,8}^I & d_{3,9}^I & d_{3,10}^I & d_{3,11}^I & d_{3,12}^I & d_{3,13}^I \end{array} \right\} \times \\
& \times \left\{ \begin{array}{l} \delta E_{11} + \vartheta_1^I \delta \vartheta_1 \\ \delta E_{22} + \vartheta_2^I \delta \vartheta_2 \\ \delta E_{12} + \delta E_{21} + \vartheta_1^I \delta \vartheta_2 + \vartheta_2^I \delta \vartheta_1 \\ \delta \varphi_1 \\ \delta \varphi_2 \\ \delta \kappa_I \\ \delta \kappa_{II} \\ \delta \kappa_{III} + \delta \kappa_{III} \end{array} \right\}. \tag{4.2.5}
\end{aligned}$$

Из (2.1.4), (2.2.5), (4.2.2), (4.2.5) видно, что для изотропного упругопластического тела вариации напряжений, усилий и моментов связаны с вариациями деформаций значительно более сложными зависимостями, чем в упругом случае [66].

Получим каноническую систему уравнений нейтрального равновесия с учетом деформации поперечного сдвига для тонкой упругопластической оболочки вращения [29]. Основное состояние — нелинейный осесимметричный изгиб, рассмотренный в разд. 3.2. При этом для тонкой оболочки в формулах разд. 3.2 нужно пренебречь подчеркнутыми членами.

В силу осесимметричности основного состояния  $\Pi_{12}^{I,i} = \Pi_{23}^{I,i} = 0$ . Тогда

соотношения (4.2.5) значительно упростятся и примут вид

$$\begin{pmatrix} \delta \Delta T_{11}^{\circ} \\ \delta \Delta T_{22}^{\circ} \\ \delta \Delta Q_1^{\circ} \\ \delta \Delta M_{11}^{\circ} \\ \delta \Delta M_{22}^{\circ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{1,1}^I & d_{1,2}^I & d_{1,4}^I & d_{1,6}^I & d_{1,7}^I \\ d_{2,1}^I & d_{2,2}^I & d_{2,4}^I & d_{2,6}^I & d_{2,7}^I \\ d_{4,1}^I & d_{4,2}^I & d_{4,4}^I & d_{4,6}^I & d_{4,7}^I \\ d_{1,6}^I & d_{1,7}^I & d_{1,9}^I & d_{1,11}^I & d_{1,12}^I \\ d_{2,6}^I & d_{2,7}^I & d_{2,9}^I & d_{2,11}^I & d_{2,12}^I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta E_{11} + \vartheta_1^I \delta \vartheta_1 \\ \delta E_{22} \\ \delta \varphi_1 \\ \delta \kappa_I \\ \delta \kappa_{II} \end{pmatrix}, \quad (4.2.6)$$

$$\delta \Delta T_{12}^{\circ} = d_{3,3}^I (\delta E_{12} + \delta E_{21} + \vartheta_1^I \delta \vartheta_2) + d_{3,8}^I (\delta \kappa_{III} + \delta \kappa_{III}),$$

$$\delta \Delta M_{12}^{\circ} = d_{3,8}^I (\delta E_{12} + \delta E_{21} + \vartheta_1^I \delta \vartheta_2) + d_{3,13}^I (\delta \kappa_{III} + \delta \kappa_{III}),$$

$$\delta \Delta Q_2^{\circ} = d_{3,3}^I \delta \varphi_2.$$

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} D_{1,1}^I &= D_{1,1} + d_{1,1}^I, D_{2,1}^I = D_{1,2} + d_{2,1}^I, D_{7,5}^I = D_{7,5} + d_{1,11}^I, \\ D_{1,2}^I &= D_{1,2} + d_{1,2}^I, D_{2,2}^I = D_{1,1} + d_{2,2}^I, D_{7,6}^I = D_{7,6} + d_{1,12}^I, \\ D_{1,5}^I &= D_{1,5} + d_{1,6}^I, D_{2,5}^I = D_{1,6} + d_{2,6}^I, D_{8,5}^I = D_{7,6} + d_{2,11}^I, \\ D_{1,6}^I &= D_{1,6} + d_{1,7}^I, D_{2,6}^I = D_{1,5} + d_{2,7}^I, D_{8,6}^I = D_{7,5} + d_{2,12}^I, \\ D_{3,3}^I &= D_{3,3} + d_{3,3}^I, D_{6,10}^I = D_{6,10} + d_{3,3}^I, D_{9,7}^I = D_{9,7} + d_{3,13}^I, \\ D_{3,7}^I &= D_{3,7} + d_{3,8}^I, D_{5,9}^I = D_{5,9} + d_{4,4}^I, \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

то вариации усилий и моментов выразятся через вариации деформаций следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \delta Q_1 \\ \delta T_{11} \\ \delta T_{22} \\ \delta M_{11} \\ \delta M_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{4,1}^I & d_{4,2}^I & d_{4,6}^I & d_{4,7}^I & D_{5,9}^I \\ D_{1,1}^I & D_{1,2}^I & D_{1,5}^I & D_{1,6}^I & d_{1,4}^I \\ D_{2,1}^I & D_{2,2}^I & D_{2,5}^I & D_{2,6}^I & d_{2,4}^I \\ D_{1,5}^I & D_{1,6}^I & D_{7,5}^I & D_{7,6}^I & d_{1,9}^I \\ D_{2,5}^I & D_{2,6}^I & D_{8,5}^I & D_{8,6}^I & d_{2,9}^I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta E_{11} + \vartheta_1^I \delta \vartheta_1 \\ \delta E_{22} \\ \delta \kappa_I \\ \delta \kappa_{II} \\ \delta \varphi_1 \end{pmatrix},$$

Таблица 4.2

m	n				
	1	2	3	4	5
1	$\kappa(c_{20}-1)$	$-\varepsilon$	$\kappa c_{19}-k_1$	$\kappa c_{21}$	0
2	$\varepsilon c_{20}$	$k_2 \vartheta_1^I - 2\kappa$	$\varepsilon c_{19}$	$\varepsilon c_{21}$	0
3	$k_1+k_2 c_{20}$	$\varepsilon \vartheta_1^I$	$k_2 c_{19}-\kappa$	$k_2 c_{21}$	0
4	$f_2 + \kappa c_{26}$	0	$f_1 + \kappa c_{25}$	$f_3 + \kappa \cdot (c_{27} - 1)$	$-\varepsilon$
5	$\varepsilon c_{26}$	0	$\varepsilon c_{25}$	$\varepsilon c_{27}$	$-2\kappa$
6	$c_2$	0	$c_1$	$c_3$	0
7	0	$D_{9,7}^I/\Delta_3$	0	0	$-D_{3,7}^I/\Delta_3$
8	$c_{14}$	0	$c_{13}$	$c_{15}$	0
9	$c_8$	0	$c_7$	$c_9$	0
10	0	$-D_{3,7}^I/\Delta_3$	0	0	$D_{3,3}^I/\Delta_3$

$$\begin{Bmatrix} \delta T_{12} \\ \delta M_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_{3,3}^I & D_{3,7}^I \\ D_{3,7}^I & D_{9,7}^I \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta E_{12} + \delta E_{21} + \vartheta_1^I \delta \vartheta_2 \\ \delta \kappa_{III} + \delta \kappa_{II} \end{Bmatrix},$$

$$\delta Q_2 = D_{6,10}^I \delta \varphi_2. \quad (4.2.8)$$

Как это было сделано в разд. 4.1, сведем с помощью рядов вида (3.3.1), (3.3.2) уравнения в частных производных для добавочного состояния к обыкновенным дифференциальным уравнениям для коэффициентов рядов. Введем обозначения:

$$\Delta_3 = D_{3,3}^I D_{9,7}^I - (D_{3,7}^I)^2, \Delta_2 = d_{4,1}^I D_{1,5}^I d_{1,9}^I + d_{4,6}^I D_{1,5}^I d_{1,4}^I + D_{1,1}^I D_{7,5}^I D_{5,9}^I - (D_{1,5}^I)^2 D_{5,9}^I - d_{4,1}^I D_{7,5}^I d_{1,4}^I - D_{1,1}^I d_{4,6}^I d_{1,9}^I,$$

$$a_1 = (D_{1,5}^I d_{1,9}^I - D_{7,5}^I d_{1,4}^I) / \Delta_2, a_6 = (D_{1,5}^I d_{4,1}^I - D_{1,1}^I d_{4,6}^I) / \Delta_2,$$

$$a_2 = (D_{7,5}^I D_{5,9}^I - d_{4,6}^I d_{1,9}^I) / \Delta_2, a_7 = (D_{1,5}^I d_{1,4}^I - D_{1,1}^I d_{1,9}^I) / \Delta_2,$$

$$a_3 = (d_{4,6}^I d_{1,4}^I - D_{1,5}^I D_{5,9}^I) / \Delta_2, a_8 = (d_{4,1}^I d_{1,9}^I - D_{1,5}^I D_{5,9}^I) / \Delta_2,$$

$$a_4 = (D_{1,1}^I D_{7,5}^I - D_{1,5}^I D_{1,5}^I) / \Delta_2, a_9 = (D_{1,1}^I D_{5,9}^I - d_{4,1}^I d_{1,4}^I) / \Delta_2,$$

$$a_5 = (d_{4,6}^I D_{1,5}^I - D_{7,5}^I d_{4,1}^I) / \Delta_2,$$

n				
6	7	8	9	10
$10^2 c_{22}$	$10^3 c_{22}$	$10 k_2 c_{22}$	$10(10c_{23} + c_{24})$	$10^3 c_{23}$
$10 \varepsilon c_{22}$	$k_2^2 (D_{6,10}^I + T_{22}^I) +$	$k_2 \varepsilon (D_{6,10}^I + T_{22}^I) +$	$\varepsilon(10c_{23} + c_{24})$	$c_{23} \varepsilon^2 - k_2 D_{6,10}^I$
	$+ c_{22} \varepsilon^2$	$+ c_{22})$		
$10 k_2 c_{22}$	$k_2 \varepsilon (D_{6,10}^I + T_{22}^I) +$	$\varepsilon^2 (D_{6,10}^I + T_{22}^I) +$	$k_2(10c_{23} + c_{24})$	$\varepsilon(k_2 c_{23} - D_{6,10}^I)$
	$+ c_{22})$	$+ c_{22} k_2^2$		
$10(10c_{28} + f_4)$	$\varepsilon(10c_{28} + f_4)$	$k_2(10c_{28} + f_4)$	$T_{11}^{I,H}/B + 10(f_5 +$	$\varepsilon(10c_{29} + f_5)$
			$+ 10c_{29} + c_{30})$	
$10^3 c_{28}$	$c_{28} \varepsilon^2 - k_2 D_{6,10}^I$	$\varepsilon(k_2 c_{28} - D_{6,10}^I)$	$\varepsilon(10c_{29} + c_{30})$	$c_{29} \varepsilon^2 + D_{6,10}^I$
$10 c_4$	$\varepsilon c_4$	$k_2 c_4 - k_1$	$10 c_5 + c_6$	$\varepsilon c_5$
$\varepsilon$	$10 - k_2 \vartheta_1^I$	$-\varepsilon \vartheta_1^I$	$0$	$0$
$10 c_{16} + k_1$	$\varepsilon c_{16}$	$k_2 c_{16}$	$10 c_{17} + c_{18} - 1$	$\varepsilon c_{17}$
$10 c_{10}$	$\varepsilon c_{10}$	$k_2 c_{10}$	$10 c_{11} + c_{12}$	$\varepsilon c_{11}$
$0$	$0$	$0$	$\varepsilon$	$10$

$$b_1 = a_1 + a_4 \vartheta_1^I, b_2 = a_2 + a_5 \vartheta_1^I, b_3 = a_3 + a_6 \vartheta_1^I,$$

$$b_4 = -b_1 d_{4,2}^I - b_2 D_{1,2}^I - b_3 D_{1,6}^I, b_5 = -b_1 d_{4,7}^I - b_2 D_{1,6}^I - b_3 D_{7,6}^I,$$

$$b_6 = -(a_1 d_{4,1}^I + a_2 D_{1,1}^I + a_3 D_{1,5}^I) \vartheta_1^I, b_7 = -a_7 d_{4,2}^I - a_8 D_{1,2}^I - a_9 D_{1,6}^I,$$

$$b_8 = -a_7 d_{4,7}^I - a_8 D_{1,6}^I - a_9 D_{7,6}^I, b_9 = -a_4 d_{4,2}^I - a_5 D_{1,2}^I - a_6 D_{1,6}^I,$$

$$b_{10} = -a_4 d_{4,7}^I - a_5 D_{1,6}^I - a_6 D_{7,6}^I, B = 1 + a_4 T_{11}^{I,H},$$

$$f_1 = 1/B, f_2 = (\vartheta_1^I - a_5 T_{11}^{I,H})/B, f_3 = -a_6 T_{11}^{I,H}/B,$$

$$f_4 = -b_9 T_{11}^{I,H}/B, f_5 = -b_{10} T_{11}^{I,H}/B,$$

$$c_1 = b_1 f_1, c_2 = b_1 f_2 + b_2, c_3 = b_1 f_3 + b_3,$$

$$c_4 = b_1 f_4 + b_4, c_5 = b_1 f_5 + b_5, c_6 = b_1 T_{11}^{I,H}/B + b_6,$$

$$c_7 = a_7 f_1, c_8 = a_7 f_2 + a_8, c_9 = a_7 f_3 + a_9,$$

$$c_{10} = a_7 f_4 + b_7, c_{11} = a_7 f_5 + b_8, c_{12} = a_7 T_{11}^{I,H}/B,$$

$$c_{13} = a_4 f_1, c_{14} = a_4 f_2 + a_5, c_{15} = a_4 f_3 + a_6,$$

$$c_{16} = a_4 f_4 + b_9, c_{17} = a_4 f_5 + b_{10}, c_{18} = a_4 T_{11}^{I,H}/B,$$



$$\begin{pmatrix} c_{19} \\ c_{20} \\ c_{21} \\ c_{22} \\ c_{23} \\ c_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_7 & c_{13} & 0 \\ c_2 & c_8 & c_{14} & 0 \\ c_3 & c_9 & c_{15} & 0 \\ c_4 & c_{10} & c_{16} & D_{2,2}^I \\ c_5 & c_{11} & c_{17} & D_{2,6}^I \\ c_6 & c_{12} & c_{18} & D_{2,1}^I \vartheta_1^I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{2,1}^I \\ D_{2,5}^I \\ d_{2,4}^I - D_{2,1}^I \vartheta_1^I \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.2.9)$$

$$\begin{pmatrix} c_{25} \\ c_{26} \\ c_{27} \\ c_{28} \\ c_{29} \\ c_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_7 & c_{13} & 0 \\ c_2 & c_8 & c_{14} & 0 \\ c_3 & c_9 & c_{15} & 0 \\ c_4 & c_{10} & c_{16} & D_{2,6}^I \\ c_5 & c_{11} & c_{17} & D_{8,6}^I \\ c_6 & c_{12} & c_{18} & D_{2,5}^I \vartheta_1^I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{2,5}^I \\ D_{8,5}^I \\ d_{2,9}^I - D_{2,5}^I \vartheta_1^I \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда для вектора  $\delta Y_k$  (4.1.8) запишем каноническую систему в виде

$$\frac{d\delta Y_k}{ds} = K(s)\delta Y_k + \delta e_k, \quad (4.2.10)$$

где  $\delta e_k$  — вектор вариации внешних сил:

$$\delta e_k = (-\delta X_{1,k}^H, -\delta X_{2,k}^H, -\delta X_{3,k}^H, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \quad (4.2.11)$$

$K(s)$  — матрица коэффициентов системы десятого порядка. Элементы ее  $K_{mn}$  приведены в табл. 4.2. Соотношения для вектора  $\delta Y^k$  получаются из (4.2.10) с помощью операции  $[k \uparrow^k \rightarrow -k]$ .

### 4.3. УРАВНЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ НЕТОНКОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ ОБОЛОЧКИ

Получим каноническую систему уравнений нейтрального равновесия для нетонкой оболочки вращения [30]. Основное состояние ее — нелинейный осесимметричный изгиб, рассмотренный в разд. 3.2. При этом с учетом (2.2.6) в формулах разд. 3.2 нужно пренебречь членами, нелинейными относительно  $\varphi_1$ .

Довабочное состояние подробно описано в гл. 2. В силу осесимметричности основного состояния в (2.2.3) нужно положить  $\Pi_{12}^{I,i} = \Pi_{23}^{I,i} = 0$ . Тогда соотношение (2.2.16) значительно упростится и примет вид

$$\begin{pmatrix} \delta \Delta T_{11}^\Phi \\ \delta \Delta T_{22}^\Phi \\ \delta \Delta M_{11}^\Phi \\ \delta \Delta M_{22}^\Phi \\ \delta \Delta Q_1^\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,5} & d_{1,6} & d_{1,9} & d_{1,11} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & d_{2,5} & d_{2,6} & d_{2,9} & d_{2,11} \\ d_{1,5} & d_{1,6} & d_{7,5} & d_{7,6} & d_{7,9} & d_{7,11} \\ d_{2,5} & d_{2,6} & d_{8,5} & d_{8,6} & d_{8,9} & d_{8,11} \\ d_{5,1} & d_{5,2} & d_{5,5} & d_{5,6} & d_{5,9} & d_{5,11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta E_{11} \\ \delta E_{22} \\ \delta \kappa_I \\ \delta \kappa_{II} \\ \delta \varphi_1 \\ \vartheta_1^I \delta \vartheta_1 \end{pmatrix}, \quad (4.3.1)$$

$$\begin{Bmatrix} \delta \Delta T_{12}^{\Phi} \\ \delta \Delta T_{21}^{\Phi} \\ \delta \Delta M_{12}^{\Phi} \\ \delta \Delta M_{21}^{\Phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_{3,3} & d_{3,4} & d_{3,7} & d_{3,8} & d_{3,13} \\ d_{4,3} & d_{4,4} & d_{4,7} & d_{4,8} & d_{4,13} \\ d_{3,7} & d_{3,8} & d_{9,7} & d_{9,8} & d_{9,13} \\ d_{4,7} & d_{4,8} & d_{10,7} & d_{10,8} & d_{10,13} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta E_{12} \\ \delta E_{21} \\ \delta \kappa_{II} \\ \delta \kappa_{III} \\ \vartheta_1^I \delta \vartheta_2 \end{Bmatrix}, \quad (4.3.2)$$

$$\delta \Delta Q_2^{\Phi} = d_{6,10} \delta \varphi_2. \quad (4.3.3)$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{1,1} &= D_{1,1} + d_{1,1}, \tilde{D}_{2,1} = D_{1,2} + d_{2,1}, \tilde{D}_{7,5} = D_{7,5} + d_{7,5}, \\ \tilde{D}_{1,2} &= D_{1,2} + d_{1,2}, \tilde{D}_{2,2} = D_{2,2} + d_{2,2}, \tilde{D}_{7,6} = D_{7,6} + d_{7,6}, \\ \tilde{D}_{1,5} &= D_{1,5} + d_{1,5}, \tilde{D}_{2,5} = D_{1,6} + d_{2,5}, \tilde{D}_{7,11} = 2D_{7,11} + d_{7,11}, \\ \tilde{D}_{1,6} &= D_{1,6} + d_{1,6}, \tilde{D}_{2,6} = D_{2,6} + d_{2,6}, \tilde{D}_{8,5} = D_{7,6} + d_{8,5}, \\ \tilde{D}_{1,11} &= 2D_{1,11} + d_{1,11}, \tilde{D}_{2,11} = 2D_{2,11} + d_{2,11}, \tilde{D}_{8,6} = D_{8,6} + d_{8,6}, \\ \tilde{D}_{8,11} &= 2D_{8,11} + d_{8,11}; \\ \tilde{D}_{3,3} &= D_{3,3} + d_{3,3}, \tilde{D}_{4,3} = D_{3,4} + d_{4,3}, \tilde{D}_{9,7} = D_{9,7} + d_{9,7}, \\ \tilde{D}_{3,4} &= D_{3,4} + d_{3,4}, \tilde{D}_{4,4} = D_{4,4} + d_{4,4}, \tilde{D}_{9,8} = D_{9,8} + d_{9,8}, \\ \tilde{D}_{3,7} &= D_{3,7} + d_{3,7}, \tilde{D}_{4,7} = D_{3,8} + d_{4,7}, \tilde{D}_{9,13} = D_{9,13} + d_{9,13}, \\ \tilde{D}_{3,8} &= D_{3,8} + d_{3,8}, \tilde{D}_{4,8} = D_{4,8} + d_{4,8}, \tilde{D}_{10,7} = D_{9,8} + d_{10,7}, \\ \tilde{D}_{3,13} &= D_{3,13} + d_{3,13}, \tilde{D}_{4,13} = D_{4,13} + d_{4,13}, \tilde{D}_{10,8} = D_{10,8} + d_{10,8}, \\ \tilde{D}_{10,13} &= D_{10,13} + d_{10,13}, \tilde{D}_{5,9} = D_{5,9} + d_{5,9}, \tilde{D}_{6,10} = D_{6,10} + d_{6,10}. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

При этом полные вариации усилий и моментов запишутся в виде

$$\begin{Bmatrix} \delta T_{11} \\ \delta T_{22} \\ \delta M_{11} \\ \delta M_{22} \\ \delta Q_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{D}_{1,1} & \tilde{D}_{1,2} & \tilde{D}_{1,5} & \tilde{D}_{1,6} & \tilde{D}_{1,11} & d_{1,9} \\ \tilde{D}_{2,1} & \tilde{D}_{2,2} & \tilde{D}_{2,5} & \tilde{D}_{2,6} & \tilde{D}_{2,11} & d_{2,9} \\ \tilde{D}_{1,5} & \tilde{D}_{1,6} & \tilde{D}_{7,5} & \tilde{D}_{7,6} & \tilde{D}_{7,11} & d_{7,9} \\ \tilde{D}_{2,5} & \tilde{D}_{2,6} & \tilde{D}_{8,5} & \tilde{D}_{8,6} & \tilde{D}_{8,11} & d_{8,9} \\ d_{5,1} & d_{5,2} & d_{5,5} & d_{5,6} & d_{5,11} & \tilde{D}_{5,9} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta E_{11} \\ \delta E_{22} \\ \delta \kappa_I \\ \delta \kappa_{II} \\ \vartheta_1^I \delta \vartheta_1 \\ \delta \varphi_1 \end{Bmatrix}, \quad (4.3.5)$$

$$\begin{Bmatrix} \delta T_{12} \\ \delta T_{21} \\ \delta M_{12} \\ \delta M_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{D}_{3,3} & \tilde{D}_{3,4} & \tilde{D}_{3,7} & \tilde{D}_{3,8} & \tilde{D}_{3,13} \\ \tilde{D}_{4,3} & \tilde{D}_{4,4} & \tilde{D}_{4,7} & \tilde{D}_{4,8} & \tilde{D}_{4,13} \\ \tilde{D}_{3,7} & \tilde{D}_{3,8} & \tilde{D}_{9,7} & \tilde{D}_{9,8} & \tilde{D}_{9,13} \\ \tilde{D}_{4,7} & \tilde{D}_{4,8} & \tilde{D}_{10,7} & \tilde{D}_{10,8} & \tilde{D}_{10,13} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta E_{12} \\ \delta E_{21} \\ \delta \kappa_{III} \\ \delta \kappa_{III} \\ \vartheta_1^I \delta \vartheta_2 \end{Bmatrix}, \quad (4.3.6)$$

$$\delta Q_2 = \tilde{D}_{6,10} \delta \varphi_2. \quad (4.3.7)$$

Как это было сделано ранее, сведем уравнения в частных производных для добавочного состояния с помощью рядов вида (3.3.1)–(3.3.3) к обыкновенным дифференциальным уравнениям для коэффициентов этих рядов. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_1 &= \begin{vmatrix} \bar{D}_{3,3} & \bar{D}_{3,7} \\ \bar{D}_{3,7} & \bar{D}_{9,7} \end{vmatrix}, \bar{\Delta}_2 = \begin{vmatrix} \bar{D}_{1,1} & \bar{D}_{1,5} & d_{1,9} - \bar{D}_{1,11} \vartheta_1^I \\ \bar{D}_{1,5} & \bar{D}_{7,5} & d_{7,9} - \bar{D}_{7,11} \vartheta_1^I \\ d_{5,1} & d_{5,5} & \bar{D}_{5,9} - d_{5,11} \vartheta_1^I \end{vmatrix}, \\ \bar{a}_1 &= (\bar{D}_{7,5} \bar{D}_{5,9} - d_{5,5} d_{7,9}) / \bar{\Delta}_2, \bar{a}_4 = (-\bar{D}_{7,5} d_{5,11} + d_{5,5} \bar{D}_{7,11}) / \bar{\Delta}_2, \\ \bar{a}_2 &= (d_{5,5} d_{1,9} - \bar{D}_{1,5} \bar{D}_{5,9}) / \bar{\Delta}_2, \bar{a}_5 = (-d_{5,5} \bar{D}_{1,11} + \bar{D}_{1,15} d_{5,11}) / \bar{\Delta}_2, \\ \bar{a}_3 &= (\bar{D}_{1,5} d_{7,9} - \bar{D}_{7,5} d_{1,9}) / \bar{\Delta}_2, \bar{a}_6 = (-\bar{D}_{1,5} \bar{D}_{7,11} + \bar{D}_{7,5} \bar{D}_{1,11}) / \bar{\Delta}_2, \\ \bar{a}_7 &= (d_{5,1} d_{7,9} - \bar{D}_{1,5} \bar{D}_{5,9}) / \bar{\Delta}_2, \bar{a}_{10} = (-d_{5,1} \bar{D}_{7,11} + \bar{D}_{1,5} d_{5,11}) / \bar{\Delta}_2, \\ \bar{a}_8 &= (\bar{D}_{1,1} \bar{D}_{5,9} - d_{5,1} d_{1,9}) / \bar{\Delta}_2, \bar{a}_{11} = (-\bar{D}_{1,1} d_{5,11} + d_{5,1} \bar{D}_{1,11}) / \bar{\Delta}_2, \\ \bar{a}_9 &= (\bar{D}_{1,5} d_{1,9} - \bar{D}_{1,1} d_{7,9}) / \bar{\Delta}_2, \bar{a}_{12} = (-\bar{D}_{1,5} \bar{D}_{1,11} + \bar{D}_{1,1} \bar{D}_{7,11}) / \bar{\Delta}_2, \\ \bar{a}_{13} &= (\bar{D}_{1,5} d_{5,5} - d_{5,1} \bar{D}_{7,5}) / \bar{\Delta}_2, \bar{b}_1 = \bar{a}_1 + \bar{a}_4 \vartheta_1^I, \\ \bar{a}_{14} &= (d_{5,1} \bar{D}_{1,5} - \bar{D}_{1,1} d_{5,5}) / \bar{\Delta}_2, \bar{b}_2 = \bar{a}_2 + \bar{a}_5 \vartheta_1^I, \\ \bar{a}_{15} &= (\bar{D}_{1,1} \bar{D}_{7,5} - \bar{D}_{1,5} \bar{D}_{1,5}) / \bar{\Delta}_2, \bar{b}_3 = \bar{a}_3 + \bar{a}_6 \vartheta_1^I, \\ \bar{b}_4 &= -\bar{b}_1 \bar{D}_{1,2} - \bar{b}_2 \bar{D}_{1,6} - \bar{b}_3 d_{5,2}, \bar{b}_7 = \bar{a}_7 + \bar{a}_{10} \vartheta_1^I, \\ \bar{b}_5 &= -\bar{b}_1 \bar{D}_{1,6} - \bar{b}_2 \bar{D}_{7,6} - \bar{b}_3 d_{5,6}, \bar{b}_8 = \bar{a}_8 + \bar{a}_{11} \vartheta_1^I, \\ \bar{b}_6 &= (-\bar{b}_1 \bar{D}_{1,11} - \bar{b}_2 \bar{D}_{7,11} - \bar{b}_3 d_{5,11}) \vartheta_1^I, \bar{b}_9 = \bar{a}_9 + \bar{a}_{12} \vartheta_1^I, \\ \bar{b}_{10} &= -\bar{b}_7 \bar{D}_{1,2} - \bar{b}_8 \bar{D}_{1,6} - \bar{b}_9 d_{5,2}, \bar{b}_{13} = -\bar{a}_{13} \bar{D}_{1,2} - \bar{a}_{14} \bar{D}_{1,6} - \bar{a}_{15} d_{5,2}, \\ \bar{b}_{11} &= -\bar{b}_7 \bar{D}_{1,6} - \bar{b}_8 \bar{D}_{7,6} - \bar{b}_9 d_{5,6}, \bar{b}_{14} = -\bar{a}_{13} \bar{D}_{1,6} - \bar{a}_{14} \bar{D}_{7,6} - \bar{a}_{15} d_{5,6}, \\ \bar{b}_{12} &= (-\bar{b}_7 \bar{D}_{1,11} - \bar{b}_8 \bar{D}_{7,11} - \bar{b}_9 d_{5,11}) \vartheta_1^I, \\ \bar{b}_{15} &= (-\bar{a}_{13} \bar{D}_{1,11} - \bar{a}_{14} \bar{D}_{7,11} - \bar{a}_{15} d_{5,11}) \vartheta_1^I, \\ \bar{A} &= 1 + \bar{a}_{15} T_{11}^{I,H}, \bar{f}_1 = (\vartheta_1^I - \bar{a}_{13} T_{11}^{I,H}) / \bar{A}, \bar{f}_2 = -\bar{a}_{14} T_{11}^{I,H} / \bar{A}, \\ \bar{f}_3 &= 1 / \bar{A}, \bar{f}_4 = -\bar{b}_{13} T_{11}^{I,H} / \bar{A}, \bar{f}_5 = -\bar{b}_{14} T_{11}^{I,H} / \bar{A}, \\ \bar{f}_6 &= T_{11}^{I,H} (1 - \bar{b}_{15}) / \bar{A}; \\ \bar{c}_1 &= \bar{b}_1 + \bar{b}_3 \bar{f}_1, \bar{c}_7 = \bar{b}_7 + \bar{b}_9 \bar{f}_1, \bar{c}_{13} = \bar{a}_{13} + \bar{a}_{15} \bar{f}_1, \\ \bar{c}_2 &= \bar{b}_2 + \bar{b}_3 \bar{f}_2, \bar{c}_8 = \bar{b}_8 + \bar{b}_9 \bar{f}_2, \bar{c}_{14} = \bar{a}_{14} + \bar{a}_{15} \bar{f}_2, \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

$$\bar{c}_3 = \bar{b}_3 \bar{f}_3, \bar{c}_9 = \bar{b}_9 \bar{f}_3, \bar{c}_{15} = \bar{a}_{15} \bar{f}_3$$

$$\bar{c}_4 = \bar{b}_4 + \bar{b}_3 \bar{f}_4, \bar{c}_{10} = \bar{b}_{10} + \bar{b}_9 \bar{f}_4, \bar{c}_{16} = \bar{b}_{13} + \bar{a}_{15} \bar{f}_4,$$

$$\bar{c}_5 = \bar{b}_5 + \bar{b}_3 \bar{f}_5, \bar{c}_{11} = \bar{b}_{11} + \bar{b}_9 \bar{f}_5, \bar{c}_{17} = \bar{b}_{14} + \bar{a}_{15} \bar{f}_5,$$

$$\bar{c}_6 = \bar{b}_6 + \bar{b}_3 \bar{f}_6, \bar{c}_{12} = \bar{b}_{12} + \bar{b}_9 \bar{f}_6, \bar{c}_{18} = \bar{b}_{15} + \bar{a}_{15} \bar{f}_6,$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{c}_{19} \\ \bar{c}_{20} \\ \bar{c}_{21} \\ \bar{c}_{22} \\ \bar{c}_{23} \\ \bar{c}_{24} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{c}_1 & \bar{c}_7 & \bar{c}_{13} & 0 \\ \bar{c}_2 & \bar{c}_8 & \bar{c}_{14} & 0 \\ \bar{c}_3 & \bar{c}_9 & \bar{c}_{15} & 0 \\ \bar{c}_4 & \bar{c}_{10} & \bar{c}_{16} & \bar{D}_{2,2} \\ \bar{c}_5 & \bar{c}_{11} & \bar{c}_{17} & \bar{D}_{2,6} \\ \bar{c}_6 & \bar{c}_{12} & \bar{c}_{18} & \bar{D}_{2,11} \vartheta_1^I \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{D}_{2,1} \\ \bar{D}_{2,5} \\ d_{2,9} - \bar{D}_{2,11} \vartheta_1^I \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{c}_{31} \\ \bar{c}_{32} \\ \bar{c}_{33} \\ \bar{c}_{34} \\ \bar{c}_{35} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{b}_{16} & \bar{b}_{21} & 0 \\ \bar{b}_{17} & \bar{b}_{22} & 0 \\ \bar{b}_{18} & \bar{b}_{23} & \bar{D}_{4,4} \\ \bar{b}_{19} & \bar{b}_{24} & \bar{D}_{4,8} \\ \bar{b}_{20} & \bar{b}_{25} & \bar{D}_{4,13} \vartheta_1^I \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{D}_{4,3} \\ \bar{D}_{4,7} \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{c}_{25} \\ \bar{c}_{26} \\ \bar{c}_{27} \\ \bar{c}_{28} \\ \bar{c}_{29} \\ \bar{c}_{30} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{c}_1 & \bar{c}_7 & \bar{c}_{13} & 0 \\ \bar{c}_2 & \bar{c}_8 & \bar{c}_{14} & 0 \\ \bar{c}_3 & \bar{c}_9 & \bar{c}_{15} & 0 \\ \bar{c}_4 & \bar{c}_{10} & \bar{c}_{16} & \bar{D}_{2,6} \\ \bar{c}_5 & \bar{c}_{11} & \bar{c}_{17} & \bar{D}_{8,6} \\ \bar{c}_6 & \bar{c}_{12} & \bar{c}_{18} & \bar{D}_{8,11} \vartheta_1^I \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{D}_{2,5} \\ \bar{D}_{8,5} \\ d_{8,9} - \bar{D}_{8,11} \vartheta_1^I \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{c}_{36} \\ \bar{c}_{37} \\ \bar{c}_{38} \\ \bar{c}_{39} \\ \bar{c}_{40} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{b}_{16} & \bar{b}_{21} & 0 \\ \bar{b}_{17} & \bar{b}_{22} & 0 \\ \bar{b}_{18} & \bar{b}_{23} & \bar{D}_{4,8} \\ \bar{b}_{19} & \bar{b}_{24} & \bar{D}_{10,8} \\ \bar{b}_{20} & \bar{b}_{25} & \bar{D}_{10,13} \vartheta_1^I \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{D}_{4,7} \\ \bar{D}_{10,7} \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$\bar{b}_{16} = \bar{D}_{9,7} / \bar{\Delta}_1, \bar{b}_{17} = -\bar{D}_{3,7} / \bar{\Delta}_1, \bar{b}_{21} = -\bar{D}_{3,7} / \bar{\Delta}_1, \bar{b}_{22} = \bar{D}_{3,3} / \bar{\Delta}_1,$$

$$\bar{b}_{18} = (\bar{D}_{3,7} \bar{D}_{3,8} - \bar{D}_{3,4} \bar{D}_{9,7}) / \bar{\Delta}_1, \bar{b}_{23} = (\bar{D}_{3,7} \bar{D}_{3,4} - \bar{D}_{3,3} \bar{D}_{3,8}) / \bar{\Delta}_1,$$

$$\bar{b}_{19} = (\bar{D}_{3,7} \bar{D}_{9,8} - \bar{D}_{9,7} \bar{D}_{3,8}) / \bar{\Delta}_1, \bar{b}_{24} = (\bar{D}_{3,7} \bar{D}_{3,8} - \bar{D}_{3,3} \bar{D}_{9,8}) / \bar{\Delta}_1,$$

$$\bar{b}_{20} = (\bar{D}_{3,7} \bar{D}_{9,13} - \bar{D}_{9,7} \bar{D}_{3,13}) \vartheta_1^I / \bar{\Delta}_1, \bar{b}_{25} = (\bar{D}_{3,7} \bar{D}_{3,13} - \bar{D}_{3,3} \bar{D}_{9,13}) \vartheta_1^I / \bar{\Delta}_1.$$

Тогда для вектора  $\delta Y_k$  (4.1.8) запишем каноническую систему в виде

$$\frac{d\delta Y_k}{ds} = L(s) \delta Y_k + \delta e_k, \quad (4.3.9)$$

Таблица 4.3

m	л				
	1	2	3	4	5
1	$\gamma(\tilde{c}_{19} - 1)$	$-\tilde{\alpha}_{31}$	$\gamma\tilde{c}_{21} - k_1$	$\gamma\tilde{c}_{20}$	$-\tilde{\alpha}_{32}$
2	$\tilde{\alpha}_{19}$	$k_2\vartheta_1^I -$ $-\gamma(1 + \tilde{c}_{31})$	$\tilde{\alpha}_{21}$	$\tilde{\alpha}_{20}$	$-\gamma\tilde{c}_{32}$
3	$k_1 + k_2\tilde{c}_{19}$	$\tilde{\alpha}_1^I$	$k_2\tilde{c}_{21} - \gamma$	$k_2\tilde{c}_{20}$	0
4	$\tilde{f}_1 + \gamma\tilde{c}_{25}$	$-\tilde{\alpha}_{36}$	$\tilde{f}_3 + \gamma\tilde{c}_{27}$	$\gamma(\tilde{c}_{26} - 1) + \tilde{f}_2$	$-\tilde{\alpha}_{37}$
5	$\tilde{\alpha}_{25}$	$-\gamma\tilde{c}_{36}$	$\tilde{\alpha}_{27}$	$\tilde{\alpha}_{26}$	$-\gamma(1 + \tilde{c}_{37})$
6	$\tilde{c}_1$	0	$\tilde{c}_3$	$\tilde{c}_2$	0
7	0	$\tilde{b}_{16}$	0	0	$\tilde{b}_{17}$
8	$\tilde{c}_{13}$	0	$\tilde{c}_{15}$	$\tilde{c}_{14}$	0
9	$\tilde{c}_7$	0	$\tilde{c}_9$	$\tilde{c}_8$	0
10	0	$\tilde{b}_{21}$	0	0	$\tilde{b}_{22}$

где  $\delta e_k$  — вектор вариации внешних сил (4.2.11);  $L(s)$  — матрица коэффициентов системы десятого порядка. Ее элементы  $L_{mn}$  приведены в табл. 4.3. Соотношения для вектора  $\delta Y^k$  получаются из (4.3.9) с помощью операции  $[k \uparrow k \rightarrow -k]$ , описанной в разд. 3.3.

Уравнения (4.3.9) с учетом замечаний "а" и "б" из разд. 1.7, пригодны для случаев, когда материал оболочки изотропный упругопластический или ортотропный упругий. Поскольку в эти уравнения введены члены от нетонкости и неупругости материала, они имеют широкую область применимости. Но в силу учета многих факторов уравнения (4.3.9) отличаются громоздкостью. Более простые случаи описаны в разд. 4.1, 4.2, а также далее в разд. 4.4.

Контурный интеграл в задачах устойчивости и получение вариаций поверхностных нагрузок были рассмотрены для произвольной оболочки в разд. 2.3. В частности, из (2.3.14) видно, что когда на оболочку действует осесимметричная нагрузка и  $X_2 = 0$ , то

$$\delta X_1^H = X_3 \delta \vartheta_I, \delta X_2^H = X_3 \delta \vartheta_{II}, \delta X_3^H = -X_1 \delta \vartheta_I \quad (4.3.10)$$

и системы для величин с нижними и верхними индексами  $\delta Y_k, \delta Y^k$  разделяются. В противном случае разделение невозможно.

		n				
		6	7	8	9	10
	$\text{ю}^2 \tilde{c}_{22} + \text{э}^2 \tilde{c}_{33}$	$\text{ю} \text{э} (\tilde{c}_{22} + \tilde{c}_{33}) -$ $- \text{э} k_2 \tilde{c}_{35}$	$k_2 \text{ю} \tilde{c}_{22} - \text{э}^2 \tilde{c}_{35}$	$\text{ю} (\text{ю} \tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{24}) +$ $+ \text{э}^2 \tilde{c}_{34}$	$\text{э} \text{ю} (\tilde{c}'_{23} + \tilde{c}'_{34})$	
	$\text{э} \text{ю} (\tilde{c}_{22} + \tilde{c}_{33})$	$\text{э}^2 \tilde{c}_{22} + \text{ю}^2 \tilde{c}_{33} -$ $- k_2 \text{ю} \tilde{c}_{35} + k_2^2 (T_{22}^I +$ $+ \tilde{D}_{6,10})$	$\text{э} k_2 (\tilde{c}_{22} + \tilde{D}_{6,10} +$ $+ T_{22}^I) - \text{э} \text{ю} \tilde{c}_{35}$	$\text{э} \text{ю} (\tilde{c}'_{23} + \tilde{c}'_{34}) +$ $+ \text{э} \tilde{c}'_{24}$	$\text{э}^2 \tilde{c}'_{23} + \text{ю}^2 \tilde{c}'_{34} -$ $- k_2 \tilde{D}'_{6,10}$	
	$\text{ю} k_2 \tilde{c}_{22}$	$\text{э} k_2 (\tilde{c}_{22} + \tilde{D}_{6,10} +$ $+ T_{22}^I)$	$\text{э}^2 (\tilde{D}_{6,10} + T_{22}^I) +$ $+ k_2^2 \tilde{c}_{22}$	$k_2 (\text{ю} \tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{24})$	$\text{э} (k_2 \tilde{c}'_{23} - \tilde{D}'_{6,10})$	
	$\text{ю} (\text{ю} \tilde{c}_{28} + \tilde{f}_4) +$ $+ \text{э}^2 \tilde{c}_{38}$	$\text{э} (\tilde{f}_4 - k_2 \tilde{c}_{40}) +$ $+ \text{э} \text{ю} (\tilde{c}_{28} + \tilde{c}_{38})$	$k_2 (\tilde{f}_4 + \text{ю} \tilde{c}_{28}) -$ $- \text{э}^2 \tilde{c}_{40}$	$\text{ю} (\tilde{f}_5 + \tilde{c}_{30} +$ $+ \text{ю} \tilde{c}_{29}) + \tilde{f}_6 +$ $+ \text{э}^2 \tilde{c}_{39}$	$\text{э} \tilde{f}_5 + \text{э} \text{ю} (\tilde{c}'_{29} +$ $+ \tilde{c}'_{39})$	
	$\text{э} \text{ю} (\tilde{c}_{28} + \tilde{c}_{38})$	$\text{э}^2 \tilde{c}_{28} - k_2 \tilde{D}_{6,10} +$ $+ \text{ю} (\text{ю} \tilde{c}_{38} -$ $- k_2 \tilde{c}_{40})$	$\text{э} (k_2 \tilde{c}_{28} - \tilde{D}_{6,10} -$ $- \text{ю} \tilde{c}_{40})$	$\text{э} \text{ю} (\tilde{c}'_{29} + \tilde{c}'_{39}) +$ $+ \text{э} \tilde{c}'_{30}$	$\text{э}^2 \tilde{c}'_{29} + \text{ю}^2 \tilde{c}'_{39} +$ $+ \tilde{D}'_{6,10}$	
	$\text{ю} \tilde{c}_4$	$\text{э} \tilde{c}_4$	$k_2 \tilde{c}_4 - k_1$	$\tilde{c}_6 + \text{ю} \tilde{c}_5$	$\text{э} \tilde{c}_5$	
	$-\text{э} \tilde{b}_{18}$	$k_2 \tilde{b}_{20} - \text{ю} \tilde{b}_{18}$	$\text{э} \tilde{b}_{20}$	$-\text{э} \tilde{b}_{19}$	$-\text{ю} \tilde{b}_{19}$	
	$k_1 + \text{ю} \tilde{c}_{16}$	$\text{э} \tilde{c}_{16}$	$k_2 \tilde{c}_{16}$	$\tilde{c}_{18} + \text{ю} \tilde{c}_{17} - 1$	$\text{э} \tilde{c}_{17}$	
	$\text{ю} \tilde{c}_{10}$	$\text{э} \tilde{c}_{10}$	$k_2 \tilde{c}_{10}$	$\tilde{c}_{12} + \text{ю} \tilde{c}_{11}$	$\text{э} \tilde{c}_{11}$	
	$-\text{э} \tilde{b}_{23}$	$k_2 \tilde{b}_{25} - \text{ю} \tilde{b}_{23}$	$\text{э} \tilde{b}_{25}$	$-\text{э} \tilde{b}_{24}$	$-\text{ю} \tilde{b}_{24}$	

#### 4.4. УРАВНЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ТОНКОЙ УПРУГОЙ ИЗОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКИ ПО ТЕОРИИ КИРХГОФА-ЛЯВА

В данном разделе на основе геометрически нелинейной теории среднего изгиба тонкой оболочки [88] получены каноническая система уравнений нейтрального равновесия и соответствующие ей граничные условия для исследования устойчивости однослойной непологой тонкой оболочки вращения переменной толщины [43]. Поверхность приведения оболочки не совпадает с ее срединной поверхностью,  $-\gamma h \leq z \leq (1 - \gamma)h$ .

Для описания основного геометрически нелинейного напряженно-деформированного состояния оболочки используются уравнения (3.2.15).

Статистические уравнения равновесия для основного состояния, отмеченного верхним индексом I, имеют вид [88]

$$\begin{aligned}
 (rT_{11}^I)_s + (r\epsilon_{22}^I T_{11}^I)_s - T_{22}^I \cos \theta - T_{22}^I (r\epsilon_{22}^I)_s + r(Q_1^I (k_1 + \kappa_{11}^I) + X_1^I) &= 0, \\
 (rQ_1^I)_s - r(T_{11}^I (k_1 + \kappa_{11}^I) + T_{22}^I (k_2 + \kappa_{22}^I) - X_3^I) &= 0, \\
 (rM_{11}^I)_s - M_{22}^I \cos \theta - rQ_1^I &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.4.1}$$

Уравнения равновесия для состояния  $\sigma^*$  запишутся в виде

$$\begin{aligned} (A_2^* T_{11}^*)_{,s} + (A_1^* T_{12}^*)_{,\varphi} + T_{12}^* A_{1,\varphi}^* - T_{22}^* A_{2,s}^* + r(k_1^* Q_1^* + \kappa_{12} Q_2^* + X_1^*) &= 0; \quad (1,2), \\ (rQ_1^*)_{,s} + Q_{2,\varphi}^* - r(k_1^* T_{11}^* + k_2^* T_{22}^* + 2T_{12}^* \kappa_{12} - X_3^*) &= 0, \\ (rM_{11}^*)_{,s} + M_{12,\varphi}^* - M_{22}^* \cos \theta - rQ_1^* &= 0, \\ M_{22,\varphi}^* + (rM_{12}^*)_{,s} + M_{12}^* \cos \theta - rQ_2^* &= 0, \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

где

$$\begin{aligned} A_1^* &= (1 + \epsilon_{II}^I)(1 + v_{1,s}^* + k_1 w^*), \quad A_2^* = (1 + \epsilon_{II}^I)(r + v_{2,\varphi}^* + v_1^* \cos \theta + w^* \sin \theta), \\ f_{,s} &= \partial f / \partial s, \quad f_{,\varphi} = \partial f / \partial \varphi. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда вектор интенсивности внешней поверхностной нагрузки при деформации не изменяется, т.е.

$$X^* = \sum_{i=1}^3 X_i^* k_i^* = \sum_{i=1}^3 X_i^I k_i^I = \sum_{i=1}^3 X_i k_i, \quad (4.4.3)$$

где  $X_1, X_2, X_3$  — проекции интенсивности нагрузки на основные направления оболочки до деформации. Для оболочки вращения в силу осевой симметрии основного состояния

$$X_1 = X_1(s), \quad X_2 = 0, \quad X_3 = X_3(s). \quad (4.4.4)$$

Из соотношений (4.4.3), (4.4.4) можно получить

$$\begin{aligned} X_1^I &= X_1(1 + u_{,s}^I + k_1 w^I) + X_3 \omega_1^I, \quad X_2^I = 0, \quad X_3^I = -X_1 \omega_1^I + X_3, \\ X_1^* &= X_1(1 + u_{,s}^I + k_1 w^I + \delta v_{1,s} + k_1 \delta w) + X_3(\omega_1^I + \delta \omega_1), \\ X_2^* &= X_1(\delta v_{1,\varphi} - \delta v_2 \cos \theta) / r + X_3 \delta \omega_2, \quad X_3^* = -X_1(\omega_1^I + \delta \omega_1) + X_3. \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Здесь и далее:  $\omega_1 = -\vartheta_1$ ,  $\omega_2 = -\vartheta_2$ ,  $\delta \omega_1 = \delta \vartheta_1$ ,  $\delta \omega_2 = -\delta \vartheta_2$ .

Вычитая из (4.4.2) уравнения (4.4.1), получим следующую систему уравнений нейтрального равновесия в деформированных осях:

$$\begin{aligned} (r\delta T_{11})_{,s} + \delta T_{12,\varphi} - \delta T_{22} \cos \theta + r[X_1(\delta v_{1,s} + k_1 \delta w) + X_3 \delta \omega_1] + \\ + [T_{11}^I(\delta v_{2,\varphi} + \delta v_1 \cos \theta + \delta w \sin \theta) + r\epsilon_{22}^I \delta T_{11}]_{,s} + \\ + r[Q_1^I \delta \kappa_{11} + (k_1 + \kappa_{11}^I) \delta Q_1] - T_{22}^I(\delta v_{2,\varphi} + \delta v_1 \cos \theta + \delta w \sin \theta)_{,s} - \\ - \delta T_{22}(r\epsilon_{22}^I)_{,s} = 0, \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

$$\delta T_{22,\varphi} + (r\delta T_{12})_{,s} + \delta T_{12} \cos \theta + X_1(\delta v_{1,s} - \delta v_2 \cos \theta) + rX_3 \delta \omega_2 -$$

$$\begin{aligned}
& -T_{11}^I(\delta v_{1,s} + k_1 \delta w)_{,\varphi} + r[Q_1^I \delta \kappa_{12} + (k_2 + \kappa_{22}^I) \delta Q_2] + \\
& + T_{22}^I(\delta v_{1,s} + k_1 \delta w)_{,\varphi} = 0, \\
& (r \delta Q_1)_{,s} + \delta Q_{2,\varphi} - r[T_{11}^I \delta \kappa_{11} + (k_1 + \kappa_{11}^I) \delta T_{11} + T_{22}^I \delta \kappa_{22} + \\
& + (k_2 + \kappa_{22}^I) \delta T_{22} + X_1 \delta \omega_1] = 0, (r \delta M_{11})_{,s} + \delta M_{12,\varphi} - \delta M_{22} \cos \theta - r \delta Q_1 = 0, \\
& \delta M_{22,\varphi} + (r \delta M_{12})_{,s} + \delta M_{12} \cos \theta - r \delta Q_2 = 0,
\end{aligned}$$

где сохранены члены, которые могут быть немалыми вследствие не-пологости оболочки и некоторых других факторов.

Пусть в процессе потери устойчивости поверхность приведения оболочки делится на пологие части. С учетом принятых допущений и на основании формул [88] необходимые соотношения для добавочных величин запишутся следующим образом:

деформации ПП:

$$\begin{aligned}
\delta \varepsilon_{11} &= \delta v_{1,s} + k_1 \delta w + \omega_1^I \delta \omega_1, \\
2 \delta \varepsilon_{12} &= \delta v_{2,s} + (\delta v_{1,\varphi} - \delta v_2 \cos \theta) / r + \omega_1^I \delta \omega_2
\end{aligned} \tag{4.4.7}$$

$$\delta \varepsilon_{22} = (\delta v_{2,\varphi} + \delta v_1 \cos \theta + \delta w \sin \theta) / r,$$

повороты:

$$\delta \omega_1 = \delta w_{,s}, \quad \delta \omega_2 = \delta w_{,\varphi} / r, \tag{4.4.8}$$

изменения кривизн и кручения:

$$\delta \kappa_{11} = -\delta \omega_{1,s}, \quad \delta \kappa_{22} = -(\delta \omega_{2,\varphi} + \delta \omega_1 \cos \theta) / r, \quad \delta \kappa_{12} = -\delta \omega_{2,s}, \tag{4.4.9}$$

выражения усилий и моментов через компоненты деформации:

$$\begin{aligned}
\delta T_{11} &= \frac{2Gh}{1-\nu} [\delta \varepsilon_{11} + \nu \delta \varepsilon_{22} + h(0,5 - \gamma)(\delta \kappa_{11} + \nu \delta \kappa_{22})], \\
\delta T_{12} &= 2Gh [\delta \varepsilon_{12} + h(0,5 - \gamma) \delta \kappa_{12}]; \quad (1,2);
\end{aligned} \tag{4.4.10}$$

$$\begin{aligned}
\delta M_{11} &= \frac{2Gh^2}{1-\nu} \left[ (0,5 - \gamma)(\delta \varepsilon_{11} + \nu \delta \varepsilon_{22}) + h \left( \frac{1}{3} - \gamma + \gamma^2 \right) (\delta \kappa_{11} + \nu \delta \kappa_{22}) \right], \\
\delta M_{12} &= 2Gh^2 \left[ (0,5 - \gamma) \delta \varepsilon_{12} + h \left( \frac{1}{3} - \gamma + \gamma^2 \right) \delta \kappa_{12} \right]; \quad (1,2).
\end{aligned} \tag{4.4.11}$$

Статические условия для добавочных усилий и моментов на границе  $s = \text{const}$  в случае краевой нагрузки, не изменяющейся при деформации, следующие:

$$\begin{aligned}
\delta T_{11} &= Q_1^I \delta \omega_1 + \omega_1^I \delta Q_1, \quad \delta T_{12} = -T_{11}^I \delta v_{2,s} + Q_1^I \delta \omega_2, \\
\delta Q_1 + \delta M_{12,\varphi} / r &= -T_{11}^I \delta \omega_1 - \omega_1^I \delta T_{11}, \quad \delta M_{11} = 0.
\end{aligned} \tag{4.4.12}$$



В случае следящей нагрузки граничные условия запишутся в виде

$$\delta T_{11} = 0, \delta T_{12} = 0, \delta Q_1 + \delta M_{12, \varphi} / r = 0, \delta M_{11} = 0. \quad (4.4.13)$$

Геометрические граничные условия имеют вид

$$\delta v_1 = 0, \delta v_2 = 0, \delta w = 0, \delta \omega_1 = 0 \quad (4.4.14)$$

Смешанные граничные условия можно получить комбинацией условий (4.4.12)—(4.4.14).

Сведем уравнения в частных производных для добавочного состояния с помощью рядов вида (3.3.1)—(3.3.3) к обыкновенным дифференциальным уравнениям для коэффициентов этих рядов. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= k/r, \delta_2 = \cos \theta / r, \lambda_1 = \frac{2(1-\nu)}{Gh} (1-3\gamma+3\gamma^2), \\ \lambda_2 &= \frac{3(1-\nu)}{Gh^2} (1-2\gamma), \lambda_3 = h(1-2\gamma), \lambda_4 = 6(1-\nu)/(Gh^3), \lambda_5 = \omega_1' + \delta_2 \lambda_3; \\ p_1 &= 2Gh(1+\nu)t_2 + X_1 \nu - T_{11,s}^I, p_5 = t_2 t_4, \\ p_2 &= X_3 - X_1 \omega_1^I + \nu \delta_2 Q_1^I, p_6 = \delta_1^2 (\nu Q_1^I - t_1 \lambda_5), \\ p_3 &= \lambda_2 (t_1 \delta_2 + X_1) - \lambda_4 Q_1^I, p_7 = t_1 (-k_2 + \omega_1^I \delta_2 + \lambda_3 \delta_1^2), \\ p_4 &= t_3 t_5 / 2, p_8 = (\nu-1)t_2 - X_1 \lambda_1 + Q_1^I \lambda_2; \\ t_1 &= T_{11}^I - T_{22}^I, \quad t_4 = Gh(1+\nu)\lambda_3, \\ t_2 &= \delta_2 + \varepsilon_{22,s}^I, \quad t_5 = Gh^3 \delta_1^2 / 3, \\ t_3 &= k_1 + \kappa_{11}^I, \quad t_6 = k_2 + \kappa_{22}^I; \\ d_1 &= 2q_1 \delta_2 + X_1, \quad d_4 = 2q_1 k_2 + \delta_2 Q_1^I + X_3, \\ d_2 &= 2q_1 \delta_1^2 + \delta_2 X_1, \quad d_5 = Gh^2 q_2 / 2 + Q_1^I - t_1 \omega_1^I \\ d_3 &= t_4 + q_4 (2q_3 - \nu), \quad d_6 = 2\delta_2 + q_2 (0,5 - \gamma), \\ d_7 &= t_1 \lambda_2 + t_6; \\ q_1 &= Gh(1+\nu), q_2 = t_6 h_s, \quad q_3 = 2(1+\nu)(1-3\gamma+3\gamma^2), \\ q_4 &= Gh^3 t_6 / 6; \\ \beta_1 &= q_1 (2t_6 + \delta_1^2 \lambda_3), \beta_2 = T_{22}^I - \nu T_{11}^I + q_1 \lambda_3 t_6, \\ \beta_3 &= \delta_2^2 t_5 + 2q_1 k_2 t_6 + \delta_1^2 (q_3 t_5 + k_2 t_4), \\ \beta_4 &= n_1 - X_1; \\ n_1 &= \delta_2 t_5 (q_3 + 1), n_2 = -\lambda_2 T_{11}^I + t_3 + \nu t_6, \\ n_3 &= \nu \delta_1^2 + \lambda_4 T_{11}^I. \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

Таблица 4.4

m	n							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$-\nu\delta_2$	$-\nu\delta_1$	$-k_1 - \nu k_2$	$-\omega_1^1$	$\lambda_1$	0	0	$-\lambda_2$
2	$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_1\lambda_5$	$-\delta_1\lambda_3$	0	$1/(Gh)$	0	0
3	0	0	0	1	0	0	0	0
4	0	0	$\nu\delta_1^2$	$-\nu\delta_2$	$\lambda_2$	0	0	$-\lambda_4$
5	$p_1\delta_2 - t_1(\delta_1^2 - k_1k_2)$	$p_1\delta_1$	$k_2p_1 - p_4\delta_2 + p_3\delta_1^2 + p_6$	$p_4 - p_2 - p_5\delta_2 + p_7$	$p_8$	$-\delta_1$	$-t_3$	$p_3$
6	$d_1\delta_1$	$d_2$	$\delta_1(\delta_1^2d_3 + d_4)$	$-\delta_1(\delta_2d_3 + d_5)$	$\nu\delta_1$	$-d_6$	0	$\delta_1d_7$
7	$\beta_1\delta_2$	$\beta_1\delta_1$	$\beta_2\delta_1^2 + \beta_3$	$-\beta_2\delta_2 - \beta_4$	$n_2$	$-\delta_1\delta_2\lambda_3$	$-\delta_2$	$n_3$
8	$\delta_2^2t_4$	$\delta_1\delta_2t_4$	$n_1 + k_2\delta_2t_4$	$-t_5 - \delta_2^2q_3Gh^3B$	0	$-\delta_1\lambda_3$	1	$(\nu - 1)\delta_2$

Тогда для вектора

$$\delta Z_k = (\delta v_{1,k}, \delta v_{2,k}, \delta w_k, \delta \omega_{1,k}, \delta T_{11,k}, \delta T_{12,k}, \delta Q_{1,k}^*, \delta M_{11,k}) \quad (4.4.16)$$

запишем каноническую систему

$$\frac{d\delta Z_k}{ds} = M(s)\delta Z_k, \quad (4.4.17)$$

где  $M(s)$  — матрица коэффициентов восьмого порядка. Ее элементы  $M_{mn}$  приведены в табл. 4.4. В (4.4.16) обозначено:

$$\delta Q_{1,k}^* = \delta Q_{1,k} + \frac{k}{r} \delta M_{12,k}. \quad (4.4.18)$$

Используя обозначения (4.4.15), запишем граничные условия (4.4.12) в разрешающих функциях (4.4.16):

$$\begin{aligned} \delta T_{11,k} &= m_1 \delta_2 \delta w_k + (Q_1^I - m_1) \delta \omega_{1,k} - \delta_1 \lambda_3 \omega_1^I \delta T_{12,k} / 2 + \omega_1^I \delta Q_{1,k}^*, \\ \delta T_{12,k} &= -\delta_1 T_{11}^I \delta v_{1,k} - \delta_2 T_{11}^I \delta v_{2,k} - \delta_1 m_2 \delta w_k + \delta_1 \lambda_3 T_{11}^I \delta \omega_{1,k}, \\ \delta Q_{1,k}^* &= -\omega_1^I \delta T_{11,k} - T_{11}^I \delta \omega_{1,k}, \delta M_{11,k} = 0, \end{aligned} \quad (4.4.19)$$

где

$$m_1 = 0,5t_5\omega_1^I, \quad m_2 = \lambda_5 T_{11}^I + Q_1^I.$$

Для случая следящей поверхностной нагрузки каноническая система уравнений нейтрального равновесия получается из (4.4.17), если в обозначениях  $p_i (i = 1, 2, 3, 8)$ ,  $d_j (j = 1, 2, 4)$ ,  $\beta_4$  положить  $X_1 = X_3 = 0$ . Соотношения для вектора  $\delta Z^k$  получаются из (4.4.15)–(4.4.19) с помощью замены  $[k \uparrow k \rightarrow -k]$ , описанной в разд. 3.3.

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ НЕПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

В данной главе разработан алгоритм для решения геометрически и физически нелинейной задачи методами линеаризации и ортогональной прогонки. Обсуждаются трудности, встречающиеся при реализации численных методов. Приводятся результаты решения задач.

### 5.1. ПРОДОЛЖЕНИЕ ПО ПАРАМЕТРУ И ВЫБОР ВЕДУЩЕГО ПАРАМЕТРА ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СТАТИКИ НЕПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Как было показано в разд. 3.2, задача о нелинейном осесимметричном изгибе непологой оболочки вращения средней толщины описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка (3.2.13). Нелинейная система (3.2.13) вместе с шестью граничными условиями, следующими из контурного интеграла (3.2.4), составляет одномерную нелинейную краевую задачу для вектора разрешающих функций

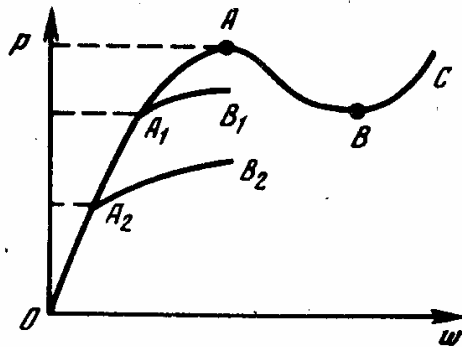
$$X = (T_{11}^H, Q_1^H, M_{11}, u, w, \vartheta_1)'. \quad (5.1.1)$$

В коэффициенты системы (3.2.13) входят параметры и функции, характеризующие геометрию оболочки, свойства материала и условия нагружения. При ее численном решении прежде всего используют способ продолжения по параметру, когда задача решается для ряда монотонно изменяющихся, обычно возрастающих от нуля, значений параметра. Естественным параметром является параметр нагружения  $p$ . При этом известно решение системы (3.2.13) при отсутствии нагружения:

$$X(p = 0) = 0. \quad (5.1.2)$$

При малых значениях  $p$  в системе (3.2.13) нелинейные члены становятся малыми по сравнению с линейными, и она линеаризуется.

Однако параметр  $p$  выполняет роль ведущего при решении задачи только на ограниченном участке  $OA$  кривой нагружение—перемещение (рис. 5.1), где  $A$  — предельная точка этой кривой. Тогда в качестве ведущего параметра можно выбрать значение прогиба в какой-либо точке оболочки. Например, для пологого сегмента это будет прогиб в полюсе оболочки, который монотонно растет в процессе деформирования. В непологих же оболочках заранее трудно предугадать поведение эпюры разрешающих функций. В этом случае можно ожидать монотонное поведение в значительном диапазоне изменения прогиба некоторых интегральных величин [36].



Р и с. 5.1.

Введем параметр  $p$  размерностью интенсивности нагрузки, характеризующий действующие на оболочку силы. Тогда компоненты поверхностных сил  $X_1^H, X_3^H$  в недеформированных осях будут

$$X_1^H = pf_1(s), X_3^H = pf_3(s), \quad (5.1.3)$$

при этом безразмерные функции  $f_1(s), f_3(s)$  определяют закон изменения нагрузки по дуге меридиана  $s_0 \leq s \leq s_N$ . С помощью параметра  $p$  можно ввести и локальную нагрузку  $q$ , приходящуюся на единицу длины:

$$q = ph_0. \quad (5.1.4)$$

Рассмотрим интегральный прогиб оболочки

$$v = \int_{s_0}^s w ds, v(s_0) = 0, v(s_N) = C \quad (5.1.5)$$

и введем в задачу дополнительно в вектору (5.1.1) две неизвестные функции  $p(s)$  и  $v(s)$ . Функции  $p(s), v(s)$  удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dp}{ds} = 0, \frac{dv}{ds} = w. \quad (5.1.6)$$

Введем вектор-столбец разрешающих функций

$$Y = (T_{11}^H, Q_1^H, M_{11}, p, u, w, \vartheta_1, v)', \quad (5.1.7)$$

при этом неизвестные (5.1.1) назовем основными, граничные условия для неизвестных (5.1.1) — естественными. Каноническая система уравнений для вектора (5.1.7) с учетом (3.2.13) и (5.1.6) запишется в виде

$$\frac{dY}{ds} = A(s)Y + f(s, Y), s_0 \leq s \leq s_N, \quad (5.1.8)$$

$$f(s, Y) = \Gamma(s, Y) + \Phi(s, Y).$$

Граничные условия имеют вид

$$BY = m(Y) \text{ при } s = s_0, \quad (5.1.9)$$

$$\tilde{D}Y = n(Y) \text{ при } s = s_N. \quad (5.1.10)$$

Здесь  $A(s)$  — матрица коэффициентов размерности  $8 \times 8$ ;  $\Gamma(s, Y)$ ,

$\Phi(s, Y)$  — векторы  $8 \times 1$ , включающие геометрически и физически нелинейные члены соответственно;  $\tilde{B}, \tilde{D}$  — прямоугольные матрицы размерности  $4 \times 8$ ;  $\tilde{m}, \tilde{n}$  — векторы  $4 \times 1$ , нелинейные относительно  $Y$ .

В краевой задаче (5.1.8)–(5.1.10) любая из неизвестных (5.1.7) наравне с параметром нагрузки  $p$  может выступать в роли параметра шагового процесса. Обратимся к правым граничным условиям (5.1.10), в которых одно из условий может быть назначено с некоторым произволом и записано в виде

$$Q = Q_m \text{ при } s = s_N. \quad (5.1.11)$$

Здесь  $Q$  — одна из компонент вектора  $Y$ , которая не подчинена естественным граничным условиям при  $s = s_N$ ;  $Q_m$  — задаваемый параметр. Монотонно изменяя значения  $Q_m$ , можно построить процесс численного решения нелинейной задачи (5.1.8) — (5.1.10).

Например, в случае жесткой заделки краев оболочки естественные граничные условия для вектора  $X$  имеют вид

$$u = w = \vartheta_I = 0 \text{ при } s = s_0, s_N,$$

что для вектора  $Y$  с учетом (5.1.5) дает семь обязательных граничных условий

$$u = w = \vartheta_I = v = 0 \text{ при } s = s_0,$$

$$u = w = \vartheta_I = 0 \text{ при } s = s_N.$$

Восьмое граничное условие может быть наложено на любое неизвестное  $Q$  из компонент  $T_{11}^H, Q_1^H, M_{11}, p, v$  в виде (5.1.11).

Естественно, в качестве ведущего нужно выбрать такой параметр, изменение которого ожидается монотонным в процессе деформирования оболочки. В дальнейшем при реализации алгоритма параметрами шагового процесса выбирались параметры интегрального прогиба  $S$  или нагрузки  $p$ . При необходимости вместо интегрального прогиба (5.1.5) можно ввести и другие интегральные величины от неизвестных задачи в том или ином виде.

## 5.2. АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ О БОЛЬШИХ ПРОГИБАХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ СРЕДНЕЙ ТОЛЩИНЫ МЕТОДОМ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Для численного решения нелинейной краевой задачи (5.1.8)–(5.1.10) при заданном значении ведущего параметра применяется метод последовательных приближений. Запишем некоторые реализации этого метода:

метод простой итерации [76, 116]:

$$\frac{dY^{(k+1)}}{ds} = A(s)Y^{(k+1)} + f(s, Y^{(k)}), \quad (5.2.1)$$

где,  $k$  — номер приближения;

метод общей итерации [38, 76]:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{Y}^{(k+1)}}{ds} &= A(s)\tilde{Y}^{(k+1)} + f(s, Y^{(k)}), \\ Y^{(k+1)} &= Y^{(k)} + \tau(\tilde{Y}^{(k+1)} - Y^{(k)}), \quad 0 < \tau < 1, \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

где  $\tau$  — коэффициент релаксации;

метод Ньютона (линеаризации) [120]:

$$\begin{aligned} \frac{dY^{(k+1)}}{ds} &= \left( A(s) + \frac{df}{dY}(s, Y^{(k)}) \right) Y^{(k+1)} + f(s, Y^{(k)}) - \frac{df}{dY}(s, Y^{(k)}) Y^{(k)}, \\ \frac{df}{dY}(s, Y) &= \frac{d\Gamma}{dY}(s, Y) + \frac{d\Phi}{dY}(s, Y), \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

где  $(d\Gamma/dY)(s, Y)$ ,  $(d\Phi/dY)(s, Y)$  — матрицы Якоби вектор-функций  $\Gamma(s, Y)$ ,  $\Phi(s, Y)$ ;

метод Ньютона с использованием коэффициента релаксации  $0 < \tau < 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{Y}^{(k+1)}}{ds} &= \left( A(s) + \frac{df}{dY}(s, Y^{(k)}) \right) \tilde{Y}^{(k+1)} + f(s, Y^{(k)}) - \frac{df}{dY}(s, Y^{(k)}) Y^{(k)}, \\ Y^{(k+1)} &= Y^{(k)} + \tau(\tilde{Y}^{(k+1)} - Y^{(k)}); \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

комбинирование методов простой итерации и Ньютона:

$$\frac{dY^{(k+1)}}{ds} = \left( A(s) + \frac{d\Gamma}{dY}(s, Y^{(k)}) \right) Y^{(k+1)} + f(s, Y^{(k)}) - \frac{d\Gamma}{dY}(s, Y^{(k)}) Y^{(k)}. \quad (5.2.5)$$

Отметим, что наиболее прост в реализации метод простой итерации, но он имеет в нелинейных задачах медленную скорость и ограниченную область сходимости. Более быстро сходящимся, надежным и универсальным является метод Ньютона. Однако применение его наталкивается на трудность вычисления матрицы Якоби от физически нелинейных членов  $(d\Phi/dY)(s, Y)$ , так как вектор  $\Phi(s, Y)$  записывается через разрешающие функции (5.1.7) не явно, а только алгоритмически.

Далее описывается алгоритм метода Ньютона для решения геометрически и физически нелинейных задач оболочек вращения [32]. Для этого нужно придать приращение  $\delta Y$  разрешающим функциям (5.1.7) и последовательно проследить его влияние во всех соотношениях задачи, как сделано при выводе уравнений нейтрального равновесия в разд. 4.3. Приведем формулы счета алгоритма (номер слоя  $j$  ради простоты в дальнейшем опущен).

а. Введем обобщенные деформации, напряжения, функции пластичности с учетом (3.2.1), (1.7.1)—(1.7.6):

$$(11) = -\varepsilon_{11} + (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \frac{\partial F}{\partial \omega}, \quad (22) = -\varepsilon_{22} + (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \frac{\partial F}{\partial \omega};$$

$$\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22})/3, \quad \bar{\sigma}_i = \sigma_i - \sigma(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \frac{\partial R}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial \varepsilon_i};$$

$$\Pi_{11} = \frac{\sigma_{11} + \sigma(\alpha_1 + R - 1)}{\bar{\sigma}_i} \frac{\partial \omega}{\partial \varepsilon_i}, \quad \Pi_{13} = \frac{\sigma_{13}}{\bar{\sigma}_i} \frac{\partial \omega}{\partial \varepsilon_i},$$

$$\Pi_{22} = \frac{\sigma_{22} + \sigma(\alpha_1 + R - 1)}{\bar{\sigma}_i} \frac{\partial \omega}{\partial \varepsilon_i};$$

$$N_{1,1} = -\omega + F + (11)\Pi_{11}, \quad N_{1,2} = F + (11)\Pi_{22}, \quad N_{1,4} = (11)\Pi_{13},$$

$$N_{2,1} = F + (22)\Pi_{11}, \quad N_{2,2} = -\omega + F + (22)\Pi_{22}, \quad N_{2,4} = (22)\Pi_{13},$$

$$N_{4,1} = -\varepsilon_{13}\Pi_{11}, \quad N_{4,2} = -\varepsilon_{13}\Pi_{22}, \quad N_{4,4} = -\omega - \varepsilon_{13}\Pi_{13}.$$

б. Образует прямоугольную матрицу размерности  $5 \times 6$ :

$$B = \begin{Bmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,5} & d_{1,6} & d_{1,9} & d_{1,11} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & d_{2,5} & d_{2,6} & d_{2,9} & d_{2,11} \\ d_{7,1} & d_{7,2} & d_{7,5} & d_{7,6} & d_{7,9} & d_{7,11} \\ d_{8,1} & d_{8,2} & d_{8,5} & d_{8,6} & d_{8,9} & d_{8,11} \\ d_{5,1} & d_{5,2} & d_{5,5} & d_{5,6} & d_{5,9} & d_{5,11} \end{Bmatrix}.$$

Элементы ее определены формулами (2.2.14), (2.2.15).

в. Вычисляем по формулам (4.3.4) обобщенные жесткости  $\tilde{D}_{1,1}, \tilde{D}_{1,2}, \tilde{D}_{1,5}, \tilde{D}_{1,6}, \tilde{D}_{1,11}, \tilde{D}_{2,1}, \tilde{D}_{2,2}, \tilde{D}_{2,5}, \tilde{D}_{2,6}, \tilde{D}_{2,11}, \tilde{D}_{7,5}, \tilde{D}_{7,6}, \tilde{D}_{7,11}, \tilde{D}_{8,5}, \tilde{D}_{8,6}, \tilde{D}_{8,11}, \tilde{D}_{5,9}$ , по формулам (4.3.8) — коэффициенты  $\tilde{a}_i (i = 1, 15), \tilde{b}_i (i = 1, 15), \tilde{f}_i (i = 1, 6), \tilde{c}_i (i = 1, 18)$ .

г. Образует прямоугольную матрицу размерности  $6 \times 8$ :

$$W = \begin{Bmatrix} \bar{c}_1 & \bar{c}_3 & \bar{c}_2 & 0 & \bar{c}_4 \frac{\cos \theta}{r} & \bar{c}_4 k_2 & \bar{c}_5 \frac{\cos \theta}{r} + \bar{c}_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\cos \theta}{r} & k_2 & 0 & 0 \\ \bar{c}_7 & \bar{c}_9 & \bar{c}_8 & 0 & \bar{c}_{10} \frac{\cos \theta}{r} & \bar{c}_{10} k_2 & \bar{c}_{11} \frac{\cos \theta}{r} + \bar{c}_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\cos \theta}{r} & 0 \\ \bar{c}_{13} & \bar{c}_{15} & \bar{c}_{14} & 0 & \bar{c}_{16} \frac{\cos \theta}{r} & \bar{c}_{16} k_2 & \bar{c}_{17} \frac{\cos \theta}{r} + \bar{c}_{18} & 0 \\ -\bar{c}_{13} \vartheta_1 & -\bar{c}_{15} \vartheta_1 & -\bar{c}_{14} \vartheta_1 & 0 & -\bar{c}_{16} \frac{\cos \theta}{r} \vartheta_1 & -\bar{c}_{16} k_2 \vartheta_1 & \left(1 - \bar{c}_{17} \frac{\cos \theta}{r} - \bar{c}_{18}\right) \vartheta_1 & 0 \end{Bmatrix}$$

Введем вектор-столбец  $5 \times 1$  физически нелинейных добавок в усилиях и моментах:

$$\Delta \Phi = (\Delta T_{11}^\Phi, \Delta T_{22}^\Phi, \Delta M_{11}^\Phi, \Delta M_{22}^\Phi, \Delta Q_1^\Phi)'$$

Тогда получим его производную по вектору  $Y$  в виде произведения двух матриц  $d\Delta\Phi/dY = B\Phi$ , представляющую собой матрицу  $5 \times 8$ .

д. Введем вектор-столбцы  $5 \times 1$ :

$$d = \begin{Bmatrix} (D_{1,14} - 2D_{1,11})\vartheta_1 - D_{1,14}\Phi_1 \\ (D_{2,14} - 2D_{2,11})\vartheta_1 - D_{2,14}\Phi_1 \\ (D_{7,14} - 2D_{7,11})\vartheta_1 - D_{7,14}\Phi_1 \\ (D_{8,14} - 2D_{8,11})\vartheta_1 - D_{8,14}\Phi_1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad e = \begin{Bmatrix} 2D_{1,11}\vartheta_1 + D_{1,14}\Phi_1 \\ 2D_{2,11}\vartheta_1 + D_{2,14}\Phi_1 \\ 2D_{7,11}\vartheta_1 + D_{7,14}\Phi_1 \\ 2D_{8,11}\vartheta_1 + D_{8,14}\Phi_1 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

вектор-строки  $1 \times 8$ :

$$g = \left( \tilde{c}_{13}, \tilde{c}_{15}, \tilde{c}_{14}, 0, \tilde{c}_{16} \frac{\cos\theta}{r}, \tilde{c}_{16}k_2, \tilde{c}_{17} \frac{\cos\theta}{r} + \tilde{c}_{18}, 0 \right),$$

$$q = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0),$$

вектор-столбец  $5 \times 1$  геометрически нелинейных добавок в усилиях и моментах:

$$\Delta\Gamma = (\Delta T_{11}^\Gamma, \Delta T_{22}^\Gamma, \Delta M_{11}^\Gamma, \Delta M_{22}^\Gamma, 0)'$$

Тогда производная  $d\Delta\Gamma/dY$  будет представлена прямоугольной матрицей  $5 \times 8$ :  $d\Delta\Gamma/dY = dg + eq$ .

Вычислением производных  $d\Delta\Phi/dY$ ,  $d\Delta\Gamma/dY$  решается вопрос вычисления матрицы Якоби  $df/dY$ , так как вектор  $f(s, Y)$  является линейной комбинацией векторов  $\Delta\Phi$ ,  $\Delta\Gamma$ .

Определенные интегралы (2.2.14), (2.2.15) по нормальной координате  $z$  вычисляются приближенно по формуле Симпсона. Нелинейная задача решается для ряда возрастающих значений параметра интегрального прогиба  $S$  или параметра нагрузки  $p$ . При  $S = S_m$  или  $p = p_m$  за нулевое приближение  $Y_m^{(0)}$  принимается  $Y_m^{(0)} = Y_{m-1}$ , где  $Y_{m-1}$  — полученное с заданной точностью решение для  $S = S_{m-1}$  или  $p = p_{m-1}$ . Алгоритм реализован в виде программы на языке ФОРТРАН ЕС ЭВМ для однослойной оболочки.

### 5.3. СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ ЗАДАЧ. МЕТОД ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ, ОРТОГОНАЛЬНАЯ ПРОГОНКА

Рассмотрим линейризованную краевую задачу:

$$\frac{dY^{(k+1)}}{ds} = \left( A(s) + \frac{df}{dY}(s, Y^{(k)}) \right) Y^{(k+1)} + f(s, Y^{(k)}) - \frac{df}{dY}(s, Y^{(k)}) Y^{(k)}, \quad s_0 \leq s \leq s_N; \quad (5.3.1)$$

$$BY^{(k+1)} = m \quad \text{при} \quad s = s_0, \quad (5.3.2)$$

$$DY^{(k+1)} = n \quad \text{при} \quad s = s_N. \quad (5.3.3)$$



Здесь (5.3.2), (5.3.3) соответствуют граничным условиям (5.1.9), (5.1.10), линеаризованным методом Ньютона;  $B, D$  — прямоугольные матрицы размерности  $4 \times 8$ , имеющие ранг 4;  $m, n$  — векторы  $4 \times 1$ ,  $n = (n_1, n_2, n_3, n_4)$ ;  $D = \{d_{ij}\}$ ,  $i = \overline{1,4}, j = \overline{1,8}$ .

Для решения краевой задачи (5.3.1)—(5.3.3) используется метод дополнительных функций с ортонормированием, обеспечивающим устойчивый численный процесс [36, 47, 55, 56]. Пусть условия (5.3.2) разрешены. Тогда определяются векторы  $Z_j(s_0)$ ,  $j = \overline{1,4}$  — фундаментальная система однородных решений,  $Z_5(s_0)$  — вектор частного решения системы (5.3.2).

Пусть интервал  $[s_0, s_N]$  разбит на  $N$  участков точками  $s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_N$ . Определим операцию  $M_t$ , действующую на векторы  $Z_j(s_t)$ ,  $j = \overline{1,5}$ :

$$M_t Z_5(s_t) = u_5(s_{t+1}) \quad (5.3.4)$$

есть результат интегрирования от  $s_t$  до  $s_{t+1}$  системы

$$\frac{dZ_5}{ds} = \left( A(s) + \frac{df}{dY}(s, Y^{(k)}) \right) Z_5 + f(s, Y^{(k)}) - \frac{df}{dY}(s, Y^{(k)}) Y^{(k)} \quad (5.3.5)$$

при начальных условиях  $Z_5(s_t)$ ,

$$M_t Z_j(s_t) = u_j(s_{t+1}), j = \overline{1,4}, \quad (5.3.6)$$

есть результат интегрирования от  $s_t$  до  $s_{t+1}$  систем

$$\frac{dZ_j}{ds} = \left( A(s) + \frac{df}{dY}(s, Y^{(k)}) \right) Z_j, j = \overline{1,4}, \quad (5.3.7)$$

при начальных данных  $Z_j(s_t)$ ,  $j = \overline{1,4}$ .

К векторам  $u_j(s_{t+1})$ ,  $j = \overline{1,5}$  применяется операция ортонормирования  $U^{(t+1)}$  так, что

$$Z_j(s_{t+1}) = U^{(t+1)}(u_j(s_{t+1})), j = \overline{1,5}.$$

Формулы ортонормирования (скобками обозначено скалярное произведение):

$$\begin{aligned} \omega_{11} &= \sqrt{(u_1, u_1)}, Z_1 = u_1 / \omega_{11}; \\ \omega_{21} &= (u_2, Z_1), \omega_{22} = \sqrt{(u_2, u_2) - \omega_{21}^2}, Z_2 = (u_2 - \omega_{21} Z_1) / \omega_{22}; \\ \omega_{31} &= (u_3, Z_1), \omega_{32} = (u_3, Z_2), \omega_{33} = \sqrt{(u_3, u_3) - \omega_{31}^2 - \omega_{32}^2}, \\ Z_3 &= (u_3 - \omega_{31} Z_1 - \omega_{32} Z_2) / \omega_{33}; \\ \omega_{41} &= (u_4, Z_1), \omega_{42} = (u_4, Z_2), \omega_{43} = (u_4, Z_3), \\ \omega_{44} &= \sqrt{(u_4, u_4) - \omega_{41}^2 - \omega_{42}^2 - \omega_{43}^2}, Z_4 = (u_4 - \omega_{41} Z_1 - \omega_{42} Z_2 - \omega_{43} Z_3) / \omega_{44}; \\ \omega_{51} &= (u_5, Z_1), \omega_{52} = (u_5, Z_2), \omega_{53} = (u_5, Z_3), \omega_{54} = (u_5, Z_4), \\ Z_5 &= u_5 - \sum_{i=1}^4 \omega_{5i} Z_i. \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

При выполнении ортонормирования  $U^{(i)}$  вырабатывается треугольная матрица ортогонализации  $\Omega^{(i)}$ :

$$\Omega^{(i)} = \begin{Bmatrix} \omega_{11}^{(i)} & \omega_{21}^{(i)} & \omega_{31}^{(i)} & \omega_{41}^{(i)} & \omega_{51}^{(i)} \\ 0 & \omega_{22}^{(i)} & \omega_{32}^{(i)} & \omega_{42}^{(i)} & \omega_{52}^{(i)} \\ 0 & 0 & \omega_{33}^{(i)} & \omega_{43}^{(i)} & \omega_{53}^{(i)} \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{44}^{(i)} & \omega_{54}^{(i)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}. \quad (5.3.9)$$

Итак, алгоритм ортогональной прогонки запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} Z_j(s_0) &= Z_j(s_0), \quad Z_j(s_1) = U^{(1)} \{M_0 Z_j(s_0)\}, \quad j = \overline{1,5}, \\ Z_j(s_2) &= U^{(2)} \{M_1 Z_j(s_1)\}, \dots, Z_j(s_N) = U^{(N)} \{M_{N-1} Z_j(s_{N-1})\}. \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

Любое решение системы (5.3.1), удовлетворяющее граничным условиям (5.3.2) на левом краю, принимает на правом краю значение, представимое в виде

$$Y^{(k+1)}(s_N) = Z_5(s_N) + \sum_{j=1}^4 \beta_j^{(N)} Z_j(s_N). \quad (5.3.11)$$

Коэффициенты  $\beta_j^{(N)}$  находятся из правого граничного условия (5.3.3):

$$\sum_{j=1}^4 \beta_j^{(N)} \sum_{i=1}^8 d_{k,i} Z_{j,i}(s_N) = n_k - \sum_{i=1}^8 d_{k,i} Z_{5,i}(s_N), \quad (5.3.12)$$

$k = \overline{1,4}$ ,  $Z_{j,i}$  —  $i$ -я компонента вектора  $Z_j$ .

Значения решения в промежуточных точках  $s_l$  вычисляются по формуле

$$Y^{(k+1)}(s_l) = Z_5(s_l) + \sum_{j=1}^4 \beta_j^{(l)} Z_j(s_l). \quad (5.3.13)$$

Коэффициенты  $\beta_j^{(l)}$  определяются рекуррентно через  $\beta_j^{(l+1)}$  с помощью треугольной матрицы  $\Omega^{(l+1)}$ :

$$\Omega^{(l+1)} \beta^{(l)} = \beta^{(l+1)}, \quad (5.3.14)$$

$\beta^{(l)} = (\beta_1^{(l)}, \beta_2^{(l)}, \beta_3^{(l)}, \beta_4^{(l)}, 1)'$  — вектор-столбец  $5 \times 1$ .

Таким образом, метод ортогональной прогонки состоит из прямого и обратного хода. Прямой ход складывается из формул (5.3.4)—(5.3.10), обратный ход представлен формулами (5.3.11)—(5.3.14).

В качестве операции  $M_l$  приняты формулы метода Рунге-Кутты второго порядка, так как они не требуют подсчета функции  $f(s, Y^{(k)})$  и

матрицы  $(df/dY)(s, Y^{(k)})$  в промежуточных точках интегрирования, что обусловило бы введение формул интерполяции. Для системы

$$\frac{dY}{ds} = \Phi(s, Y) \quad (5.3.15)$$

формулы метода Рунге—Кутты второго порядка имеют вид

$$Y_{t+1} = Y_t + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) + O(\Delta s^3),$$

$$m_1 = \Delta s \Phi(s_t, Y_t), \quad m_2 = \Delta s \Phi(s_{t+1}, Y_t + m_1). \quad (5.3.16)$$

Здесь  $Y$  — вектор неизвестных,  $s$  — аргумент,  $\Delta s$  — шаг интегрирования,  $Y_t = Y(s_t)$ . При нахождении векторов  $Z_j (j = \overline{1,4})$   $Y = Z_j$ ,  $\Phi(s, Y)$  совпадает с правой частью (5.3.7). Для вектора  $Z_5$   $Y = Z_5$ ,  $\Phi(s, Y)$  совпадает с правой частью (5.3.5).

Естественно, что формулы (5.3.16) применимы в интервале непрерывного изменения вектора  $Y$ . В точках с особенностями в качестве операции  $M$ , будут служить формулы сопряжения

$$Y_{t+1} = M Y_t, \quad (5.3.17)$$

где  $M$  — матрица сопряжения размерности  $8 \times 8$ .

Сделаем несколько замечаний.

а. Как видно из приведенных формул ортогональной прогонки, на прямом ходе вычисляются в точках  $s_t$  матрица  $\Omega^{(i)}$  и векторы  $Z_j, j = \overline{1,5}$ , которые нужно сохранить для получения на обратном ходе решения  $Y^{(k+1)}(s_t)$  по формулам (5.3.11), (5.3.13).

б. За счет увеличения машинного времени [7] можно сэкономить память: на первом прямом ходе вычислять  $Z_j$  и  $\Omega^{(i)}$ , но сохранять лишь матрицы  $\Omega^{(i)}$ , на обратном ходе вычислять и сохранять коэффициенты  $\beta^{(i)}$ , на повторном прямом ходе заново вычислять векторы  $Z_j$  и искомое решение (5.3.13), (5.3.11) с помощью ранее полученных коэффициентов  $\beta^{(i)}$ .

в. Соотношение (5.3.14) позволяет получать на обратном ходе вектор коэффициентов  $\beta^{(i)}$  через вектор  $\beta^{(i+1)}$  в соседней (справа) точке ортогонализации. С помощью (5.3.14) можно записать общее соотношение [55] для получения коэффициентов  $\beta^{(i)}$  непосредственно через коэффициенты  $\beta^{(i+p)}$  через  $p$  точек ортогонализации:

$$\beta^{(i+p)} = \Omega^{(i+p)} \Omega^{(i+p-1)} \dots \Omega^{(i+1)} \beta^{(i)}. \quad (5.3.18)$$

Формула (5.3.18) позволяет хранить материал, необходимый для обратного хода, не во всех точках ортогонализации, а лишь в точках выдачи результатов решения.

Приведем примеры записи граничных условий, когда они поставлены на контуре поверхности приведения.

А. Левый край  $s = s_0$ . Здесь для начала счета должна быть задана система векторов  $Z_j, j = \overline{1,5}$ .

1. Жесткая заделка:

$$u = w = \vartheta_1 = v = 0. \quad (5.3.19)$$

Система векторов  $Z_j, j = \overline{1,5}$ , может быть представлена простейшим способом в виде

$$\begin{aligned} Z_1 &= (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)', \\ Z_2 &= (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)', \\ Z_3 &= (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)', \\ Z_4 &= (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)', \\ Z_5 &= (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)'. \end{aligned} \quad (5.3.20)$$

2. Шарнирное закрепление:

$$M_{11} = u = w = v = 0; \quad (5.3.21)$$

$$\begin{aligned} Z_1 &= (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)', \\ Z_2 &= (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)', \\ Z_3 &= (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)', \\ Z_4 &= (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)', \\ Z_5 &= (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)'. \end{aligned} \quad (5.3.22)$$

Б. На правом краю  $s = s_N$  необходимо иметь прямоугольную матрицу  $D(4 \times 8)$  и вектор  $n$  размерности 4.

1. Жесткая заделка:

$$u = w = \vartheta_I = 0, v = C; \quad (5.3.23)$$

$$D = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}, n = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ C \end{Bmatrix}. \quad (5.3.24)$$

2. Шарнирное закрепление:

$$M_{11} = u = w = 0, v = C;$$

$$D = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}, n = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ C \end{Bmatrix}. \quad (5.3.25)$$

#### 5.4. СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ УГЛОМ $\theta$ И ДУГОЙ МЕРИДИАНА $s$

Меридиан поверхности приведения оболочки вращения определяется ее главными кривизнами  $k_1, k_2$ . Пусть заданы  $k_1(\theta), k_2(\theta)$  на интервале  $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_N, \theta$  — угол между внешней нормалью к ПП оболочки и ее осью вращения. В уравнениях равновесия (5.1.8) и граничных условиях (5.1.9), (5.1.10) аргументом выбрана дуга меридиана  $s, s_0 \leq s \leq s_N$ .

В частности, тогда можно регулировать шаг разбиения по длине меридиана оболочки. Для проведения расчетов необходимо иметь соответствие между дугой  $s$  и углом  $\theta = \theta(s)$ , которое для оболочки вращения переменной кривизны (например, эллипсоида вращения) не может быть получено в конечном виде. Оно находится численным решением задачи Коши

$$\frac{d\theta}{ds} = k_1(\theta), \theta(s_0) = \theta_0 \quad (5.4.1)$$

(используется метод Рунге-Кутты четвертого порядка). Предварительно определяются длина дуги меридиана оболочки

$$s_N - s_0 = \int_{\theta_0}^{\theta_N} R_1 d\theta \quad (5.4.2)$$

методом Симпсона и шаг интегрирования  $\Delta s = (s_N - s_0) / N$ .

### 5.5 О ПОВЕДЕНИИ РАЗРЕШАЮЩИХ ФУНКЦИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ПОЛЮСА ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

Полученные в гл. 3, 4 канонические системы при численном интегрировании не применимы в окрестности полюса ( $r = 0$ ) оболочки вращения, так как их коэффициенты включают множители  $r^{-\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ . Некоторые вопросы, связанные с обработкой окрестности полюса, рассмотрены в работах [12, 55, 60, 74, 109].

а. Рассмотрим получение разрешающих функций в окрестности полюса [33, 35, 39] для осесимметричных геометрически нелинейных канонических систем (3.2.14), (3.2.15). Выкладки выполнены в безразмерных величинах:

$$\begin{aligned} \psi &= h/h_0, \quad z = (z/h) (-\gamma \leq z \leq 1 - \gamma), \quad t = (s/h_0) (t_0 \leq t \leq t_N), \\ w &= w/(h_0 e_s), \quad u = u/(h_0 e_s), \quad a = a/h_0, \quad R_i = R_i/h_0, \quad r = r/h_0, \quad k_i = k_i h_0, \\ \varepsilon_{ii} &= \varepsilon_{ii}/e_s, \quad \kappa_{ii} = \kappa_{ii} h_0/e_s, \quad E_{ii} = E_{ii}/e_s, \quad \sigma_{ik} = \sigma_{ik}/(3Ge_s), \quad \vartheta_i = \vartheta_i/e_s, \\ \varphi_1 &= \varphi_1/e_s, \quad \alpha^* = 2G\alpha, \quad \beta^* = 2Ga^2\beta, \quad T_{ik} = T_{ik}/(2Gh_0 e_s), \quad Q_1 = Q_1/(2Gh_0 e_s), \\ M_{ik} &= M_{ik}/(2Gh_0^2 e_s), \quad X_i = X_i/(2Ge_s), \quad v = v/(h_0^2 e_s). \end{aligned} \quad (5.5.1')$$

Здесь  $h_0$  — некоторая характерная толщина оболочки;  $e_s, \sigma_s = 3Ge_s$  — пределы текучести интенсивностей деформаций и напряжений на диаграмме линейного упрочнения (5.6.2). Принято, что в малой окрестности полюса оболочка имеет постоянную толщину и нагружена равномерным нормальным давлением ( $\psi = \text{const}$ ,  $\gamma = 0,5$ ;  $X_1^H = 0, X_3^H = p$ ;  $X_1 = 0, X_3 = q$ ).

Хорошо известны способы нахождения решений системы линейных однородных дифференциальных уравнений с регулярной особой точкой с помощью бесконечных рядов [106]. Указанная

система имеет вид

$$r \frac{dY_i}{dt} = \sum_{k=1}^n q_{ik}(r) Y_k, \quad i = \overline{1, n}, \quad (5.5.1)$$

$q_{ik}(r)$  — регулярные функции в полюсе  $r = 0$ :

$$q_{ik}(r) = b_{ik} + b'_{ik}r + b''_{ik}r^2 + \dots, \quad (5.5.2)$$

$b_{ik}, b'_{ik}, \dots$  — константы. Решение системы (5.5.1) ищется в виде

$$Y_i = r^\rho \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(i)} r^k, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.5.3)$$

Подстановка (5.5.3) в (5.5.1) показывает, что  $\rho$  — собственные значения матрицы  $(b_{ik})$ ,  $C_0^{(i)}$  — ее собственные функции.

Система (3.2.14) будет приведена к виду (5.5.1) с помощью следующих неизвестных:

$$\begin{aligned} Y_1 &= T_{11}^H, Y_2 = Q_1^H, Y_3 = M_{11}, Y_4 = u/r, Y_5 = w, \\ Y_6 &= \vartheta_1/r, Y_7 = p, Y_8 = v. \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

При этом

$$\frac{dp}{dt} = 0, \quad \frac{dv}{dt} = w, \quad v = \int_{t_0}^t w dt, \quad v(t_0) = 0.$$

Различные собственные значения матрицы  $(b_{ik})$  системы (3.2.14) равны

$$\rho_1 = 0, \quad \rho_2 = -1, \quad \rho_3 = -2. \quad (5.5.5)$$

Учтя требования ограниченности и осесимметричности решения в полюсе, можно убедиться, что разрешающие функции системы (3.2.14) в полюсе и его малой окрестности будут иметь следующий вид (с погрешностью  $O(r^4)$ ):

$$\begin{aligned} T_{11}^H &= a_{10} + a_{12}r^2, \quad M_{11} = a_{30} + a_{32}r^2, \quad w = a_{50} + a_{52}r^2, \\ p &= a_{70}, \quad Q_1^H = a_{21}r + a_{23}r^3, \quad u = a_{40}r + a_{42}r^3, \end{aligned} \quad (5.5.6)$$

$$\vartheta_1 = a_{60}r + a_{62}r^3, \quad v = a_{81}r + a_{83}r^3.$$

Введем разложения для кривизн оболочки

$$k_1(r) = a + br^2, \quad k_2(r) = a + dr^2,$$

где

$$a = k_1(0) = k_2(0), \quad b = \frac{1}{2} \frac{d^2 k_1(0)}{dr^2}, \quad d = \frac{1}{2} \frac{d^2 k_2(0)}{dr^2}.$$

После подстановки (5.5.6) в систему (3.2.14) находим, что  $a_{10}, a_{30}, a_{50}, a_{70}$  — произвольные константы задачи, остальные коэффициенты (5.5.6) вычисляются через них следующим образом:

$$\begin{aligned}
 a_{40} &= -aa_{50} + \frac{1-\nu}{\psi(1+\nu)} a_{10}, \quad a_{21} = aa_{10} - \frac{a_{70}}{2}, \quad a_{60} = 12 \frac{(1-\nu)a_{30}}{(1+\nu)\psi^3}, \\
 a_{81} &= a_{50}, \quad a_{52} = \frac{1}{2}(aa_{40} - a_{60}), \quad a_{83} = \frac{1}{3} \left( a_{52} + \frac{1}{2} a^2 a_{50} \right), \\
 a_{12} &= \frac{1}{8} [A(3+\nu) - B\psi(1+\nu)], \quad a_{42} = \frac{1}{\psi(3+\nu)} [(1-\nu)a_{12} - B\psi], \\
 a_{32} &= \frac{3+\nu}{8} C + \frac{1+\nu}{96} \psi^3 D, \quad a_{62} = \frac{1}{\psi^3(3+\nu)} [D\psi^3 + 12(1-\nu)a_{32}], \\
 4a_{23} &= a(1+\nu)a_{12} + (b+\nu d)a_{10} + \psi(1+\nu)(aa_{42} + a^2 a_{52} - \\
 &\quad - \frac{1}{2} a^3 a_{40} + da_{40} + 2ada_{50}) + a^2 a_{21} - e_s \nu aa_{60} a_{21}, \\
 A &= -a^2 a_{10} + \frac{a}{2} a_{70} - \frac{6(1-\nu)}{\psi^2} aa_{30} + (1+\nu)\psi da_{50} - e_s \nu aa_{60} a_{21}, \\
 B &= -\frac{1+\nu}{2} aa_{60} + (b+\nu d)a_{50} + e_s \left( \frac{a_{60}^2}{2} + \frac{1-\nu}{\psi} a_{21} a_{60} \right), \\
 C &= a_{21} - \frac{1-\nu}{2} a^2 a_{30} + e_s \left( a_{10} a_{60} - \frac{1+\nu}{24} \psi^3 aa_{60}^2 \right), \\
 D &= \frac{1+\nu}{2} a^2 a_{60} + \frac{e_s}{2} \nu aa_{60}^2.
 \end{aligned} \tag{5.5.7}$$

Чтобы перейти к геометрически линейному случаю, достаточно положить в (5.5.7)  $e_s = 0$ . Соотношения (5.5.7) линеаризуются и в том случае, если разложения (5.5.6) взять с погрешностью  $O(r^2)$ . Для работы с системой (3.2.15) в деформированных осях нужно вычислить  $\mathbf{T}_{11} = \mathbf{T}_{11}^H - e_s \mathfrak{D}_1 \mathbf{Q}_1$ ,  $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_1^H + e_s \mathfrak{D}_1 \mathbf{T}_{11}^H$ , оставив остальные неизвестные (5.5.6) без изменения.

Разложения (5.5.6) применимы и в случае переменных толщины ( $\gamma = 0,5$ ) и нормального давления, если функции  $\psi(s), f_3(s)$  в окрестности полюса с погрешностью разложений (5.5.6) могут быть приняты постоянными. При этом в (5.5.7) согласно (5.1.3) нужно  $a_{70}$  заменить на  $a_{70} f_3(s)$ .

Разложениями (5.5.6) можно воспользоваться для записи предельной системы в полюсе. В недеформированных осях она будет

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{T}_{11}^H}{dt} &= 0, \quad \frac{d\mathbf{Q}_1^H}{dt} = \bar{\mathbf{k}} \mathbf{T}_{11}^H - \frac{\mathbf{p}}{2}, \quad \frac{d\mathbf{M}_{11}}{dt} = 0, \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{1-\nu}{\psi(1+\nu)} \mathbf{T}_{11}^H - \mathbf{k}_1 \mathbf{w}, \\
 \frac{d\mathbf{w}}{dt} &= 0, \quad \frac{d\mathfrak{D}_1}{dt} = \frac{12(1-\nu)}{\psi^3(1+\nu)} \mathbf{M}_{11}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0, \quad \frac{d\nu}{dt} = \mathbf{w},
 \end{aligned} \tag{5.5.8}$$

и деформированных осях имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dT_{11}}{dt} = 0, \quad \frac{dQ_1}{dt} = T_{11}(k_1 + e_3 k_{11}) - \frac{q}{2}, \quad \frac{dM_{11}}{dt} = 0, \quad \frac{du}{dt} = \frac{1-\nu}{\psi(1+\nu)} T_{11} - k_1 w, \\ \frac{dw}{dt} = 0, \quad \frac{d\vartheta_1}{dt} = \frac{12(1-\nu)}{\psi^3(1+\nu)} M_{11}, \quad \frac{dq}{dt} = 0, \quad \frac{d\nu}{dt} = w. \end{aligned} \quad (5.5.9)$$

Краевые условия задачи в полюсе:

$$Q_1 = u = \vartheta_1 = \nu = 0, \quad T_{11} = a_{10}, \quad M_{11} = a_{30}, \quad w = a_{50}, \quad p = a_{70}. \quad (5.5.10)$$

Системы (5.5.8) или (5.5.9) в сочетании с краевыми условиями (5.5.10) и достаточным числом произвольных констант  $a_{10}, a_{30}, a_{50}, a_{70}$  дают возможность применять метод численного интегрирования с началом процесса в полюсе. А также возможна процедура численного интегрирования с началом счета на некотором расстоянии  $\Delta r$  от полюса с использованием разложений (5.5.6) и общей канонической системы.

б. Предельные уравнения в полюсе для осесимметричной оболочки вращения средней толщины, соответствующие общей канонической системе (5.1.8).

Обратимся вначале к безмоментному решению [31] (разд. 7.2) для ортотропной упругой оболочки. Из него видно, что в такой оболочке перемещения  $u, w$  содержат особенность в полюсе вида  $(E_2 - E_1) \text{Intg}(\theta/2)$ , которая исчезает при  $E_1 = E_2, \nu_{12} = \nu_{21}$  в полюсе и его окрестности.

Таким образом, с учетом ограниченности разрешающих функций, в полюсе и его некоторой окрестности  $0 \leq \theta \leq \theta_1$  оболочка должна быть изотропной с упругими постоянными  $E, \nu$ . Тогда предельные уравнения в полюсе, соответствующие системе (5.1.8), могут быть получены так же, как и в случае теории тонких оболочек, с использованием разложений вида (5.5.6). С учетом обозначений (3.2.8), (5.1.3) при  $E_1 = E_2, \nu_{12} = \nu_{21}, k_1 = k_2$  они имеют вид [33]

$$\begin{aligned} \frac{dT_{11}^H}{ds} = 0, \quad \frac{dQ_1^H}{ds} = k_1 T_{11}^H - \frac{p}{2} f_3, \quad \frac{dM_{11}}{ds} = 0, \quad \frac{dp}{ds} = 0, \\ \frac{du}{ds} = (d_1 - d_1 d_7 - d_2 d_4) \frac{T_{11}^H - \Delta T_{11}^\Phi}{\tilde{\Delta}} + (d_2 d_7 - d_2 + d_4 d_5) \frac{M_{11} - \Delta M_{11}^\Phi}{\tilde{\Delta}} - k_1 w, \\ \frac{dw}{ds} = 0, \quad \frac{d\vartheta_1}{ds} = (d_2 d_3 - d_2 + d_1 d_6) \frac{T_{11}^H - \Delta T_{11}^\Phi}{\tilde{\Delta}} + \\ + (d_5 - d_3 d_5 - d_2 d_6) \frac{M_{11} - \Delta M_{11}^\Phi}{\tilde{\Delta}}, \quad \frac{d\nu}{ds} = w; \\ \tilde{\Delta} = (1 - d_3)(1 - d_7) - \tilde{d}_4 d_6. \end{aligned} \quad (5.5.11)$$

К системе (5.5.11) нужно добавить условия в полюсе (граничные условия задачи слева), следующие из разложений вида (5.5.6):

$$Q_1^H = u = \vartheta_1 = \nu = 0, \quad T_{11}^H = a_{10}, \quad M_{11} = a_{30}, \quad w = a_{50}, \quad p = a_{70}, \quad (5.5.12)$$

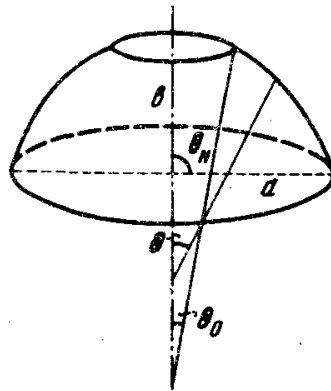


где  $a_{10}, a_{30}, a_{50}, a_{70}$  — четыре произвола задачи, позволяющие удовлетворить условиям (5.1.10).

При численном решении нелинейной краевой задачи (5.1.8)—(5.1.10) в полюсе используются соотношения (5.5.11), (5.5.12), на интервале  $0 \leq \theta \leq \theta_1$  материал оболочки изотропный, на интервале  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_N$  — ортотропный. При достаточно малой величине угла сопряжения  $\theta_1$  в месте сопряжения может возникнуть значительная концентрация напряжений. Ее не будет при подходящем выборе угла  $\theta_1$ , величина которого зависит от конкретной задачи.

### 5.6. БОЛЬШИЕ ПРОГИБЫ СПЛЮСНУТОГО ЭЛЛИпсоИДАЛЬНОГО ДНИЩА С ОТВЕРСТИЕМ

Рассмотрим осесимметричную задачу [32] о больших прогибах изотропного упругопластического сплюснутого эллипсоидального днища постоянной толщины, находящегося под действием равномерного нормального давления  $p$ . Полуоси эллипсоида  $a, b$ , где  $b$  — полуось вдоль оси вращения (рис. 5.2). Главные кривизны эллипсоида враще-



Р и с. 5.2

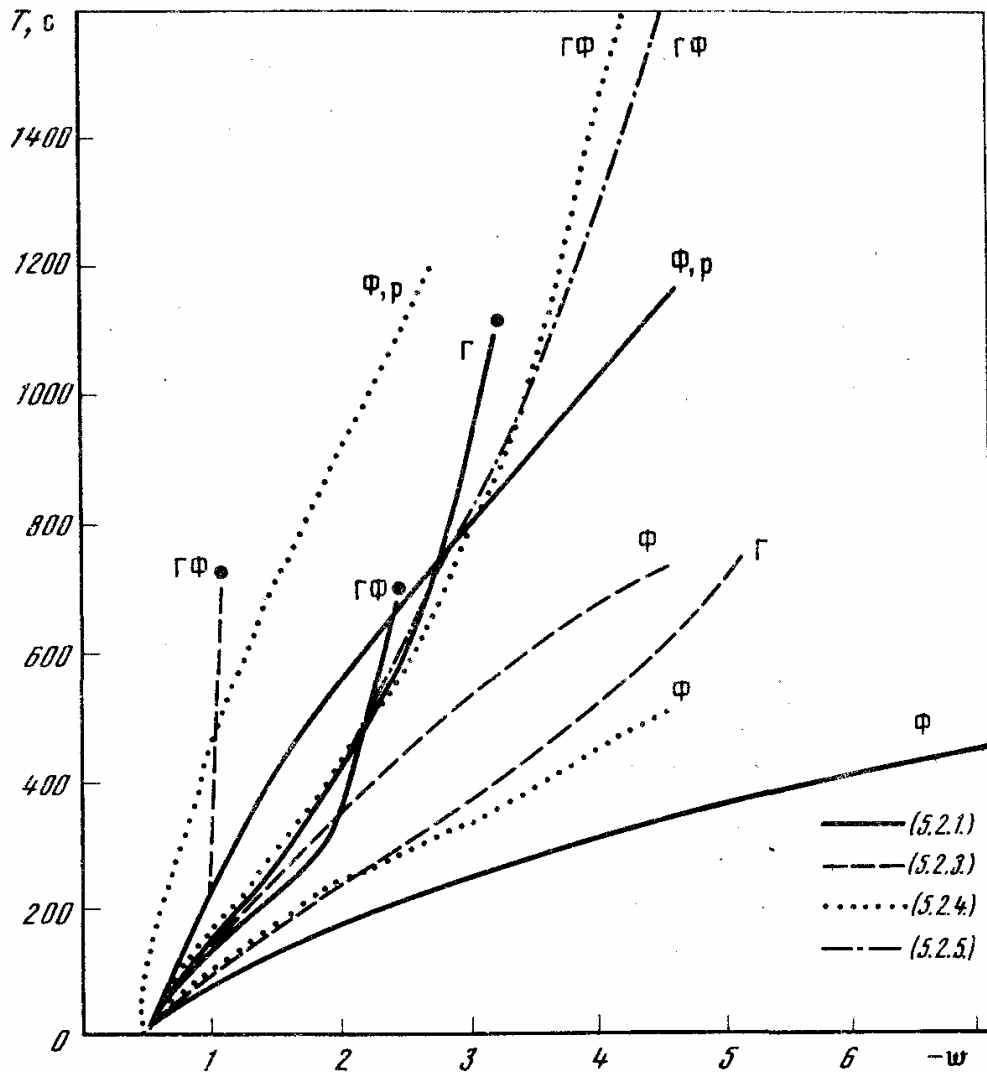
ния определяются формулами

$$\begin{aligned} k_1 &= \left( a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta \right)^{1,5} / \left( a^2 b^2 \right), \\ k_2 &= \left( a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta \right)^{0,5} / a^2. \end{aligned} \quad (5.6.1)$$

Края днища у отверстия с углом раствора  $\theta_0$  и основания  $\theta_N$  шарнирно закреплены (условия (5.3.21), (5.3.25)). Материал оболочки следует закону линейного упрочнения [67]:

$$\omega = 0 \text{ при } \varepsilon_i \leq e_s, \quad \omega = \lambda(1 - e_s/\varepsilon_i) \text{ при } \varepsilon_i > e_s. \quad (5.6.2)$$

Обозначено:  $\sigma_i, \varepsilon_i$  — интенсивности напряжений и деформаций;  $\omega$  — функция пластичности;  $\sigma_s, e_s$  — предел текучести материала,  $\sigma_s = 3Ge_s$ ;  $G$  — модуль сдвига;  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $\lambda$  — коэффициент упрочнения;  $N$  — число отрезков разбиения меридиана оболочки в методе Рунге-Кутты;  $M$  — число

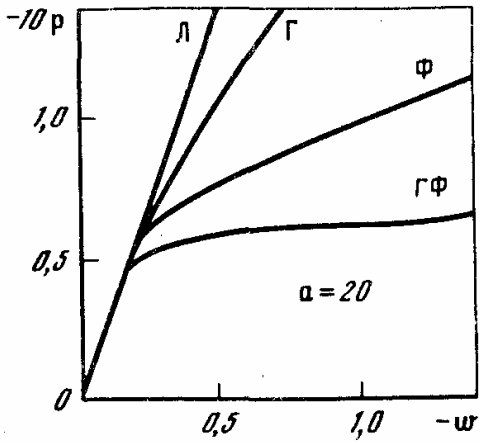


Р и с. 5.3

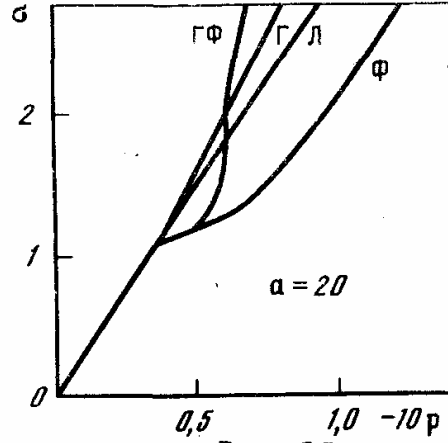
отрезков разбиения по толщине оболочки;  $p = p(1 - \nu^2)/(Ee_s)$  — параметр давления;  $w = \max w/h$  — параметр прогиба;  $\sigma = (1 - \nu^2) \max \sigma_{i,s,z} / (Ee_s)$  — параметр интенсивности напряжений (на пределе текучести  $\sigma = 1,5(1 - \nu)$ );  $a = a/h$  — параметр тонкостенности. При вычислениях принято  $b/a = 0,5$ ;  $\theta_0 = 0,092$ ;  $\theta_N = \pi/2$ ;  $\lambda = 0,9$ ;  $e_s = 0,005$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $N = 50$ ,  $M = 6$ .

Уравнениями задачи являются (5.1.8)—(5.1.10), которые решаются на основе алгоритма метода линеаризации, описанного в разд. 5.2, и ортогональной прогонки (см. разд. 5.3). Результаты вычислений приведены на рис. 5.3.—5.13. Далее в тексте и на рисунках буквы означают: Л — линейное, Г — геометрически нелинейное, Ф — физически нелинейное, ГФ — геометрически и физически нелинейные решения.

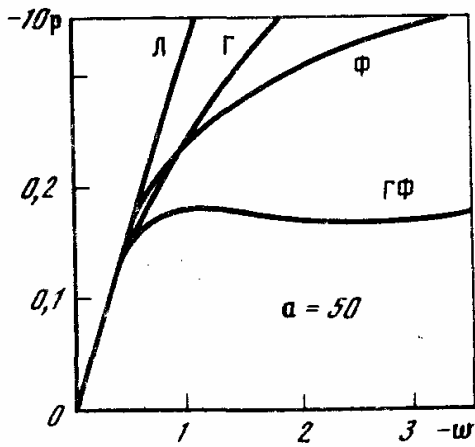
На рис. 5.3 ( $a = 50$ , внешнее равномерное давление) показано машинное время  $T$  (ЭВМ ЕС—1033), необходимое для решения задачи в зависимости от параметра  $w$ , метода последовательных приближений, характера нелинейности, а также параметра ( $C$  или  $p$ ), который после-



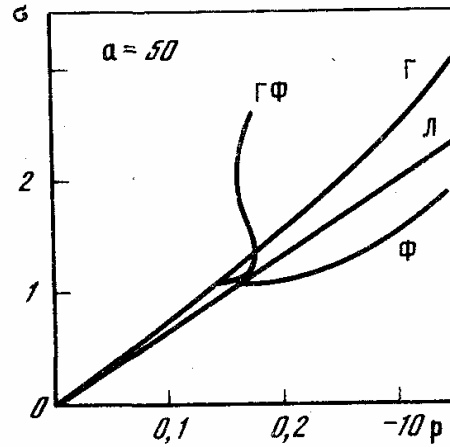
Р и с. 5.4



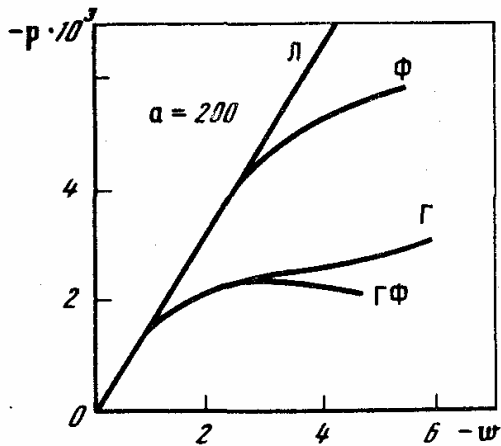
Р и с. 5.5



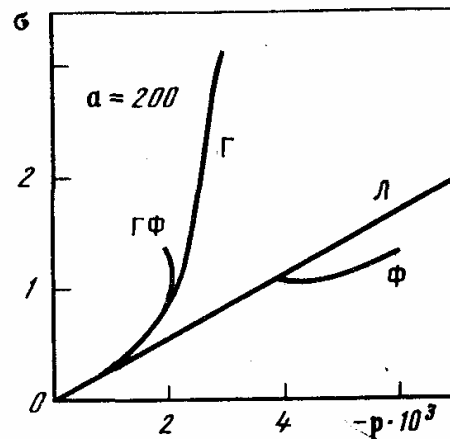
Р и с. 5.6



Р и с. 5.7



Р и с. 5.8



Р и с. 5.9

довательно возрастает в ходе решения задачи. Видно, что в Г-задаче предпочтение нужно отдать методу Ньютона (5.2.3), в Ф-задаче — методу простой итерации (5.2.1), в ГФ-задаче — методу (5.2.4) или (5.2.5). Отметим, что в Г- и ГФ-задачах метод (5.2.1) имеет ограниченную область сходимости (сплошные кривые Г и ГФ). Количество

машинного времени возрастает в несколько раз, если задаваемым параметром задачи выбрать параметр нагрузки  $p$  (кривые  $\Phi_p$  по сравнению с кривыми  $\Phi$ ). Точки обозначают, что далее процесс разошелся.

Предпочтение методам по затратам машинного времени может измениться с изменением диаграммы растяжения материала, вида нагружения, граничных условий, геометрии оболочки и т.д.

На рис. 5.4—5.9 даны результаты вычислений для днища, находящегося под действием внешнего равномерного давления, для значений параметра тонкостенности  $a = 20, 50, 200$ . Видно, что для заданного значения параметра давления  $p$   $\Gamma$ - и  $\Phi$ -расчеты увеличивают прогиб по сравнению с  $L$ -задачей. При расчете с отдельным учетом  $\Gamma$ -нелинейности и  $\Phi$ -нелинейности днища несут возрастающую нагрузку. Совместный же их учет, т.е.  $\Gamma\Phi$ -расчет, показывает, что рассматриваемые днища имеют предельную нагрузку, которая наблюдается при довольно малых прогибах: для  $a = 20$   $w \approx 0,5$ , для  $a = 50$   $w \approx -1,0$ .

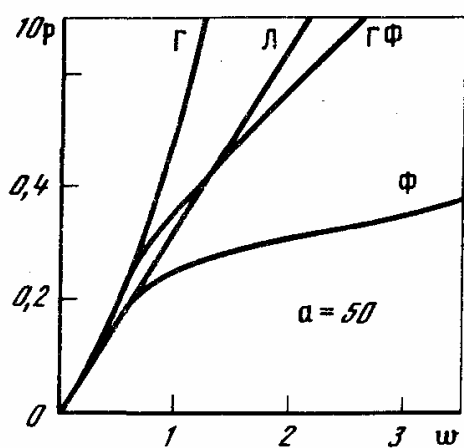


Рис. 5.10

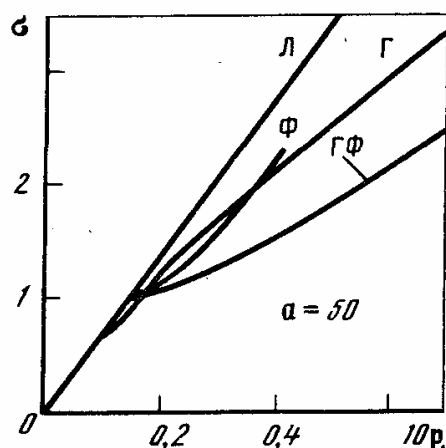


Рис. 5.11

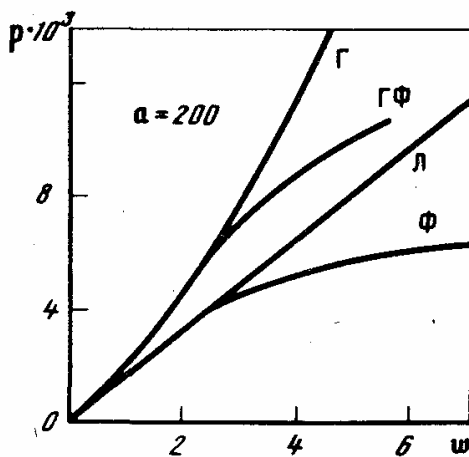


Рис. 5.12

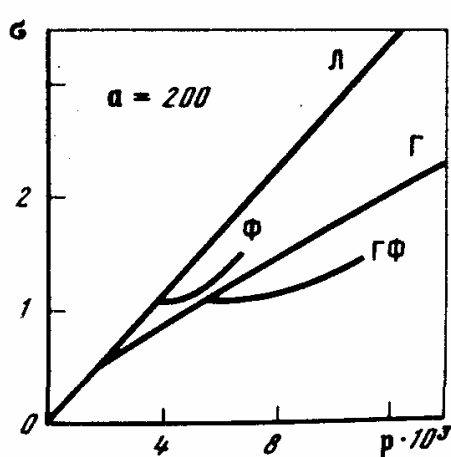


Рис. 5.13

По сравнению с  $\Lambda$ -задачей  $\Gamma$ -расчет увеличивает напряжения,  $\Phi$  — снижает,  $\Gamma\Phi$  — вначале снижает, затем завышает ( $a = 20$  и  $50$ ). Для более тонкой оболочки ( $a = 200$ )  $\Gamma\Phi$ -расчет дает напряжения более высокие, чем по  $\Lambda$ -расчету.

На рис. 5.10.—5.13 даны результаты вычислений для днища, находящегося под действием внутреннего равномерного давления, для значений  $a = 50$  и  $200$ . В этом случае для заданной нагрузки  $p$  по сравнению с  $\Lambda$ -расчетом  $\Gamma$ -расчет уменьшает прогиб,  $\Phi$ -расчет значительно увеличивает его значение.  $\Gamma\Phi$ -расчет вначале уменьшает, затем увеличивает параметр  $w$ , но прогиб оказывается значительно меньше его значений по  $\Phi$ -расчету.  $\Gamma$ - и  $\Phi$ -расчеты снижают напряжения. Таким образом, напряжения по  $\Gamma\Phi$ -расчету будут ниже значений, полученных не только по  $\Lambda$ -расчету, но и по  $\Phi$ -расчету. Независимо от вида давления в начальный период физической нелинейности ( $\sigma_i \approx 1,1 \sigma_s$ ) ближе по напряжениям к  $\Gamma\Phi$ -расчету для более толстой оболочки ( $a = 20, 50$ )  $\Phi$ -расчет, а для более тонкой ( $a = 200$ ) —  $\Gamma$ -расчет.

### 5.7. РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОБОЛОЧКИ СРЕДНЕЙ ТОЛЩИНЫ, ЗАМКНУТОЙ В ПОЛЮСЕ

В данном разделе описывается решение [33], полученное методами линеаризации и ортогональной прогонки, для осесимметричной задачи о больших прогибах нетонкой упругой и упругопластической оболочки вращения, замкнутой в полюсе. В упругом случае материал оболочки ортотропен. Основные соотношения задачи имеют вид (5.1.8)—(5.1.10), к ним нужно добавить граничные условия в полюсе (5.5.12) и предельные уравнения в полюсе (5.5.11).

Рассмотрим осесимметричную задачу о напряженно-деформированном состоянии эллипсоидальных оболочек вращения средней толщины, находящихся под действием внутреннего равномерного нормального давления (см. рис. 5.2). Характеристики упругого изотропного материала —  $E, \nu$ , упругого ортотропного материала —  $E_1, E_2, \nu_{12}, \nu_{21}, G_{13}$ . Для изотропного упруго-пластического материала имеет место закон линейного упрочнения (5.6.2).

Введены безразмерные параметры

$$\begin{aligned} p &= p(1 - \nu_{12}\nu_{21}) / (E_1 e_s), w = w / (h e_s), \sigma_{ik} = \sigma_{ik} (1 - \nu_{12}\nu_{21}) / (E_1 e_s), \\ 1/G_{13} &= E_1 [G_{13} (1 - \nu_{12}\nu_{21})], a = a/h, e = b/a. \end{aligned} \quad (5.7.1)$$

Опишем граничные условия. Граничные условия слева — условия в полюсе: соотношения (5.5.12); шарнирное закрепление у отверстия  $\theta_0 = 0,092$ :

$$M_{11} = u = w = v = 0; \quad (5.7.2)$$

жесткая заделка у отверстия  $\theta_0 = 0,092$ :

$$u = w = \vartheta_1 = v = 0. \quad (5.7.3)$$

Граничные условия справа (на экваторе оболочки  $\theta_N = \pi/2$ ) — ус-

ловия симметрии:

$$Q_1^H = u = \vartheta_1 = 0, \quad v = C; \quad (5.7.4)$$

шарнирное закрепление:

$$M_{11} = u = w = 0, \quad v = C; \quad (5.7.5)$$

жесткая заделка:

$$u = w = \vartheta_1 = 0, \quad v = C. \quad (5.7.6)$$

Результаты вычислений приведены на рисунках и в таблицах, где буквы означают: П — полюс, Э — экватор, С — место сопряжения, О — отверстие, М — наибольшее значение, Л — линейное решение, Н — геометрически и физически нелинейное решение. Параметр  $m = 1$  учитывает изменение метрики,  $m = 0$  — отсутствие этого учета. Параметр  $1/G_{13}$  учитывает деформацию поперечного сдвига, значение  $1/G_{13} = 0$  соответствует теории Кирхгофа—Лява, а равное 2,857 — изотропному материалу при  $\nu = 0,3$ . В таблицах приведена также относительная разница  $\Delta w, \Delta \sigma$  (в %) значений прогиба и напряжений, полученных по теории оболочек средней толщины (ТС), когда  $m = 1, 1/G_{13} \neq 0$ , и теории тонких оболочек (ТТ), когда  $m = 0, 1/G_{13} = 0$ .

а. Малые прогибы упругой трансверсально-изотропной сплюснутой оболочки:  $e = 0,5, E_1 = E_2, \nu_{12} = \nu_{21} = 0,3$ , граничные условия (5.5.12), (5.7.4). Результаты приведены в табл. 5.1,а. Видно, что величины  $\Delta w, \Delta \sigma$  возрастают с ростом податливости материала на сдвиг и толщины оболочки. Особенно этот рост наблюдается в области экватора — месте сильной искривленности сплюснутого эллипсоида. Отметим, что в случае изотропного материала ( $m = 1, 1/G_{13} = 2,857$ ) разница между теориями ТС и ТТ заметно проявляется только для довольно толстых оболочек ( $a = 5$ ).

б. Малые прогибы упругого трансверсально-изотропного сплюснутого эллипсоидального сегмента с шарнирно-закрепленными краями:  $e = 0,5, E_1 = E_2, \nu_{12} = \nu_{21} = 0,3$ , граничные условия (5.7.2) и (5.7.5). Из табл. 5.1,б видно, что в такой оболочке разница между результатами расчетов по ТС и ТТ теориям увеличивается по сравнению с оболочкой а.

в. Малые прогибы упругого трансверсально-изотропного вытянутого эллипсоида:  $e = 4, E_1 = E_2, \nu_{12} = \nu_{21} = 0,3$ , граничные условия (5.5.12), (5.7.4) (см. табл. 5.1,в). Как показали вычисления и как следует из табл. 5.1, вытянутый эллипсоид, даже довольно толстый ( $a = 5$ ), на значительной части меридиана работает почти как безмоментная оболочка. Этим объясняется, что в области экватора напряжения и прогибы не зависят от упругих свойств материала. Картина меняется в полюсе оболочки и его окрестности — месте наибольшей искривленности вытянутого эллипсоида.

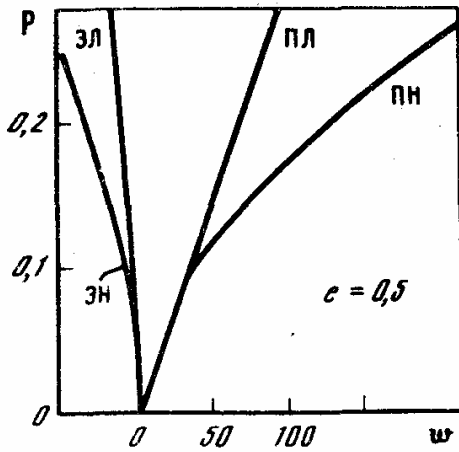
г. Малые прогибы упругого сплюснутого ( $e = 0,5$ ) эллипсоида, составленного из изотропного и ортотропного материалов. При  $0,111 \leq \theta \leq \pi/2$  материал ортотропный с характеристиками  $E_1, E_2, \nu_{12}, \nu_{21}$ ,

		<i>m</i>	0	1			0	1		
		$1/G_{13}$	0	2,86	10	100	0	2,86	10	100
а	<i>w/p</i>	П	338	332	332	335	60,4	58,5	61,8	77,1
		Э	-79,8	-82,6	-85,4	-104	-10,5	-12,5	-14,7	-25,0
	$\Delta w$	П		-1,8	-1,8	-0,9		-3,2	2,3	22,0
		Э		3,3	6,5	23,0		16,2	28,6	58,0
	$\sigma_{11}/p$	П	15,2	14,2	14,0	12,2	8,23	7,06	6,72	5,11
		Э	14,1	16,2	15,6	11,4	7,83	10,7	9,85	5,93
	П		-7,0	-8,6	-24,6		-16,6	-22,5	-61,1	
	$\Delta\sigma$	Э		13,0	9,6	-23,7		26,8	20,5	-32,0
б	<i>w/p</i>	М	94,6	93,2	102,7	171,3	13,9	13,1	16,6	39,3
	$\Delta w$	М		-1,5	7,9	44,8		-6,1	16,3	64,6
	$\sigma_{22}/p$	О	14,7	13,9	13,0	6,96	7,26	5,97	4,93	1,77
	$\Delta\sigma$	О		-5,8	-13,1	-110		-21,6	-47,3	-3993
в	<i>w/p</i>	П	51,7	37,5	37,2	37,1	13,3	6,50	6,36	6,20
		Э	90,0	86,1	86,1	86,1	22,5	20,5	20,5	20,5
	$\Delta w$	П		-38,1	-39,1	-39,5		-104	-109	-115
		Э		-4,5	-4,5	-4,5		-9,5	-9,5	-9,5
	$\sigma_{22}/p$	П	2,80	2,58	2,34	1,49	1,82	1,71	1,39	0,53
		Э	9,70	9,63	9,63	9,63	4,86	4,79	4,79	4,79
$\Delta\sigma$	П		-8,7	-20	-88		-6,4	-31	-241	
	Э		-0,7	-0,7	-0,7		-1,5	-1,5	-1,5	
г	<i>w/p</i>	П	234		237	1,3*	39,3		43,2	9,0*
		С	211		210	0,5*	36,6		39,2	6,6*
		Э	-29,8		-30,5	2,3*	-5,02		-6,24	19,6*
	$\sigma_{22}/p$	П	10,9		9,93	-9,8*	4,22		3,46	-22,0*
		С	28,0		25,1	-11,6*	11,8		9,37	-25,9*
		Э	-10,5		-10,3	-1,9*	-4,23		-4,29	1,40*

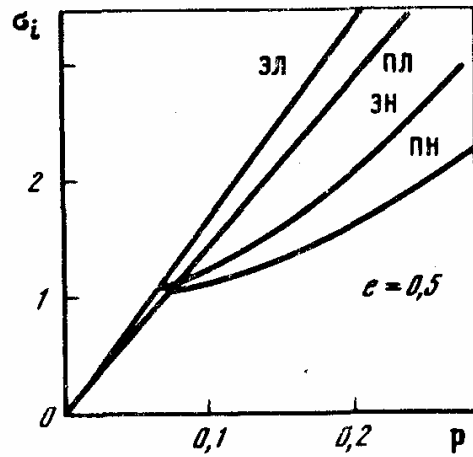
\*Для  $\Delta w$ ,  $\Delta\sigma$ .

$E_2/E_1 = 4$ ,  $\nu_{12} = 0,6$ ; при  $0 \leq \theta \leq 0,111$  изотропный с характеристиками  $E = E_1$ ,  $\nu = \sqrt{\nu_{12}\nu_{21}} = 0,3$ . Граничные условия (5.5.12), (5.7.4); в месте сопряжения ( $\theta = 0,111$ ) — условия сопряжения вектора неизвестных:  $Y_i = Y_{i+1}$  ( $i$  — номер узла сопряжения) (см. табл. 5.1, г). Видно, что в составной оболочке в месте сопряжения возникает значительная концентрация напряжений.

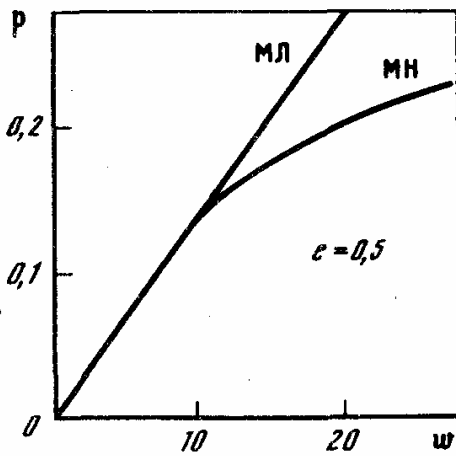
д. Большие прогибы упругопластического изотропного сплюснутого эллипсоида:  $e = 0,5$ ;  $a = 10$ ;  $E_1 = E_2$ ;  $\nu_{12} = \nu_{21} = 0,3$ ;  $1/G_{13} = 2,857$ ;  $\lambda = 0,9$ ;  $e_s = 0,005$ , граничные условия (5.5.12), (5.7.4). Результаты вычислений приведены на рис. 5.14, 5.15. В табл. 5.2, д показана разница между результатами расчетов по ТС и ТТ теориям в зависимости от значений параметра давления.



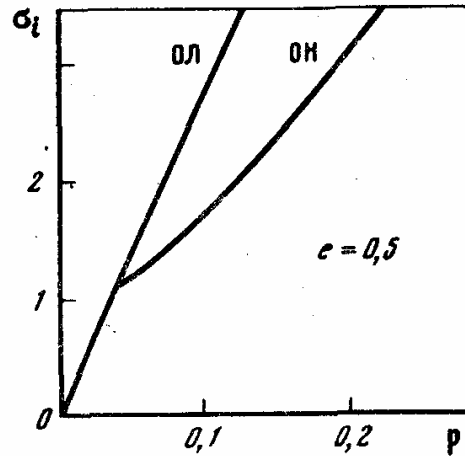
Р и с. 5.14.



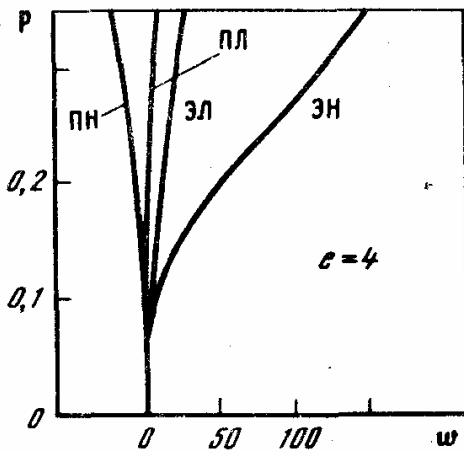
Р и с. 5.15



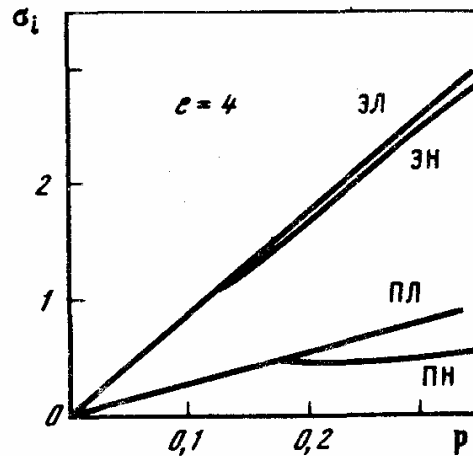
Р и с. 5.16



Р и с. 5.17



Р и с. 5.18



Р и с. 5.19

е. Большие прогибы упругопластического изотропного сплюснутого эллипсоидального сегмента с жестко заделанными краями:  $e = 0,5$ ;  $a = 10$ ;  $E_1 = E_2$ ;  $\nu_{12} = \nu_{21} = 0,3$ ;  $1/G_{13} = 2,857$ ;  $\lambda = 0,9$ ;  $e_s = 0,005$ ; граничные условия (5.7.3), (5.7.6). Результаты вычислений приведены на рис. 5.16, 5.17 и табл. 5.2,е.



Таблица 5.2

д			е			ж		
р	$\Delta w_3$	$\Delta \sigma_3$	р	$\Delta w_M$	$\Delta \sigma_0$	р	$\Delta w_{II}$	$\Delta \sigma_{II}$
0,050	3,8	11,7	0,050	-0,3	-5,8	0,050	-38,2	-8,7
0,075	4,8	2,1	0,075	-0,8	-7,0	0,100	-38,2	-8,7
0,150	3,2	7,3	0,100	-0,8	-6,9	0,250	173	-20,3
0,250	7,6	5,5	0,150	-3,5	-9,7	0,300	110	-27,4
0,375	10,6	14,9	0,200	-8,5	-13,6	0,500	71,8	-28,7

Таблица 5.3

$\theta$		0			0,5902			0,5\pi		
$z/h$		-0,5	0	0,5	-0,5	0	0,5	-0,5	0	0,5
ТС	$\sigma_{11}/p$	3,373	2,072	1,167	3,075	2,209	1,545	3,312	3,297	3,299
	$\sigma_{22}/p$	3,373	2,072	1,167	3,568	2,516	1,740	5,797	5,360	5,000
	$w/p$	—	9,590	—	—	10,68	—	—	26,68	—
ТТ	$\sigma_{11}/p$	2,326	1,518	0,709	2,148	1,657	1,166	2,610	2,778	2,945
	$\sigma_{22}/p$	2,326	1,518	0,709	2,543	1,974	1,406	4,807	4,858	4,908
	$w/p$	4,797	4,797	4,797	6,552	6,552	6,552	24,57	24,57	24,57
[31]	$\sigma_{11}/p$	1,389	1,389	1,389	—	—	—	2,778	2,778	2,778
	$\sigma_{22}/p$	1,389	1,389	1,389	—	—	—	4,861	4,861	4,861
	$w/p$	3,973	3,973	3,973	—	—	—	24,59	24,59	24,59

ж. Большие прогибы упругопластического изотропного вытянутого эллипсоида:  $e = 4$ ;  $a = 10$ ;  $E_1 = E_2$ ;  $\nu_{12} = \nu_{21} = 0,3$ ;  $1/G_{13} = 2,857$ ;  $\lambda = 0,9$ ,  $e_s = 0,005$ , граничные условия (5.5.12), (5.7.4). Результаты вычислений приведены на рис. 5.18, 5.19 и табл. 5.2, ж.

В рассмотренных нелинейных задачах с нарастанием нагрузки наблюдается рост относительной разницы расчетов по ТС и ТТ теориям. Нелинейность в результатах проявляется при малых прогибах ( $w \sim 0,1h$ ). Напряжения по нелинейному расчету значительно ниже напряжений по линейному расчету, за исключением вытянутого эллипсоида (см. рис. 5.19), в котором, как уже отмечалось, значительная часть его работает как безмоментная оболочка. Здесь напряженное состояние в области экватора мало зависит от свойств материала, в том числе от коэффициента упрочнения.

з. Малые прогибы упругого изотропного вытянутого эллипсоида, находящегося под действием внешнего равномерного давления, с параметрами  $e = 2$ ;  $h/a = 0,18$ ;  $E_1 = E_2$ ;  $\nu_{12} = \nu_{21} = 0,3$ ; граничные условия (5.5.12), (5.7.4). Результаты вычислений приведены в табл. 5.3, в которой сравниваются данные по теории оболочек средней толщины ТС, теории тонких оболочек ТТ и безмоментному решению [31] (см. разд. 7.2).

В пределах точности графиков данные ТС табл. 5.3 совпадают с результатами [63], полученными методом конечных элементов из трехмерных уравнений теории упругости.

### 5.8. НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ; ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ БИФУРКАЦИЯ

При решении нелинейной задачи о больших прогибах тонкой упругой непологой оболочки вращения, замкнутой в полюсе, находящейся под действием равномерного внешнего давления, может наблюдаться неединственность решения. Тогда от осесимметричного решения  $OABC$  в некоторой точке  $A_1$  ответвляется еще одно осесимметричное решение  $OA_1B_1$  (см рис. 5.1).

Пусть  $Y$  и  $Y^* = Y + \delta Y$  — смежные решения краевой задачи (5.1.8)—(5.1.10), отличающиеся на вектор вариации осесимметричного решения  $\delta Y$ . Вектор  $\delta Y$  удовлетворяет соотношениям, которые получаются из равенства нулю первой вариации уравнений (5.1.8)—(5.1.10):

$$\frac{d\delta Y}{ds} = (A(s) + \frac{df}{dY}(s, Y))\delta Y, \quad (5.8.1)$$

$$B\delta Y = 0 \text{ при } s = s_0, \quad D\delta Y = 0 \text{ при } s = s_N.$$

Формулы (5.8.1) записаны с учетом обозначений в (5.3.2), (5.3.3). Если для каких-то значений параметров система (5.8.1) имеет нетривиальное решение  $\delta Y \neq 0$ , то наблюдается осесимметричная бифуркация решения при параметре нагрузки  $p_0$ , который представляет собой наименьшее собственное значение однородной краевой задачи (5.8.1).

Обратимся к формулам метода линеаризации (5.3.1)—(5.3.3), которые представляют собой линейную неоднородную краевую задачу для  $Y^{(k+1)}$ . Запишем соответствующую (5.3.1)—(5.3.3) однородную краевую задачу:

$$\frac{dY_0^{(k+1)}}{ds} = \left( A(s) + \frac{df}{dY}(s, Y^{(k)}) \right) Y_0^{(k+1)}, \quad (5.8.2)$$

$$BY_0^{(k+1)} = 0 \text{ при } s = s_0, \quad DY_0^{(k+1)} = 0 \text{ при } s = s_N.$$

Из сравнения (5.8.1) и (5.8.2) видно, что вектор  $\delta Y$  совпадает с решением  $Y_0^{(k+1)}$  однородной краевой задачи (5.8.2). При применении ортогональной прогонки к уравнениям метода линеаризации (5.3.1)—(5.3.3) подсчитывается фундаментальная система однородных решений  $Z_j$ ,  $j = \overline{1,4}$ , задачи (5.3.1)—(5.3.3), которая совпадает с фундаментальной системой однородных решений задачи (5.8.2).

Векторы  $Z_j^{(N)}$ ,  $j = \overline{1,4}$ , на правом краю интервала участвуют при подсчете матрицы  $M_0^{(N)}$  системы (5.3.12), из которой определяются коэффициенты  $\beta_j^{(N)}$ ,  $j = \overline{1,4}$ . Пусть  $\Delta_0^{(N)}$  — нормализованное значение определителя матрицы  $M_0^{(N)}$ . Из формул обратного хода ортогональной прогонки (5.3.11)—(5.3.14) видно, что он может быть выполнен при

условии невырожденности матрицы  $M_0^{(N)}$ , когда ее определитель

$$\Delta_0^{(N)} \neq 0. \quad (5.8.3)$$

С другой стороны, (5.8.3) представляет собой условие того, что  $Y_0^{(k+1)} = \delta Y \equiv 0$ . При

$$\Delta_0^{(N)} = 0 \quad (5.8.4)$$

получим, что  $Y_0^{(k+1)} = \delta Y \neq 0$ , а система (5.3.12) плохо обусловлена.

Алгоритм включает наблюдение за поведением определителя  $\Delta_0^{(N)}$ .

При  $|\Delta_0^{(N)}| \ll 1$  на всем протяжении решения задачи может быть, что число разбиений  $N$  недостаточно в методе ортогональной прогонки, векторы  $Z_j^{(N)}$ ,  $j = \overline{1,4}$ , сплющились и стали почти линейно зависимыми.

При  $|\Delta_0^{(N)}| \sim 1$  и отсутствии смены знака у  $\Delta_0^{(N)}$  счет устойчив:  $N$  выбрано достаточным и нет точки осесимметричной бифуркации  $p_0$ . При  $|\Delta_0^{(N)}| \sim 1$  и наличии смены знака у  $\Delta_0^{(N)}$  имеем случай осесим-

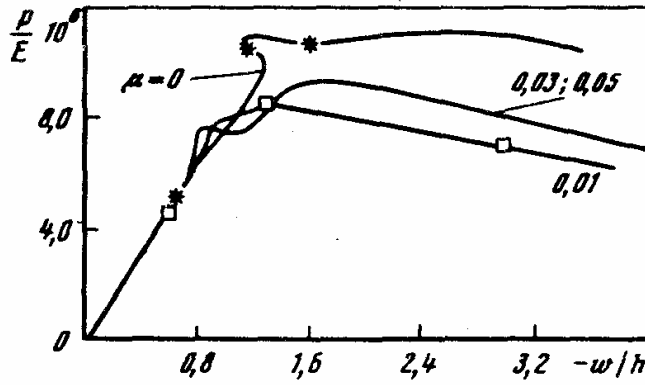
метричной бифуркации решения в точке  $A_1$  (см. рис. 5.1).

При вычислениях в силу плохой обусловленности системы (5.3.12) в окрестности точки  $A_1$  обычно наблюдается несходимость процесса, когда численное решение "мечется" между двумя ветками. Процессу последовательных приближений можно помочь выбрать ветку  $OA_1B_1$ , внося малое осесимметричное возмущение в задачу. Довольно просто внести возмущение в нагрузку. Для продолжения решения по ветке  $OABC$  необходимо избежать окрестности точки  $A_1$ , изменив начальное значение и величину шага ведущего параметра.

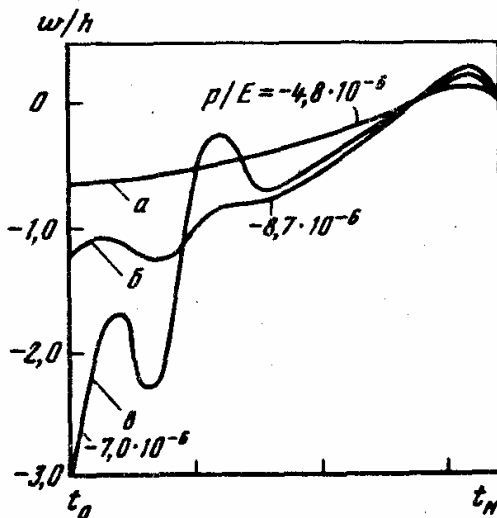
Рассмотрим эллипсоидальное днище постоянной толщины  $h$ , замкнутое в полюсе, находящееся под действием равномерного внешнего давления [39]. Контур днища  $\theta_N = \pi/2$  шарнирно закреплен, граничные условия задачи будут (5.5.10), (5.7.5). Приведем результаты вычислений для оболочки с параметрами  $a/h = 200$ ,  $b/a = 0,5$ ,  $\nu = 0,3$ . При расчетах вносилось осесимметричное возмущение  $\Delta f_3(s)$  в функцию распределения нагрузки:

$$\Delta f_3(s) = \begin{cases} 0, s_0 + 0,1(s_N - s_0) \leq s \leq s_N, \\ \mu f_3, s_0 \leq s \leq s_0 + 0,1(s - s_0), 0 \leq \mu \ll 1. \end{cases}$$

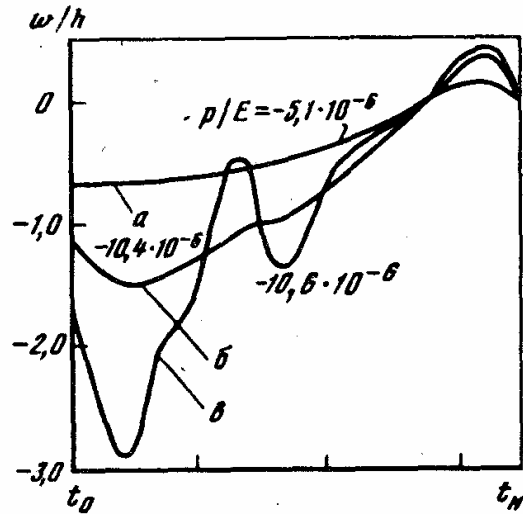
Результаты вычислений приведены на рис. 5.20—5.22. Как видно на рис. 5.20, кривые для указанных значений параметра  $\mu$  до  $p/E \approx -7 \times 10^{-6}$  совпадают, а затем расходятся. Рис. 5.20 отражает неединственность решения нелинейной краевой задачи. Значение параметра



Р и с. 5.20



Р и с. 5.21

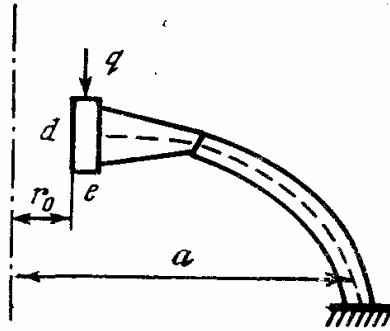


Р и с. 5.22

нагрузки  $p/E \approx -7 \cdot 10^{-6}$  соответствует точке осесимметричной бифуркации. На рис. 5.21 приведены эпюры прогиба  $w$  для ряда значений параметра нагрузки, отмеченных на рис. 5.20 квадратиками, а на рис. 5.22 — для значений  $p$ , отмеченных крестиками. При сравнении рис. 5.21, 5.22 видно, что в начале процесса графики совпадают (кривые а), а затем симметричное волнообразование на рис. 5.21 начинается при значительно меньших значениях  $p/E$ , чем рис. 5.22 (кривые б).

### 5.9. БОЛЬШИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ПРОГИБЫ И УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ТОНКОЙ ЭЛЛИпсоИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Рассматривается осесимметричная задача о больших прогибах и устойчивости упругопластического эллипсоидального днища переменной толщины, ослабленного центральным отверстием радиуса  $r_0$  [42]. На кольцо, подкрепляющее отверстие, действует внешняя вертикальная нагрузка  $Q = 2\pi r_0 q$ ,  $q$  — нагрузка на единицу длины окружности кольца (рис. 5.23). Приняты гипотеза Кирхгофа—Лява и соотношения геометрически нелинейной теории среднего изгиба обо-



Р и с. 5.23

лочек [88]. Допускаются малые упругопластические деформации [67], разгрузка не учитывается. Материал оболочки однороден, изотропен и сжимаем, следует закону линейного упрочнения (5.6.2). Распределение материала относительно поверхности приведения (ПП) может быть несимметричным. Данная задача для оболочек постоянной толщины была рассмотрена в работе [36].

Уравнениями задачи будут (3.2.14), (5.1.6), где  $h(s) = h_0\psi(s)$ . Граничные условия, когда они поставлены на контуре ПП, будут следующие. У отверстия  $s = s_0$  — условия сопряжения края отверстия оболочки с плоским упругим кольцом, на которое действует внешняя вертикальная нагрузка:

$$\alpha(T_{11}^n \cos \theta + Q_1^n \sin \theta) = u \cos \theta + w \sin \theta, \beta M_{11} = \vartheta_1, v = 0, \quad (5.9.1)$$

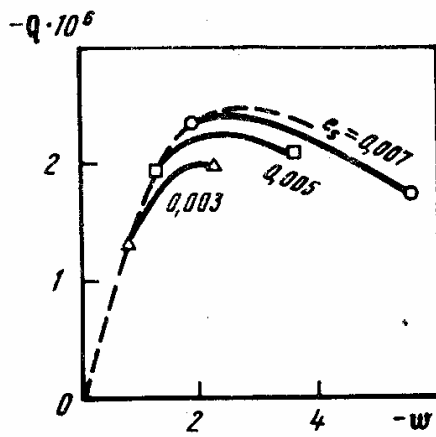
$$T_{11}^n \sin \theta - Q_1^n \cos \theta = Q/(2\pi r_0); \alpha = r_0^2/(E_k F_k), \beta = r_0^2/(E_k J_k),$$

где  $E_k$  — модуль упругости материала кольца,  $F_k$  — площадь поперечного сечения кольца,  $J_k$  — момент инерции поперечного сечения кольца относительно оси, перпендикулярной оси вращения [100]. У основания  $s = s_N$  — условия жесткой заделки (5.7.6). Нелинейная краевая задача (3.2.14), (5.1.6), (5.9.1), (5.7.6) решается методом продолжения по параметру интегрального прогиба (5.1.5) с использованием последовательных приближений (5.2.5) и ортогональной прогонки (см. разд. 5.3).

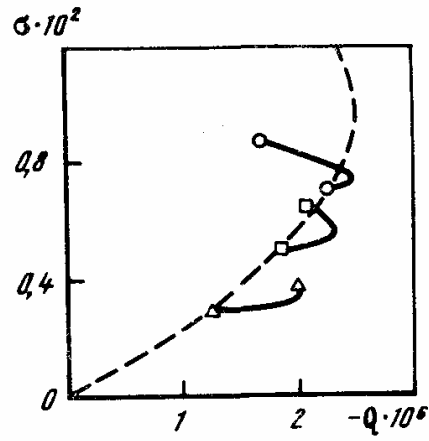
Проведены вычисления для сплюснутого эллипсоидального днища с отношением полуосей  $b/a = 0,5$ , центральным отверстием радиуса  $r_0 = 0,25a$  и основанием радиуса  $a$ . Поперечное сечение кольца, подкрепляющего отверстие, представляет прямоугольник со сторонами  $d = a/20$ ,  $e = a/40$  ( $e$  — сторона, перпендикулярная оси вращения). Днище и кольцо изготовлены из одного материала.

Функция толщины, используемая в расчетах (утолщение вблизи кольца), имеет вид

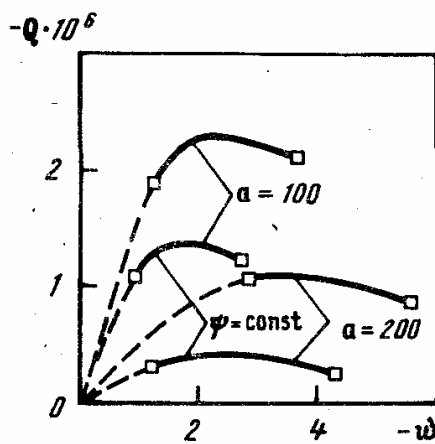
$$\psi(s) = \begin{cases} 1 + (\psi_0 - 1) \frac{s - s^*}{s_0 - s^*} & \text{при } s < s^*, \\ 1 & \text{при } s \geq s^*, \end{cases} \quad (5.9.2)$$



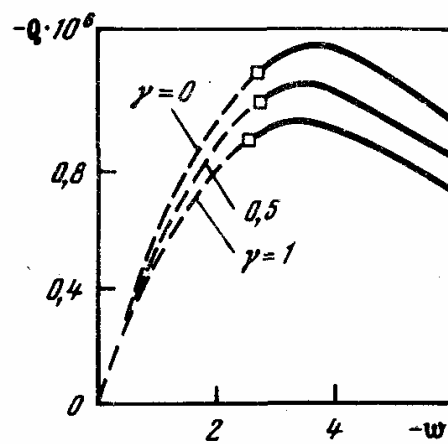
Р и с. 5.24



Р и с. 5.25



Р и с. 5.26

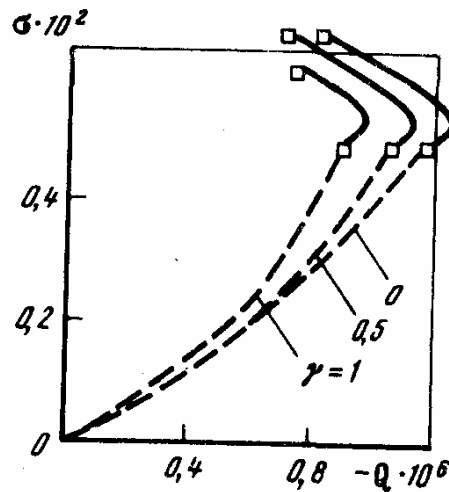


Р и с. 5.27

где  $\psi_0 = \psi(s_0)$  — задаваемый параметр. При вычислениях было положено:  $\nu = 0,3$ ;  $\lambda = 0,9$ ;  $s^* = s_0 + (s_N - s_0)/4$ ;  $h_0 = h(s^*)$ . Расчеты проводились для значений  $a = a/h_0 = 100, 200$ ;  $\gamma = 0; 0,5; 1$ ;  $e_s = 0,003; 0,005; 0,007$ ;  $\psi_0 = 2,5$  при  $a = 100$ ,  $\psi_0 = 3$  при  $a = 200$ .

Результаты вычислений приведены на рис. 5.24—5.28. Изображены зависимости  $Q(w)$ ,  $\sigma(Q)$ , где обозначено  $Q = Q/(4\pi Ga^2)$ ,  $w = w/h_0$ ,  $\sigma = \sigma/(3G)$ . Под  $w$ ,  $\sigma$  следует понимать максимальные значения прогиба и интенсивности напряжений. Максимальный прогиб наблюдается у отверстия, а наибольшая интенсивность напряжений — либо у отверстия, либо в сечении  $s = s^*$ . Штриховыми линиями изображены кривые на стадии упругого деформирования, сплошными — при упругопластическом деформировании. Появление пластических зон отмечено значками для материалов с пределом текучести  $e_s = 0,003; 0,005; 0,007$  соответственно. Конец сплошной линии также отмечен значком, говорящим о выполнении условий окончания процесса вычислений, записанных в виде ограничения на значения угла поворота нормали и интенсивности напряжений.

На рис. 5.24, 5.25 показано влияние предела текучести  $e_s$  на процесс деформирования оболочки с параметрами  $a = 100$ ;  $\gamma = 0,5$ . Рис. 5.26 иллюстрирует влияние параметра  $a$  и функции  $\psi(s)$  при  $\gamma = 0,5$ ;  $e_s =$



Р и с. 5.28

$=0,005$ . Приведены кривые  $Q(w)$  для оболочек постоянной толщины ( $\psi \equiv 1,09$  при  $a = 100$ ,  $\psi \equiv 1,12$  при  $a = 200$ ) с объемом материала, равным объему материала в оболочках переменной толщины. На рис. 5.27, 5.28 показано влияние параметра  $\gamma$  при  $a = 200$ ,  $e_s = 0,005$ .

Из результатов вычислений видно, что влияние физической нелинейности (параметра  $e_s$ ) на величину верхней критической нагрузки  $Q_{кр}$  заметнее в более толстой оболочке ( $a = 100$ ), когда пластические деформации могут наблюдаться задолго до  $Q_{кр}$  и значительно снижать ее величину. В оболочке с параметром  $a = 200$  это влияние невелико.

Величина  $Q_{кр}$  значительно зависит как от параметра  $a$ , так и от функции толщины  $\psi(s)$ . В оболочке переменной толщины при  $a = 100$  значение  $Q_{кр}$  в 1,6—1,8 раза, а при  $a = 200$  — в 2,1—2,8 раза больше, чем в оболочках постоянной толщины того же объема материала.

Вычисления, проведенные при различных значениях параметра  $\gamma$ , показали, что разница в значениях  $Q_{кр}$  составляет 10—13% для  $a = 200$  и 5—7% для  $a = 100$  от величины  $Q_{кр}$  для  $\gamma = 0,5$ . Максимальное значение  $Q_{кр}$  наблюдается при  $\gamma = 0$ .

## НЕОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

### 6.1. АЛГОРИТМЫ РАСЧЕТА НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПРОГОНКИ

В этой главе приводятся результаты численного исследования неосесимметричной потери устойчивости (НПУ) непологих оболочек вращения. Хорошо известно, что с нарастанием нагрузки процесс деформирования оболочечных элементов описывается нелинейными дифференциальными уравнениями. Вместе с краевыми условиями они формируют нелинейную краевую задачу. Количество решений этой нелинейной задачи, вообще говоря, неизвестно: во всяком случае, оно единственно на начальной стадии деформирования, когда участок диаграммы характерных величин нагрузка — перемещения линейный или отличается относительно слабой нелинейностью (см. рис. 5.1), и неединственно начиная с некоторой точки на этой диаграмме — первой точки бифуркации (ветвления) решения.

По данным работы [18], при  $h/R \rightarrow 0$  число форм равновесия  $M$  замкнутой упругой выпуклой оболочки стремится к  $\infty$ :

$$M \sim A (p/E)^{0,5} (h/R)^{-1,5}, \quad (6.1.1)$$

где коэффициент  $A$  зависит от формы оболочки (но не от размеров) и коэффициента Пуассона ее материала.

Особенность численного решения в отличие от аналитического — возможность получения из множества решений лишь какой-то одной ветви, обычно невозмущенного решения. Издавна применяемый в механике способ нахождения точки бифуркации решения — внесение малого возмущения [112] или в геометрию оболочки, или в нагрузку, или в само решение (например, в перемещения). В зависимости от вида возмущения можно получить точку бифуркации двух осесимметричных решений, точку бифуркации неосесимметричного решения от осесимметричного и т.д. Случай осесимметричной бифуркации решения в непологих оболочках описан в разд. 5.8. Здесь разработан алгоритм нахождения наименьшей нагрузки, при которой от осесимметричного решения ответвляется неосесимметричное. В дальнейшем эта нагрузка называется критической нагрузкой неосесимметричной потери устойчивости, условно — неосесимметричной критической нагрузкой (НКН).

Принято, что докритическое состояние оболочки — осесимметричное, моментное, геометрически и физически нелинейное. Описывается каноническими системами для определения напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочек вращения средней толщины (см. гл. 3). Численно решение этих систем находится методами линеаризации и ортогональной прогонки (см. гл. 5).

Соответствующие докритическому состоянию уравнения нейтрального равновесия и граничные условия (линеаризованные уравнения



устойчивости) получены в виде канонических систем и приведены в гл. 4. Уравнения устойчивости интегрируются численно методом ортогональной прогонки. Собственные значения (неосесимметричная критическая нагрузка) находятся из условия равенства нулю нормализованного определителя устойчивости  $\Delta_k$ . Определитель устойчивости  $\Delta_k$  подсчитывается при удовлетворении однородных граничных условий на правом краю оболочки, если прямая прогонка ведется слева направо. На самом деле, при численном интегрировании для заданного числа волн  $k$  ищется такой параметр нагрузки  $p_k$ , который дает первую смену знака определителю  $\Delta_k$ . За критическую нагрузку принимается  $p_j = \min_k p_k, k = i$  — соответствующее  $p_i$  число волн в направлении параллели при неосесимметричной потере устойчивости.

Далее представлено краткое описание алгоритма расчета больших прогибов и неосесимметричной потери устойчивости нетонкой оболочки вращения.

1. Ввод данных о геометрии оболочки, материале, граничных условиях, толщине, нагрузке, выборе ведущего параметра, интервале поиска неосесимметричной критической нагрузки, критерии окончания решения задачи.
2. Подготовка массивов кривизн, толщины, нагрузки.
3. Подготовка массивов жесткостей  $D_{m,n}$  (см. табл. 1.1).
4. Подготовка граничных условий к использованию в методе ортогональной прогонки.
5. Задание текущего значения ведущего параметра  $Q_i = Q_{i-1} + \Delta Q$ .
6. Организация массивов нулевого приближения для разрешающих функций и нелинейных членов.
7. Решение нелинейной краевой задачи (5.1.8)—(5.1.10) для определения НДС оболочки в основном состоянии методом линеаризации (см. разд. 5.2) и ортогональной прогонки (см. разд. 5.3). Печать результатов при  $Q = Q_i$ .
8. Передача массивов, характеризующих НДС основного состояния, в подпрограмму интегрирования уравнений нейтрального равновесия (4.3.9).
9. Прямой ход слева направо метода ортогональной прогонки (см. разд. 5.3) для уравнений (4.3.9). Получение системы векторов  $Z_j, j = 1, 5$  на правом краю оболочки для выбранного интервала изменения параметра волнообразования  $k = \overline{k_0, k_M}$  и  $Q = Q_i$ .
10. Счет нормализованного определителя устойчивости  $\Delta_k^{(i)}$  пятого порядка при удовлетворении правых граничных условий для уравнений (4.3.9). Печать  $p_i, \Delta_k^{(i)}, k = \overline{k_0, k_M}$ .
11. Повторение цикла 5—10. Переход к п.12 после выполнения критерия окончания задачи.
12. Нахождение неосесимметричной критической нагрузки на основе анализа таблицы значений  $\Delta_k^{(i)}, i = \overline{i_0, i_M}, k = \overline{k_0, k_M}$ .
13. Конец задачи.

Изложенный здесь алгоритм реализован в виде программы на языке ФОРТРАН ЕС ЭВМ. Возможности программы довольно обширны. Нет особых ограничений по виду нагружения, толщине, геометрии меридиана, материала оболочки, граничных условий. Основное ограничение — объем памяти ЭВМ, доступный при расчетах. Результаты решения задач приведены в разд. 6.4—6.6. Причем в разд. 6.4 дано решение для тонкой изотропной упругой оболочки по теории Кирхгофа—Лява; докритическое состояние описывается геометрически нелинейными уравнениями (3.2.15), соответствующие им уравнения нейтрального равновесия будут (4.4.17). В разд. 6.5, 6.6 рассмотрена неосесимметричная потеря устойчивости нетонкой и тонкой оболочек на основе уравнений (5.1.8), (4.3.9).

## 6.2. ОБОЛОЧКА ВРАЩЕНИЯ, ЗАМКНУТАЯ В ПОЛЮСЕ

Если оболочка замкнута в полюсе, то при численном решении полюс требует специальной обработки. Автором получены разложения разрешающих функций в окрестности полюса [34, 35] на основе способов нахождения решения системы линейных однородных дифференциальных уравнений с регулярной особой точкой с помощью бесконечных рядов [106].

Вопрос о поведении разрешающих функций в окрестности полюса для уравнений основного состояния (УОС) был рассмотрен ранее в разд. 5.5. Здесь остановимся на уравнениях нейтрального равновесия (УНР).

А. Каноническая система УНР восьмого порядка для тонкой изотропной упругой оболочки по теории Кирхгофа—Лява (4.4.17). Отметим, что входящие в уравнения (4.4.17) величины основного осесимметричного состояния  $\sigma^1$  суть величины в деформированных осях из системы (3.2.15). В малой окрестности полюса с погрешностью  $O(r^2)$   $\cos\theta \approx 1$ ,  $k_1 \approx k_2 \approx \text{const}$ . Выкладки выполнены в безразмерных величинах (5.5.1') для оболочек постоянной толщины под действием равномерно распределенной нагрузки ( $\psi = \text{const}$ ;  $\gamma = 0,5$ ;  $k \geq 3$ ;  $X_1, X_3$  — следящая нагрузка). При этом  $h_0$  — характерный линейный размер оболочки, тогда  $\psi = h/h_0 \ll 1$  — параметр тонкостенности.

Система (4.4.17) приводится к виду (5.5.1) с помощью неизвестных:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \delta v_{1,k}/\bar{r}, & Y_2 &= \delta v_{2,k}/\bar{r}, & Y_3 &= \delta T_{11,k}, & Y_4 &= \delta T_{12,k}, \\ Y_5 &= \delta w_{1,k}/\bar{r}^2, & Y_6 &= \delta \omega_{1,k}/r, & Y_7 &= r\delta Q_{1,k}^*, & Y_8 &= \delta M_{11,k}. \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

Вычисления, проведенные по программе [128], показали, что различные собственные значения  $\rho$  матрицы  $(b_{ik})$  из (5.5.2) системы (4.4.17) будут равны  $\pm k, \pm k - 2$ , независимо от параметров кривизны оболочки. Тогда возможно искать неизвестные  $Y_i$  в малой окрестности полюса в виде (при условии ограниченности основных неизвестных)

$$Y_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} r^{k-(3-j)} + O(r^{k+1}), \quad i = \overline{1,8}. \quad (6.2.2)$$

Чтобы определить коэффициенты  $a_{ij}$ , подставим разложения (6.2.2) в систему (4.4.17). Проведенные выкладки показали, что уравнения для всех коэффициентов  $a_{ij}$ , кроме  $a_{i3}$ ,  $i = \overline{1,4}$ , не зависят от параметров кривизны. Система же уравнений для  $a_{i3}$ ,  $i = \overline{1,4}$ , являющихся коэффициентами в неглавных членах формул (6.2.2), будет совместной лишь в том случае, если отбросить в ее правых частях члены, зависящие от параметров кривизны. Это обстоятельство объясняется тем, что УНР (4.4.17) были получены в предположении, что после потери устойчивости оболочка делится на пологие части. Это предположение особенно сильно отразилось на формулах для поворотов; например, было взято

$$\delta\omega_{1,k} = d\delta w_k/dt \text{ вместо } \delta\omega_{1,k} = d\delta w_k/dt - k_1\delta v_{1,k}.$$

Таким образом, в искомым разложениях (6.2.2) для пологих частей потерявшей устойчивость оболочки  $\rho$  — собственные значения матрицы  $(b_{ik})$  задачи о неосесимметричной деформации круглой пластинки, а за коэффициенты  $a_{ij}$  можно принять соответствующие им собственные функции [113].

Приведем полученные таким образом коэффициенты  $a_{ij}$ :

$$\begin{aligned} a_{i2} &= 0, i = \overline{1,8}; a_{11}, a_{13}, a_{51}, a_{53} - \text{произвольные константы задачи;} \\ a_{61} &= ka_{51}, a_{71} = k^2(k-1)\psi^2 a_{51}/12, a_{81} = -k(k-1)\psi^3 a_{51}/12; \\ a_{63} &= (k+2)a_{53}, a_{73} = a_{53}\psi^3(k^3(1-\nu) - k^2(3+\nu) - 4k)/[12(1-\nu)], \\ a_{83} &= \psi^3 a_{53}(\nu k^2 - (k+1+\nu)(k+2))/[12(1-\nu)]; \\ a_{21} &= -a_{11}, a_{31} = \psi a_{11}(k-1), a_{41} = \psi(1-k)a_{11}; a_{23} = a_{13} + 2a_{43}/(\psi k), \\ a_{33} &= (\psi a_{13}(1+k)(1+\nu) + 2\nu a_{43})/(1-\nu), \\ a_{43} &= k(1+k)(1+\nu)\psi a_{13}/[2(1-\nu) - k(1+\nu)]; k \geq 3. \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

Разложения в окрестности полюса для круглой пластинки [113] широко используются в задачах о пологих оболочках, когда за разрешающие приняты функции прогиба и напряжений [12].

Вычисления, проведенные по программе [128] для неосесимметричных уравнений равновесия тонкой непологой оболочки вращения [118], показали, что собственные значения матрицы  $(b_{ik})$  в этом случае комплексные:  $\rho = \alpha + i\beta$ . Однако вещественная часть их  $\alpha$  мало отличается от собственных значений задачи о пластинке, а именно  $\pm k, \pm k - 2$ , а мнимая часть  $\beta \ll \alpha$ . Например, при  $h/h_0 = 0,05$ ,  $k_1 = k_2 = 1$ ,  $k = 6$   $\rho = -8,004 \pm i 0,144$ ;  $6,004 \pm i 0,144$ ;  $-5,997 \pm i 0,103$ ;  $3,997 \pm i 0,103$ .

Таким образом, и для непологой оболочки вращения, если она тонкая, можно воспользоваться для получения разложений искомым величин в окрестности полюса собственными значениями задачи для круглой пластинки [113].

Б. Каноническая система УНР десятого порядка для нетонкой изотропной упругой оболочки с учетом деформации поперечного сдвига. Указанная система уравнений устойчивости получается из (4.3.9), а уравнения основного состояния — из (5.1.8), если в них отбросить упругопластические члены. Далее принято, что оболочка однослойная, изотропная ( $E_1 = E_2 = E$ ,  $\nu_{12} = \nu_{21} = \nu$ ), постоянной толщины симметричного строения ( $\gamma = 0,5$ ), находится под действием равномерно распределенной нагрузки,  $\psi = h/h_0 \ll 1$ ,  $k \geq 2$ ; в малой окрестности полюса  $\cos\theta \approx 1$ ,  $k_1 \approx k_2$ ,  $T_{12} \approx T_{21}$ ,  $M_{12} \approx M_{21}$ .

Введены безразмерные величины:

$$\begin{aligned} \psi &= h/h_0, z = z/h \quad (-0,5 \leq z \leq 0,5), t = s/h_0 \quad (t_0 \leq t \leq t_N), \\ w &= w/(h_0 e_s), u = u/(h_0 e_s), a = a/h_0, k_i = k_i h_0, \mathbf{R}_i = R_i/h_0, \\ \mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_1/(h_0 e_s), \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2/(h_0 e_s), \\ \mathbf{r} &= r/h_0, \mathbf{E}_{ik} = E_{ik}/e_s, \mathbf{\kappa}_{ik} = \kappa_{ik} h_0/e_s, \mathbf{\epsilon}_{ik} = \epsilon_{ik}/e_s, \mathbf{\sigma}_{ik} = \sigma_{ik}/(A e_s), \\ \mathfrak{D}_1 &= \mathfrak{D}_1/e_s, \mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_1/e_s, \mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_1/e_s, \mathbf{T}_{ik} = T_{ik}/(A h_0 e_s), \mathbf{Q}_1 = Q_1/(A h_0 e_s), \\ \mathbf{M}_{ik} &= M_{ik}/(A h_0^2 e_s), \mathbf{x}_i = X_i/(A e_s), \mathbf{p} = p/(A e_s), \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}/(h_0^2 e_s), A = E_1/(1 - \nu_{12}\nu_{21}), C/A = \nu_{12}, B/A = E_2/E_1, \\ G/A &= \mathbf{G} = (1 - \nu)/2, G_{12}/A = \mathbf{G}_{12}, G_{13}/A = \mathbf{G}_{13}, \\ G_{23}/A &= \mathbf{G}_{23}, E_2/A = \mathbf{E}_2, \mathbf{A} = 1 + T_{11}^{I,H}/(G_{13}h) = 1 + e_s \mathbf{T}_{11}^{I,H}/(\mathbf{G}_{13}\psi). \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

Система (4.3.9) приводится к виду (5.5.1) с помощью замены переменных:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \delta \mathbf{T}_{11,k}^H, Y_2 = \delta \mathbf{T}_{12,k}^H, Y_3 = \delta \mathbf{Q}_{1,k}^H, Y_4 = \delta \mathbf{M}_{11,k}, Y_5 = \delta \mathbf{M}_{12,k} \\ Y_6 &= \delta \mathbf{v}_{1,k}/r, Y_7 = \delta \mathbf{v}_{2,k}/r, Y_8 = \delta \mathbf{w}_k/r, Y_9 = \delta \mathfrak{D}_{1,k}/r, Y_{10} = \delta \mathfrak{D}_{1,k}/r. \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

Тогда матрица в полюсе ( $b_{ik}$ ) десятого порядка из (5.5.2) системы (4.3.9) имеет блочную структуру и состоит из трех диагональных блоков:  $D_1(4 \times 4)$  с собственными значениями  $\pm k, \pm k-2$ ;  $D_2(4 \times 4)$  с собственными значениями  $\pm k, \pm k-2$ ;  $D_3(2 \times 2)$  с собственными значениями  $\pm k-1$ . При этом матрица  $D_1$  соответствует задаче растяжения:  $\delta \mathbf{T}_{11,k}^H, \delta \mathbf{T}_{12,k}^H, \delta \mathbf{v}_{1,k}, \delta \mathbf{v}_{2,k}(p)$ , матрица  $D_2$  — задаче изгиба:  $\delta \mathbf{M}_{11,k}, \delta \mathbf{M}_{12,k}, \delta \mathfrak{D}_{I,k}, \delta \mathfrak{D}_{II,k}(u)$ , матрица  $D_3$  — задаче нормального перемещения:  $\delta \mathbf{w}_k, \delta \mathbf{Q}_{1,k}^H(n)$ . Отметим, что матрицы ( $b_{ik}$ ) для тонкой и нетонкой оболочек совпадают и не зависят от параметров кривизны оболочки.

Располагая собственными значениями матриц  $D_1, D_2, D_3$  и рассматривая задачи (p), (u), (n) независимо друг от друга, запишем искомые разложения разрешающих функций в малой окрестности по-

люса (при условии их ограниченности) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \delta \mathbf{T}_{11,k}^n &= a_{11} \mathbf{r}^k + a_{12} \mathbf{r}^{k-2}, & \delta \mathbf{M}_{11,k} &= b_{11} \mathbf{r}^5 + b_{12} \mathbf{r}^{k-2}, \\
 \delta \mathbf{T}_{12,k}^n &= a_{21} \mathbf{r}^k + a_{22} \mathbf{r}^{k-2}, & \delta \mathbf{M}_{12,k} &= b_{21} \mathbf{r}^k + b_{22} \mathbf{r}^{k-2}, \\
 \delta \mathbf{v}_{1,k} &= a_{31} \mathbf{r}^{k+1} + a_{32} \mathbf{r}^{k-1}, & \delta \mathfrak{S}_{1,k} &= b_{31} \mathbf{r}^{k+1} + b_{32} \mathbf{r}^{k-1}, \\
 \delta \mathbf{v}_{2,k} &= a_{41} \mathbf{r}^{k+1} + a_{42} \mathbf{r}^{k-1}, & \delta \mathfrak{S}_{11,k} &= b_{41} \mathbf{r}^{k+1} + b_{42} \mathbf{r}^{k-1}, \\
 \delta \mathbf{w}_k &= c_{11} \mathbf{r}^k, & \delta \mathbf{Q}_{1,k}^n &= c_{21} \mathbf{r}^{k-1}, k \geq 2.
 \end{aligned} \tag{6.2.6}$$

Для получения неизвестных векторов

$$\begin{aligned}
 A_1 &= (a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41})', & A_2 &= (a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42})', \\
 B_1 &= (b_{11}, b_{21}, b_{31}, b_{41})', & B_2 &= (b_{12}, b_{22}, b_{32}, b_{42})', \\
 C_1 &= (c_{11}, c_{21})'
 \end{aligned} \tag{6.2.7}$$

подставим разложения (6.2.6) в УНР (4.3.9), что дает возможность получить системы алгебраических уравнений для определения векторов (6.2.7). Из рассмотрения этих систем уравнений следует: 1) для пластинки ( $k_1 = k_2 = 0$ ) векторы (6.2.7) являются собственными векторами матриц  $D_1, D_2, D_3$  при собственных значениях  $k, k-2; k, k-2; k-1$  соответственно;

2) собственные векторы  $A_2, B_2$ , компоненты которых являются коэффициентами в разложениях (6.2.6) при главных членах, и вектор  $C_1$  для пластинки и оболочки совпадают;

3) для оболочки векторы  $A_1, B_1$ , вообще говоря, не являются собственными векторами матриц  $D_1, D_2$ . Однако для получения совместной системы уравнений для определения векторов  $A_1, B_1$  в случае оболочки потребовалось бы совместное рассмотрение задач (р), (и), (п) с матрицей  $(b_{ik})$ , положительные собственные значения которой  $k, k, k-2, k-2, k-1$  кратны и отличаются друг от друга на целые числа. В этом случае необходимо введение в разложения (6.2.6) выражений вида  $\ln r$  и его степеней [106].

Исходя из изложенного, можно принять с достаточной точностью в малой окрестности полюса оболочки вращения разложения (6.2.6), в которых векторы (6.2.7) определяются как собственные векторы матриц  $D_1, D_2, D_3$  в задаче о пластинке. Тогда получим:  $a_{31}, a_{12}, b_{31}, b_{12}, c_{11}$  — произвольные константы,

$$a_{21} = \frac{\psi_k (1+k)(1-v^2)}{2(1-v) - k(1+v)} a_{31}, \quad a_{22} = -a_{12},$$

$$a_{11} = \psi(1+k)(1+v)a_{31} + \frac{2v}{1-v} a_{21}, \quad a_{32} = \frac{(k+2)a_{12}}{\psi(v-1)(2-k-k^2)},$$

$$a_{41} = a_{31} + \frac{2}{\psi k(1-v)} a_{21}, \quad a_{42} = -a_{32},$$

$$b_{21} = \frac{k\Psi^3}{12} \frac{(1+k)(1-\nu^2)}{2(1-\nu) - k(1+\nu)} b_{31}, \quad b_{22} = -b_{12}, \quad (6.2.8)$$

$$b_{11} = \frac{\Psi^3}{12} (1+k)(1+\nu) b_{31} + \frac{2\nu}{1-\nu} b_{21}, \quad b_{32} = \frac{12(k+2)b_{12}}{\Psi^3(\nu-1)(2-k-k^2)},$$

$$b_{41} = b_{31} + \frac{24}{k\Psi^3(1-\nu)} b_{21}, \quad b_{42} = -b_{32};$$

$$c_{21} = k(\mathbf{G}_{13}\Psi + e_s \mathbf{T}_{11}^{\text{I,H}}) c_{11}.$$

Разложениями (6.2.6), (6.2.8) можно воспользоваться для нахождения однородного решения вектора разрешающих функций (3.3.6) канонической системы (3.3.12) уравнений равновесия для изотропной упругой нетонкой оболочки, положив в (6.2.8)

$$c_{21} = k\Psi \frac{1-\nu}{2} c_{11}. \quad (6.2.9)$$

В. Каноническая система УНР десятого порядка для нетонкой изотропной упругопластической оболочки с учетом деформации поперечного сдвига (4.3.9); уравнения основного состояния (5.1.8).

Основные допущения описаны в Б. Вводятся также безразмерные величины (6.2.4) и замена переменных по формулам (6.2.5). Для величин (4.3.8) вводятся безразмерные по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}}_{6,10} &= \bar{\mathbf{D}}_{6,10}/(Ah_0), \quad \bar{b}_{16} = Ah_0 \bar{b}_{16}, \quad \bar{b}_{17} = Ah_0^2 \bar{b}_{17}, \quad \bar{b}_{18} = \bar{b}_{18}, \\ \bar{b}_{19} &= \bar{b}_{19}/h_0, \quad \bar{b}_{21} = Ah_0^2 \bar{b}_{21}, \quad \bar{b}_{22} = Ah_0^3 \bar{b}_{22}, \quad \bar{b}_{23} = h_0 \bar{b}_{23}, \\ \bar{b}_{24} &= \bar{b}_{24}; \quad \bar{c}_1 = Ah_0 \bar{c}_1, \quad \bar{c}_2 = Ah_0^2 \bar{c}_2, \quad \bar{c}_3 = Ah_0 \bar{c}_3, \quad \bar{c}_4 = \bar{c}_4, \\ \bar{c}_5 &= \bar{c}_5/h_0, \quad \bar{c}_6 = \bar{c}_6/e_s, \quad \bar{c}_7 = Ah_0^2 \bar{c}_7, \quad \bar{c}_8 = Ah_0 \bar{c}_8, \quad \bar{c}_9 = Ah_0^2 \bar{c}_9, \\ \bar{c}_{10} &= h_0 \bar{c}_{10}, \quad \bar{c}_{11} = \bar{c}_{11}, \quad \bar{c}_{12} = (h_0/e_s) \bar{c}_{12}, \quad \bar{c}_{13} = Ah_0 \bar{c}_{13}, \quad \bar{c}_{14} = Ah_0^2 \bar{c}_{14}, \\ \bar{c}_{15} &= Ah_0 \bar{c}_{15}, \quad \bar{c}_{16} = \bar{c}_{16}, \quad \bar{c}_{17} = \bar{c}_{17}/h_0, \quad \bar{c}_{18} = \bar{c}_{18}/e_s, \quad \bar{c}_{19} = \bar{c}_{19}, \quad (6.2.10) \\ \bar{c}_{20} &= h_0 \bar{c}_{20}, \quad \bar{c}_{21} = \bar{c}_{21}, \quad \bar{c}_{22} = \bar{c}_{22}/(Ah_0), \quad \bar{c}_{23} = \bar{c}_{23}/(Ah_0^2), \\ \bar{c}_{24} &= \bar{c}_{24}/(Ah_0 e_s), \quad \bar{c}_{25} = \bar{c}_{25}/h_0, \quad \bar{c}_{26} = \bar{c}_{26}, \quad \bar{c}_{27} = \bar{c}_{27}/h_0, \\ \bar{c}_{28} &= \bar{c}_{28}/(Ah_0^2), \quad \bar{c}_{29} = \bar{c}_{29}/(Ah_0^3), \quad \bar{c}_{30} = \bar{c}_{30}/(Ah_0^2 e_s), \\ \bar{c}_{31} &= \bar{c}_{31}, \quad \bar{c}_{32} = h_0 \bar{c}_{32}, \quad \bar{c}_{33} = \bar{c}_{33}/(Ah_0), \quad \bar{c}_{34} = \bar{c}_{34}/(Ah_0^2), \\ \bar{c}_{35} &= \bar{c}_{35}/(Ah_0 e_s), \quad \bar{c}_{36} = \bar{c}_{36}/h_0, \quad \bar{c}_{37} = \bar{c}_{37}, \quad \bar{c}_{38} = \bar{c}_{38}/(Ah_0^2), \\ \bar{c}_{39} &= \bar{c}_{39}/(Ah_0^3), \quad \bar{c}_{40} = \bar{c}_{40}/(Ah_0^2 e_s). \end{aligned}$$

В отличие от Б (упругий случай) в случае уравнений упругопластической деформации собственные значения характерной матрицы в

полюсе  $(b_{ik})$  из (5.5.2) определить точно не удастся. Приближенно принимаем разложения вида (6.2.6) упругой задачи. После подстановки (6.2.6) в систему (4.3.9) в полюсе получим приближенные соотношения для вычисления коэффициентов в (6.2.6). Приведем формулы счета. Составим из элементов матрицы  $(b_{ik})$  вектор-столбец

$$L = (-k(\bar{c}_{32} + \bar{c}_{33}), -k^2\bar{c}_{22} - \bar{c}_{33}, -k\bar{c}_4, -k(\bar{c}_{28} + \bar{c}_{38}), -k^2\bar{c}_{28} - \bar{c}_{38}, -k\bar{c}_{10})'$$

вектор-столбец

$$M = (-k(\bar{c}_{23} + \bar{c}_{34}), -k^2\bar{c}_{23} - \bar{c}_{34}, -k\bar{c}_5, -k(\bar{c}_{29} + \bar{c}_{39}), -k^2\bar{c}_{29} - \bar{c}_{39}, -k\bar{c}_{11})'$$

и матрицу

$$H = \begin{pmatrix} \bar{c}_{19} - 1 & -k\bar{c}_{31} & \bar{c}_{22} + k^2\bar{c}_{33} & \bar{c}_{20} & -k\bar{c}_{32} & \bar{c}_{23} + k^2\bar{c}_{34} \\ k\bar{c}_{19} & -\bar{c}_{31} - 1 & k(\bar{c}_{22} + \bar{c}_{33}) & k\bar{c}_{20} & -\bar{c}_{32} & k(\bar{c}_{23} + \bar{c}_{34}) \\ \bar{c}_1 & 0 & \bar{c}_4 - 1 & \bar{c}_2 & 0 & \bar{c}_5 \\ \bar{c}_{25} & -k\bar{c}_{36} & \bar{c}_{28} + k^2\bar{c}_{38} & \bar{c}_{26} - 1 & -k\bar{c}_{37} & \bar{c}_{29} + k^2\bar{c}_{39} \\ k\bar{c}_{25} & -\bar{c}_{36} & k(\bar{c}_{28} + \bar{c}_{38}) & k\bar{c}_{26} & -1 - \bar{c}_{37} & k(\bar{c}_{29} + \bar{c}_{39}) \\ \bar{c}_7 & 0 & \bar{c}_{10} & \bar{c}_8 & 0 & \bar{c}_{11} - 1 \end{pmatrix}.$$

Введем единичную матрицу  $I$  ( $6 \times 6$ ) и вектор-столбцы:

$$X_1 = (a_{11}^{(1)}, a_{21}^{(1)}, a_{31}^{(1)}, b_{11}^{(1)}, b_{21}^{(1)}, b_{31}^{(1)})',$$

$$X_2 = (a_{11}^{(2)}, a_{21}^{(2)}, a_{31}^{(2)}, b_{11}^{(2)}, b_{21}^{(2)}, b_{31}^{(2)})',$$

$$X_3 = (a_{12}^{(1)}, a_{22}^{(1)}, a_{32}^{(1)}, b_{12}^{(1)}, b_{22}^{(1)}, b_{32}^{(1)})',$$

$$X_4 = (a_{12}^{(2)}, a_{22}^{(2)}, a_{32}^{(2)}, b_{12}^{(2)}, b_{22}^{(2)}, b_{32}^{(2)})'.$$

Векторы  $X_i, i = \overline{1,4}$ , определяются из следующих систем уравнений:

$$(H - kI)X_1 = a_{41}L, (H - kI)X_2 = b_{41}M, \quad (6.2.11)$$

$$(H - (k-2)I)X_3 = a_{42}L, (H - (k-2)I)X_4 = b_{42}M.$$

Введем вектор-столбцы с учетом (6.2.5):

$$Y = (Y_1, Y_2, Y_6, Y_7, Y_4, Y_5, Y_9, Y_{10})',$$

$$F_1 = (a_{11}^{(1)}, a_{21}^{(1)}, a_{31}^{(1)}, a_{41}, b_{11}^{(1)}, b_{21}^{(1)}, b_{31}^{(1)}, 0)',$$

$$F_2 = (a_{11}^{(2)}, a_{21}^{(2)}, a_{31}^{(2)}, 0, b_{11}^{(2)}, b_{21}^{(2)}, b_{31}^{(2)}, b_{41})',$$

$$F_3 = (a_{12}^{(1)}, a_{22}^{(1)}, a_{32}^{(1)}, a_{42}, b_{12}^{(1)}, b_{22}^{(1)}, b_{32}^{(1)}, 0)',$$

$$F_4 = (a_{12}^{(2)}, a_{22}^{(2)}, a_{32}^{(2)}, 0, b_{12}^{(2)}, b_{22}^{(2)}, b_{32}^{(2)}, b_{42})'.$$

Тогда искомые разложения неизвестных в окрестности полюса

можно представить в следующем виде:

$$Y = F_1 r^k + F_2 r^k + F_3 r^{k-2} + F_4 r^{k-2}, \quad (6.2.12)$$

$$\delta w_k = c_{11} r^{\alpha k}, \quad \delta Q_{1,k}^H = c_{21} r^{\alpha k-1},$$

где

$$\alpha = \sqrt{(\tilde{D}_{6,10} + e_s T_{22}^{I,H})} \tilde{c}_{15}, \quad (6.2.13)$$

$$c_{21} = kc_{11} \sqrt{(\tilde{D}_{6,10} + e_s T_{22}^{I,H})} / \tilde{c}_{15};$$

$a_{41}, a_{42}, b_{41}, b_{42}, c_{11}$  — пять произвольных коэффициентов, остальные определены через них с помощью (6.2.11), (6.2.13).

Для упругого случая формулы (6.2.11)—(6.2.13) перейдут в формулы (6.2.6), (6.2.8).

### 6.3. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА РАСЧЕТА НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ОБЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

Известно по результатам решения задач теории оболочек, что надежность численного решения определяется подходящим выбором числа делений  $N$  (при прочих благоприятных условиях). Необходимое число делений  $N$  растет с ростом удлиненности оболочки  $e=b/a$ , параметра тонкостенности  $a=a/h$ , подъемистости оболочки, когда растет длина меридиана оболочки в масштабе толщины  $h$ . Значение  $N$  зависит также от граничных условий на краях интервала интегрирования, вида задачи (интегрирование уравнений основного состояния (УОС) или уравнений нейтрального равновесия (УНР)), точности метода численного интегрирования, который используется при решении задач Коши в методе ортогональной прогонки, и т.д.

В алгоритме для интегрирования уравнения

$$\frac{dY}{dt} = \Phi(t, Y) \quad (6.3.1)$$

испытаны методы Рунге—Кутта второго порядка точности

$$Y_{m+1} = Y_m + \frac{\Delta t}{2} (m_1 + m_2);$$

$$m_1 = \Phi(t_m, Y_m), \quad m_2 = \Phi(t_{m+1}, Y_m + \Delta t m_1), \quad (6.3.2)$$

$$t_0 \leq t \leq t_N, \Delta t = (t_N - t_0)/N, \quad m = \overline{0, N},$$

и четвертого порядка точности

$$Y_{m+1} = Y_m + \frac{\Delta t}{6} (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4); \quad (6.3.3)$$

$$m_1 = \Phi(t_m, Y_m), \quad m_2 = \Phi\left(t_m + \frac{\Delta t}{2}, Y_m + \frac{\Delta t}{2} m_1\right),$$

$$m_3 = \Phi\left(t_m + \frac{\Delta t}{2}, Y_m + \frac{\Delta t}{2} m_2\right), \quad m_4 = \Phi(t_{m+1}, Y_m + \Delta t m_3). \quad (6.3.4)$$



Таблица 6.1

Вид облочки	$a/h$	$\rho_M \cdot 10^6$	Теория с учетом сдвига			
			ГУ	метод для УНР	$N_0$	$N_H$
I	50	441		(6.3.2)	200	200
$b/a=1,$	200	27,5		(6.3.2)	400	400
$\theta_0=0,$	200	27,5		(6.3.3)	400	200
$\theta_N=\pi/2,$	400	6,89		—	—	—
$\nu=0,3$						
II			(5.5.12),			
$b/a=2,$	50	60,5	(5.7.4);		200	200
$\theta_0=0,$	50	60,5	(6.2.6),	(6.3.2)	400	400
$\theta_N=\pi/2,$	200	3,78	(6.3.6)		400	400
$\nu=0,4$						
III						
$b/a=0,5,$	50	110		(6.3.2)	200	200
$\theta_0=0,$	50	110		(6.3.2)	400	400
$\theta_N=\pi/2,$	50	110		(6.3.3)	400	200
$\nu=0,3$						
IV						
$b/a=0,5,$	50	—	(5.5.12),		200	200
$\theta_0=0,$	100	—	(5.7.6);	(6.3.2)	200	200
$\theta_N=\pi/2,$	100	—	(6.2.6),		400	400
$\nu=0,3$			(6.3.8)			
V	50	—	(5.7.2),		200	200
$b/a=0,5,$			(5.7.5);			
$\theta_0=0,092,$			(6.3.7),	(6.3.2)		
$\theta_N=\pi/2,$	300	—	(6.3.7)		200	200
$\nu=0,3$						
VI	62,5	—			50	50
$b/a=1,$	62,5	—			100	100
$\theta_0=0,$	62,5	—		(6.3.2)	200	200
$\theta_N=0,928,$	187,5	—			200	200
$\nu=0,3$	187,5	—			400	400
			(5.5.12),			
VII	143,4	—	(5.7.6),		50	50
$b/a=1,$	143,4	—	(6.2.6),		100	100
$\theta_0=0,$	143,4	—	(6.3.8)	(6.3.2)	200	200
$\theta_N=0,356,$	430,2	—			200	200
$\nu=0,3$	430,2	—			400	400

Теория с учетом сдвига			Теория без учета сдвига				Строка
Интервал $-p \cdot 10^6$	$k$	$ \Delta k $	ГУ	$N$	$-p \cdot 10^6$	$k$	
442	3	$10^{-2}$		50	441	7	1
13,7—15,1	10	$10^{-2}$		50	27,5	20	2
19,7—20,3	25	$10^{-2}$		—	—	—	3
—	—	—		100	6,89	27	4
			(5.5.12),				
68,0—69,0	11	$10^{-2}$	(5.7.4);	50	94,9	7	5
95,5—96,2	7	$10^{-1}$	(6.2.2),	—	—	—	6
2,50—3,00	17	$10^{-1}$	(6.4.4)	50	5,01 ( $\nu=0,3$ )	14	7
115—117	2,3	0,3		200	134	3	8
118—122	2	0,3		—	—	—	9
111—115	2	0,3		—	—	—	10
116—119	2,3	1	(5.5.12),	200	115	—	11
20,7—24,0	2	$10^{-2}$	(5.7.6);	200	28,9	—	12
30,8—30,9	2	1	(6.2.2), (6.4.8)	—	—	—	13
103	4	1	(5.7.2), (5.7.5);	50	105	4	14
2,31—2,45	2	$10^{-2}$	(6.4.6), (6.4.6)	—	2,44	6	15
176—186	9	$10^{-1}$		50	220	8	16
220—222	7,8	1		—	—	—	17
218—221	8	1		—	—	—	18
24,1—24,4	14	$10^{-1}$	(5.5.12),	50	25,0	15	19
24,4—25,2	15	1	(5.7.6);	—	—	—	20
—	—	$10^{-1}$	(6.2.2), (6.4.8)	50	40,7	3	21
39,0—41,2	3,4	1		—	—	—	22
39,0—41,3	3,4	1		—	—	—	23
4,50—4,71	9	$10^{-1}$		50	4,66	8	24
4,65—4,77	8,9	1		—	—	—	25

Очевидно, что метод (6.3.3) требует большего количества операций на одном шаге, чем (6.3.2).

В алгоритме при интегрировании УОС принят метод (6.3.2) из-за нелинейности основного состояния: использование метода (6.3.3) требовало бы введения формул интерполяции для получения неизвестных на предыдущей итерации в половинных точках  $t_m + \Delta t/2$ . При этом численный эксперимент показал достаточность числа делений  $N \leq 200$ . Например, в табл. 5.3 для вытянутой эллипсоидальной оболочки дано сравнение результатов численного интегрирования УОС с безмоментным решением [31] и с результатами [63], полученными методом конечных элементов из трехмерных уравнений теории упругости. Естественно, в каждом конкретном случае достаточность  $N$  устанавливалась просчетом задачи для ряда значений  $N$ .

Расчеты показали также применимость метода (6.3.2) при  $N \leq 200$  к УНР восьмого порядка (4.4.17), построенным с применением гипотезы Кирхгофа—Лява. Результаты сравнения с точным решением Цолли — Лейбензона для полной сферы и с известным решением Хуана для пологого сферического сегмента приведены в табл. 6.1 и в разд. 6.4. О надежности результатов численного интегрирования можно судить также по величине нормализованного определителя устойчивости  $\Delta_k$ . При устойчивом счете, вне интервала смены знака,

$$|\Delta_k| \sim 1. \quad (6.3.5)$$

Однако расчеты показали, что при применении формул (6.3.2) к УНР десятого порядка (4.3.9) для получения надежных результатов требуется значительное число делений  $N$ : с ростом  $a$  и  $e$  может оказаться  $N \sim 500 \div 1000$ . Поэтому для интегрирования системы (4.3.9) был испытан также метод (6.3.3) при разбиении дуги меридиана на  $N/2$  отрезков, если  $N$  — число делений в задаче УОС. При таком построении алгоритма из УОС подается необходимый материал в целых и половинных точках деления аргумента в УНР.

В табл. 6.1 и 6.2 приведены результаты вычислений для упругих изотропных оболочек постоянной толщины  $h$ , находящихся под действием внешнего равномерного давления  $p$ , в зависимости от принятой теории, метода интегрирования, числа делений  $N$ . В случае теории с учетом деформации поперечного сдвига приняты УОС — (5.1.8), УНР — (4.3.9), метод (6.3.2) — для УОС,  $N_0$  — число делений для УОС,  $N_n$  — число делений для УНР. В теории без учета деформации поперечного сдвига (гипотеза Кирхгофа—Лява) будут УОС — (3.2.15), УНР — (4.4.17), метод (6.3.2) — для УОС и УНР,  $N$  — число делений при интегрировании УОС и УНР. Отметим, что в табл. 6.1 рассмотрены тонкие изотропные оболочки, для которых влияние учета деформации поперечного сдвига мало. Рассмотрение уравнений по различным теориям преследует методическую цель с точки зрения получения численного решения.

Граничные условия для УОС принципиально не зависят от вида уравнений. Для УОС (5.1.8) рассмотрены следующие граничные условия. Слева при  $\theta = \theta_0$ : полюс — (5.5.12), шарнирное закрепление — (5.7.2),

жесткая заделка — (5.7.3); справа при  $\theta = \theta_N$ : симметрия на экваторе  $\theta_N = \pi/2$  — (5.7.4), шарнирное закрепление — (5.7.5), жесткая заделка — (5.7.6).

Для УНР восьмого порядка (4.4.17) граничные условия будут: полюс — (6.2.2), (6.2.3), симметрия — (6.4.4), шарнирное закрепление — (6.4.6), жесткая заделка — (6.4.8). Для УНР десятого порядка (4.3.9) условия в полюсе будут (6.2.6), (6.2.8). Приведем другие граничные условия (ГУ):

симметрия 1 (защемление без скольжения в направлении параллели и кручения):

$$\delta Q_{1,k}^H = \delta v_{1,k} = \delta v_{2,k} = \delta \vartheta_{I,k} = \delta \vartheta_{II,k} = 0, \quad (6.3.6)$$

шарнирное закрепление:

$$\delta M_{11,k} = \delta M_{12,k} = \delta v_{1,k} = \delta v_{2,k} = \delta w_k = 0, \quad (6.3.7)$$

жесткая заделка:

$$\delta v_{1,k} = \delta v_{2,k} = \delta w_k = \delta \vartheta_{I,k} = \delta \vartheta_{II,k} = 0; \quad (6.3.8)$$

симметрия 2 (защемление со скольжением в направлении параллели и кручением):

$$\delta T_{12,k}^H = \delta Q_{1,k}^H = \delta M_{12,k} = \delta v_{1,k} = \delta \vartheta_{I,k} = 0, \quad (6.3.9)$$

свободный край:

$$\delta T_{11,k}^H = \delta T_{12,k}^H = \delta Q_{1,k}^H = \delta M_{11,k} = \delta M_{12,k} = 0, \quad (6.3.10)$$

симметрия 3 (защемление со скольжением в направлении параллели и без кручения):

$$\delta Q_{1,k}^H = \delta v_{1,k} = \delta \vartheta_{I,k} = \delta T_{12,k}^H = \delta \vartheta_{II,k} = 0; \quad (6.3.10a)$$

симметрия 4 (защемление без скольжения в направлении параллели, но с кручением):

$$\delta Q_{1,k}^H = \delta v_{1,k} = \delta \vartheta_{I,k} = \delta v_{2,k} = \delta M_{12,k} = 0. \quad (6.3.10б)$$

В табл. 6.1 результаты вычислений приведены для полных оболочек — сферической I, вытянутой эллипсоидальной II, сплюснутой эллипсоидальной III; для люгнутого эллипсоидального днища без отверстия IV и с центральным отверстием V, сферических сегментов различной подъемистости VI и VII. Обозначено:  $p = p(1 - \nu^2)/E$  — параметр нагрузки несимметричной потери устойчивости; в таблицах дан интервал  $p$ , в котором происходит смена знака определителя  $\Delta_k$ , чтобы не тратить машинное время на дальнейшее уточнение результатов;  $k$  — соответствующее  $p$  число волн в окружном направлении оболочки;  $w = \max(w^1/h)$  — параметр прогиба в начале интервала

значений  $p$ ;  $p_M$  — значение критической нагрузки по формулам Х.М. Муштари (6.4.1) и (6.4.2), которые для полной сферы совпадают с

точным решением Цолли — Лейбензона:

$$p = -2Eh^2 / \left( a^2 \sqrt{3(1-\nu^2)} \right); \quad (6.3.11)$$

$$\sigma = \max_{s,z} \sigma_i^I (1-\nu^2) / E \text{ — параметр интенсивности напряжений в нача-}$$

ле интервала  $p$ .

Из табл. 6.1 видно, что особенно сложно получить численное решение для полных оболочек I — III, когда используются уравнения с учетом деформации поперечного сдвига. В этом случае метод (6.3.2) дает возможность получить решение при  $N \leq 400$  только для не очень тонких оболочек ( $a = 50$ ). В то время как в теории без учета сдвига достаточно  $N \leq 200$  даже для тонких оболочек ( $b/a = 1$ ,  $a/h = 400$ ,  $N = 100$ ).

Воспользуемся приближенной формулой для подсчета длины периметра эллипса

$$s = \pi a \left( 1,5(1 + b/a) - \sqrt{b/a} \right).$$

Тогда по результатам, приведенным в табл. 6.1, можно приближенно оценить шаг  $\Delta s$ , который необходим для проведения расчетов в случае теории с учетом деформации поперечного сдвига при применении метода (6.3.2). Значения  $\Delta s$  в масштабе толщины оболочки (ее наименьшего размера) в зависимости от вида оболочки будут следующие:

Вид оболочки	I	II	III	IV	V	VI	VII
$\Delta s/h$	0,3	0,3	0,15	0,3	0,3	0,6	0,6

Из табл. 6.1 (строки 2, 3, 9, 10) видно, что метод (6.3.3) в рассмотренных задачах не имеет преимуществ по сравнению с (6.3.2).

Данные табл. 6.1 наводят на мысль, что трудности, которые могут встретиться при применении метода ортогональной прогонки к УНР десятого порядка (4.3.9) для тонкой оболочки, обусловлены вырождением уравнений, когда влияние деформации поперечного сдвига становится несущественным. В этом случае необходим переход к УНР восьмого порядка (4.4.17).

Для проверки разложений (6.2.6), полученных для неизвестных в окрестности полюса оболочки вращения, были испытаны различные способы численного интегрирования в окрестности полюса. Условно отметим способ численного интегрирования с использованием разложений (6.2.6) параметром  $IP=0$ . Другой путь — вырезать полюс малым отверстием, поставив на краю отверстия подходящие граничные условия (способ  $IP=1$ ). Проведены испытания на примере сплюснутого эллипсоидального днища IV из табл. 6.1, строка 11. Результаты испытаний приведены в табл. 6.2 (строки 1—5). В четвертом столбце указаны ГУ, которые ставились для УНР слева при  $\theta = \theta_0$ .

Из табл. 6.2 видно, что малый вырез в окрестности полюса почти не влияет на результат, когда на границе выреза поставлены условия защемления (6.3.6) или (6.3.9) (строки 3, 4 по сравнению со строкой 1).

Таблица 6.2

IP	N	$\theta_0$	ГУ в УНР	Интервал $-p \cdot 10^4$	k	$ \Delta k $	-w	100 $\sigma$	Строка
0	200	0	(6.2.6)	1,16—1,19	2,3	1	0,965	1,17	1
1	200	0,02424	(6.3.8)	1,01—1,05	3	1	0,787	2,22	2
			(6.3.6)	1,15—1,19	2,3	1	0,955	1,17	3
			(6.3.9)	1,15—1,19	2,3	1	0,955	1,17	4
			(6.3.10)	1,06—1,11	2	1	0,876	1,13	5
0	400	0	(6.3.6)	1,18—1,22	2	0,3	—	—	6
			(6.3.9)	1,14—1,17	2,3	0,25	1,11	0,88	7

На примере сплюснутой оболочки III из табл. 6.1 (строка 9) проведены испытания записи граничных условий симметрии на экваторе оболочки  $\theta_N = \pi/2$  в виде (6.3.6) и (6.3.9). Результаты приведены в табл. 6.2, строки 6, 7. Видно, что различие в интервале для критической нагрузки сплюснутой оболочки мало.

#### 6.4. ТОНКИЕ УПРУГИЕ ИЗОТРОПНЫЕ ЭЛЛИпсоИДАЛЬНЫЕ ОБОЛОЧКИ И СЕГМЕНТЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО РАВНОМЕРНОГО ДАВЛЕНИЯ

Эллипсоидальная оболочка вращения описана формулами (5.6.1). Приведем необходимые обозначения:  $p = pa^2 \sqrt{3(1-\nu^2)} / (2Eh^2)$  — параметр НКН;  $w = \max_s w^i / h$ ,  $\sigma = \max_{s,z} 2(1+\nu)\sigma_i^i / (3E)$ ,  $\sigma_{ii} = 2(1+\nu)\sigma_{ii}^i / (3E)$ ,  $i = 1, 2$ , — параметры прогиба, интенсивности напряжений и напряжений соответственно в оболочке в момент НПУ;  $a = a/h$ ,  $e = b/a$  — параметры тонкостенности и удлиненности;  $k$  — число волн в окружном направлении. В вычислениях принято  $\nu = 0,3$ ;  $0 = \theta = \pi/2$ .

Обозначим (в%)

$$\Delta f = 100(p - p_f) / p$$

— отличие НКН  $p$ , полученной методом ортогональной прогонки [37], от других результатов  $p_f$  [5]. При этом  $f = M$  соответствует результатам, полученным Х.М. Муштари [88] по теории локальной потери устойчивости [101], для вытянутого эллипсоида:

$$p_M = -2Eh^2 / \left[ \sqrt{3(1-\nu^2)} (2b^2 - a^2) \right], \quad (6.4.1)$$

для сплюснутого эллипсоида:

$$p_M = -2Eh^2 b^2 / \left[ \sqrt{3(1-\nu^2)} a^4 \right]; \quad (6.4.2)$$

$f = C$  — результатам для удлиненной сфероидальной оболочки [4];  $f = K$  — результатам, полученным методом коллокации [81];  $f = \Gamma$  — результатам работы [37], когда основное состояние принято геометрически линейным;  $f = 0$  — осесимметричной предельной нагрузке (ОПН) на кривой  $p(w)$ ;  $f = X$  — результатам, полученным методом конечных разностей в работе [131].

В процессе численного интегрирования для полной оболочки приняты следующие граничные условия. Для УОС (3.2.15): условия слева — разложения разрешающих функций (5.5.6) в окрестности полюса  $\theta_0 = 0$ ; условия справа — условия симметрии на экваторе оболочки  $\theta_N = \pi/2$ :

$$u^I = Q_1^I = \vartheta_1^I = 0, \quad v^I = v^*. \quad (6.4.3)$$

Для УНР (4.4.17): условия слева — разложения разрешающих функций (6.2.2) в окрестности полюса  $\theta_0 = 0$ ; условия справа — условия симметрии на экваторе оболочки  $\theta_N = \pi/2$ :

$$\delta v_1 = \delta v_2 = \delta \omega_1 = \delta Q_1^* = 0. \quad (6.4.4)$$

Для сегментов на правом краю  $\theta = \theta_N$  рассмотрены граничные условия шарнирного закрепления:

$$u^I = w^I = M_{11}^I = 0, \quad v^I = v^*, \quad (6.4.5)$$

$$\delta v_1 = \delta v_2 = \delta w = \delta M_{11} = 0, \quad (6.4.6)$$

жесткой заделки:

$$u^I = w^I = \vartheta_1^I = 0, \quad v^I = v^*, \quad (6.4.7)$$

$$\delta v_1 = \delta v_2 = \delta w = \delta \omega_1 = 0. \quad (6.4.8)$$

а. Вытянутые эллипсоидальные оболочки вращения. Результаты вычислений приведены в табл. 6.3, из которой видно, что наблюдается увеличение необходимого числа делений  $N$  в методе ортогональной прогонки с утоньшением и ростом удлиненности оболочки, уменьшение числа волн  $k$  с ростом удлиненности и увеличение  $k$  с утоньшением.

Прогиб в момент НПУ достигает наибольшего значения на экваторе. Максимальное напряжения также наблюдаются на экваторе. В момент НПУ вытянутая оболочка по большей части меридиан находится почти в безмоментном состоянии, за исключением окрестности полюса.

Влияние геометрической нелинейности докритического состояния на величину  $p$  практически отсутствует (при  $e = 1,1$ ,  $a = 100$   $\Delta\Gamma = -0,3\%$ ; при  $e = 3$ ,  $a = 200$   $\Delta\Gamma = 0,01\%$ ). Об этом же свидетельствуют малые значения прогиба (при  $e = 1$   $w \sim 0,4$ ; при  $e = 5$   $w \sim 0,04$ ). Для вытянутых эллипсоидальных оболочек велика разница между НКН и ОПН. Например, при  $e = 5$ ,  $a = 50$   $\Delta O = -90\%$ .

Сравним результаты табл. 6.3 с результатами вычислений по формуле (6.4.1). Как видно из таблицы, при  $e = 1$ , когда формула (6.4.1)

Таблица 6.3

$e$	$a$	$-p$	$k$	$N$	$-10w$	$\sigma \cdot 10^4$	$\Delta M$
1	50	0,9975	7	50	4,2	104	-0,3
	100	0,9983	12	50	4,2	52,3	-0,2
	200	0,9989	20	50	4,2	26,9	-0,1
	400	0,9993	27	100	4,2	12,7	-0,1
1,10	50	0,7817	11	50	4,2	90,5	9,9
	100	0,7562	16	50	4,0	43,6	6,9
	200	0,7412	23	50	3,9	—	5,0
	400	0,7303	32	150	3,9	10,5	3,6
1,25	50	0,5616	10	50	3,6	72,4	16
	100	0,5364	15	50	3,5	34,4	12
	200	0,5178	21	50	3,3	16,6	9,1
	400	0,5043	29	150	3,2	8,08	6,7
1,50	50	0,3749	9	50	2,9	53,7	24
	100	0,3508	13	50	2,7	25,1	19
	200	0,3318	18	50	2,5	11,9	14
	400	0,3190	25	100	2,4	5,71	10
2	50	0,2185	8	50	1,9	34,9	35
	100	0,1965	10	50	1,7	15,7	27
	200	0,1820	14	50	1,6	7,26	22
	400	0,1706	19	100	1,5	3,40	16
3	50	0,1111	6	50	1,1	19,1	47
	100	0,09707	7	50	0,9	8,34	39
	200	0,08508	10	50	0,8	3,65	31
	400	0,07744	14	100	0,7	1,66	24
5	50	0,04989	4	50	0,5	8,88	59
	100	0,04143	5	100	0,4	3,69	51
	200	0,03534	7	150	0,4	1,57	42
	400	0,03061	9	200	0,3	0,68	33

совпадает с точным решением Цолли—Лейбензона для сферической оболочки (6.3.11), отличия практически нет. Оно растет с ростом удлиненности  $e$  и толщины  $h$  и составляет, например, при  $e = 1,1$ ,  $a = 400$   $\Delta M = 4\%$ , при  $e = 5$ ,  $a = 50$   $\Delta M = 59\%$ . Таким образом, результаты по теории локальной потери устойчивости могут быть сильно заниженными.

Проведем сравнение с другими результатами. Значения НКН для удлиненных сфероидальных оболочек, полученные методом Бубнова—Галеркина [4], превышают соответствующие параметры для вытянутых эллипсоидальных оболочек, полученные методом ортогональной прогонки. Например, при  $e = 5$ ,  $a = 100$   $\Delta C = -21\%$ ; при  $e = 2$ ,  $a = 100$   $\Delta C = -40\%$ . Результаты работы [81] не подтверждаются. Так, для  $e = 1,5$ ,  $a = 100$   $p_k/p_M = 1,03$ ,  $p/p_M = 1,23$ ; для  $e = 4,35$ ,  $a = 100$   $p_k/p_M = 1,03$ , для  $e = 5$ ,  $a = 100$   $p/p_M = 2,03$ . Сравнение с экспериментальными результатами [6] приведено в табл. 6.4, где  $\nu = 0,1$ .



Т а б л и ц а 6.4

$e$	$a$	$E, \text{кгс} \cdot \text{см}^{-2}$	$-p_3, \text{кгс} \cdot \text{см}^{-2}$	$-p_3$	$-w_3$	$-p$	$-w$
1	100	21000	0,70	0,287	0,333	0,999	0,522
2	94	12254	0,38	0,236	0,430	0,199	0,191
3	70	12400	0,30	0,102	0,300	0,103	0,107

Проведены вычисления, когда на экваторе оболочки выполняются вместо (6.4.4) условия

$$\delta v_1 = \delta \omega_1 = \delta Q_1^* = \delta T_{12} = 0. \quad (6.4.9)$$

Получено для  $e = 5$ ,  $a = 50$   $p = -0,0329$ ,  $k = 3$ , т.е. снижение НКН на 34% по сравнению с условиями (6.4.4). Для  $e = 2$ ,  $a = 100$   $p = -0,1616$ ,  $k = 10$  снижение НКН составляет 18%. С учетом этих результатов приведенные данные можно использовать для оболочек с граничными условиями (6.4.9). Отметим, что получение результатов для случая граничных условий (6.4.9) более затруднительно, чем для (6.4.4).

Обратимся к табл. 6.4. Для сферической оболочки экспериментальные результаты значительно ниже теоретических, что в общем-то согласуется с известными в литературе данными для полной сферической оболочки [18, 63]. Хотя в работе [99] утверждается, что в хорошо поставленных экспериментах последних лет  $p_{кр}$  упругих тонких сферических оболочек совпадает с формулой Цолли—Лейбензона. Для вытянутых же оболочек с учетом снижения НКН за счет граничных условий (6.4.9) экспериментальные результаты [6] оказываются несколько выше теоретических. По-видимому, данный факт объясняется тем, что в [6] в качестве нагрузок  $p_3$  приведены нагрузки не потери устойчивости, а разрушения.

б. Сплюснутые эллипсоидальные оболочки вращения и сегменты. Результаты вычислений для полной оболочки приведены в табл. 6.5, из которой видно, что для расчета сплюснутого эллипсоида обычно требуется не меньшее число разбиений  $N$  в методе ортогональной прогонки, чем для вытянутого. Отличие НКН и ОПН является значительным. Например, для оболочки с параметрами  $e = 0,65$ ,  $a = 100$   $\Delta O = -51\%$ . Невелико влияние учета геометрической нелинейности докритического состояния: при  $e = 0,5$ ,  $a = 200$   $\Delta \Gamma = -2\%$ . Наибольшие значения прогиба  $w$  и сжимающих напряжений достигаются около полюса.

Из табл. 6.5 видно, что результаты по теории локальной потери устойчивости [88] несколько ниже результатов, полученных методом ортогональной прогонки. Разница  $\Delta M$  растет с ростом сплюснутости и толщины. Однако в диапазоне  $0,5 \leq e \leq 1$ ,  $50 \leq a \leq 400$  эта разница составляет не более 18%.

В табл. 6.6 приведены значения НКН  $-p$  для сферических ( $e=1$ ) и сплюснутых эллипсоидальных ( $e=0,5$ ) сегментов, когда на экваторе сегмента  $\theta_N = \pi/2$  выполняются ГУ: симметрии — (6.4.3), (6.4.4), шарнирного закрепления — (6.4.5), (6.4.6), жесткой заделки — (6.4.7), (6.4.8). Видно, что как для сферических, так и для эллипсоидальных оболочек

Таблица 6.5

$e$	$\lambda$	$-p$	$k$	$N$	$-10w$	$\sigma \cdot 10^3$	$\Delta M$
0,90	50	0,8636	3	100	5,58	10,3	6,2
	100	0,8407	3	100	5,31	4,95	3,7
	200	0,8490	6	100	5,32	2,45	4,6
	400	0,8411	6	200	5,25	1,23	3,7
0,85	50	0,7810	3	200	6,29	10,0	7,5
	100	0,7666	3	200	5,99	4,81	5,8
	200	0,7622	4	200	5,87	2,37	5,2
	400	0,7588	6	200	5,81	1,17	4,4
0,65	50	0,4873	3	100	10,2	8,75	13
	100	0,4666	3	100	9,05	3,96	9,5
	200	0,4550	3	200	8,56	1,88	7,1
	400	0,4404	4	200	7,63	0,94	4,1
0,50	50	0,3041	3	200	15,2	10,5	18
	100	0,2862	3	200	12,4	4,51	13
	200	0,2754	3	200	11,8	2,04	9,2
	400	0,2593	3	200	—	—	3,6

Таблица 6.6

гу	$e$			
	1		0,5	
	$a$			
	50	100	50	100
(6.4.3), (6.4.4)	0,9975	0,9983	0,3047	0,2862
(6.4.5), (6.4.6)	0,7302	0,7032	0,2973	0,2615
(6.4.7), (6.4.8)	0,8107	0,8037	0,2602	0,2627

чек подкрепление экватора приводит к снижению параметра нагрузки  $p$ . Аналогичный факт для полусферы описан в книге [51]. Он объясняется тем, что в неподкрепленных оболочках НДС близко к безмоментному, когда материал оболочки сопротивляется нагрузке по всей толщине одинаково. Закрепление оболочки по экватору приводит к возникновению моментного состояния и снижению критической нагрузки, особенно заметному для сферической оболочки.

в. Сферические сегменты с шарнирно-закрепленным и жестко-заделанным краем. Результаты вычислений даны в табл. 6.7. Здесь  $A$  — радиус основания,  $H$  — высота полюса над плоскостью основания сегмента,  $h$  — толщина оболочки;  $A=A/h$ ,  $H=H/A$  — параметры тонкостенности и подъемистости,  $p^*=pA^2\sqrt{3(1-\nu^2)}/(2Eh^2)$  — параметр НКН.

Приведем некоторые данные для сегментов с жесткой заделкой края (6.4.7), (6.4.8). Отметим, что для получения результатов табл. 6.7 было достаточно  $N=50$ . В сферических сегментах наибольшие зна-

Таблица 6.7

гу	H	A	$-p^*$	$k$	$-10w$	$\sigma \cdot 10^3$
	0,5	50	0,4356	8	4,7	11
		100	0,4421	12	4,7	5,4
		150	0,4449	15	4,6	3,6
(6.4.5)	0,32	50	0,2304	6	4,7	8,0
(6.4.6)		100	0,2337	10	4,7	4,0
		150	0,2359	12	4,7	2,6
	0,18	50	0,08023	4	4,8	4,9
		100	0,08176	7	4,7	2,4
		150	0,08256	9	4,7	1,6
	0,5	50	0,5001	8	4,9	13
		100	0,5090	12	4,8	6,8
		150	0,5114	15	4,7	4,5
(6.4.7)	0,32	50	0,2636	6	5,1	9,6
(6.4.8)		100	0,2685	9	4,9	4,9
		150	0,2717	12	4,9	3,3
	0,18	50	0,09247	3	5,6	5,6
		100	0,09386	6	5,1	2,9
		150	0,09509	8	5,0	1,9

чения прогиба и напряжений в момент НПУ наблюдаются около основания. Докритическое состояние моментное и геометрически нелинейное: при  $H=0,5$ ,  $A=150$   $\Delta\Gamma=-19\%$ , при  $H=0,18$ ,  $A=150$   $\Delta\Gamma=-22\%$ . Разница между НКН и ОПН значительна: при  $H=0,5$ ,  $A=50$   $\Delta O=-24\%$ .

Заметно влияние граничных условий на величину НКН. Жесткая заделка края сегмента повышает параметр  $p^*$  на 13% по сравнению со случаем граничных условий (6.4.5), (6.4.6). Сравнение с результатами работы [131], полученными методом конечных разностей, для полых сегментов с жесткой заделкой контура дало отличие НКН не более 2,5%.

### 6.5. УСТОЙЧИВОСТЬ ОРТОТРОПНОЙ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассмотрим задачу о больших прогибах и неосесимметричной потере устойчивости сплюснутого эллипсоидального днища из ортотропного упругого материала, ослабленного центральным отверстием радиуса  $r_0$  [45]. Толщина днища  $h$  постоянная, действует внешнее равномерное давление  $p$ . УОС будут (5.1.8), УНР — (4.3.9), из которых нужно исключить упругопластические члены, положив  $\lambda=0$ . Край отверстия защемлен. Основание днища совпадает с экватором эллипсоида  $\theta_N=\pi/2$  и жестко заделано. Граничные условия будут для УОС (5.5.12), (5.7.6), для УНР — (6.3.6), (6.3.8). Характеристики ортотропии материала:  $E_1, E_2, \nu_{12}, \nu_{21}, E_1\nu_{12} = E_2\nu_{21}, G_{12}, G_{13}, G_{23}$ . При вычислениях принято:  $\nu_{12} = 0,3, G_{13}=G_{23}, G_{12} = E_1/[2(1+\nu_{12})], N = 208$ .

Результаты вычислений приведены в табл. 6.9—6.11 и на рис. 6.1—6.4, при этом в табл. 6.8 указаны номера вариантов в зависимости от

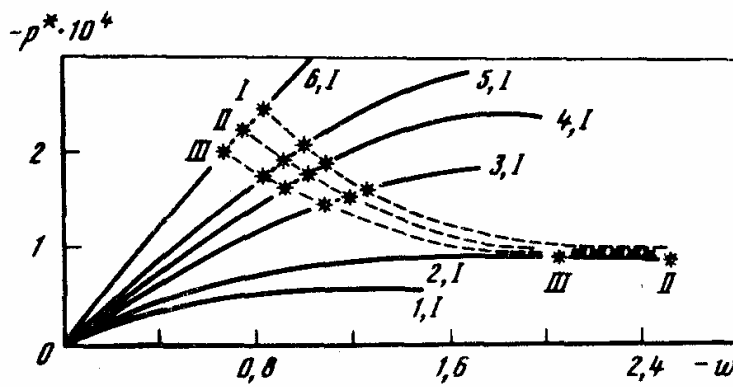


Рис. 6.1

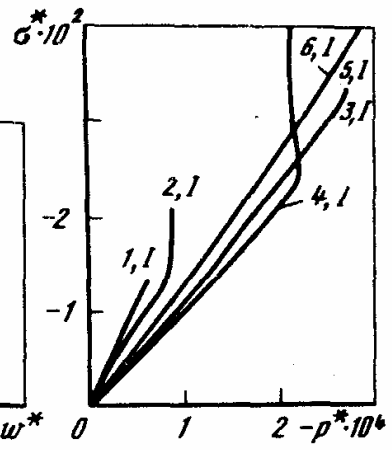


Рис. 6.2

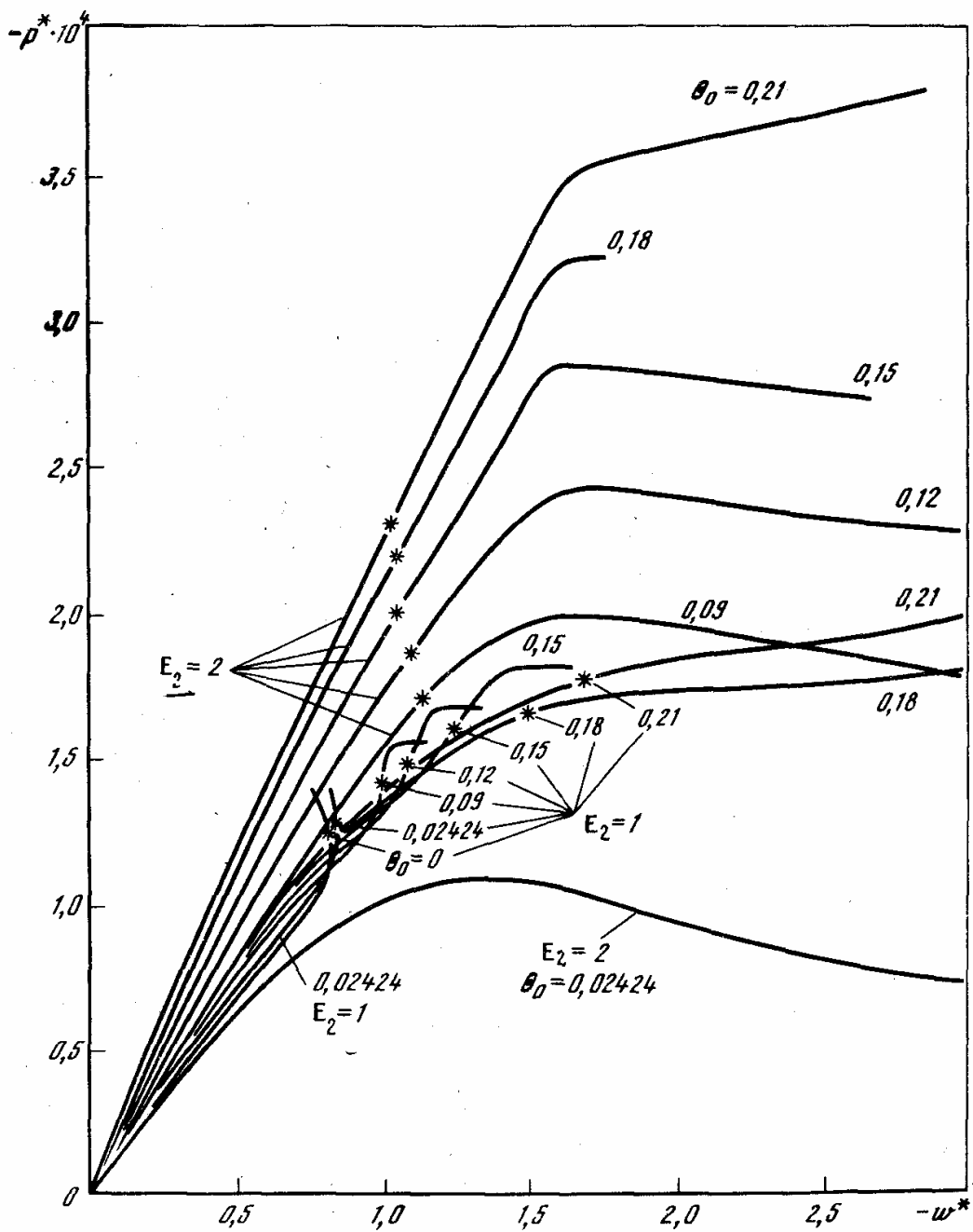
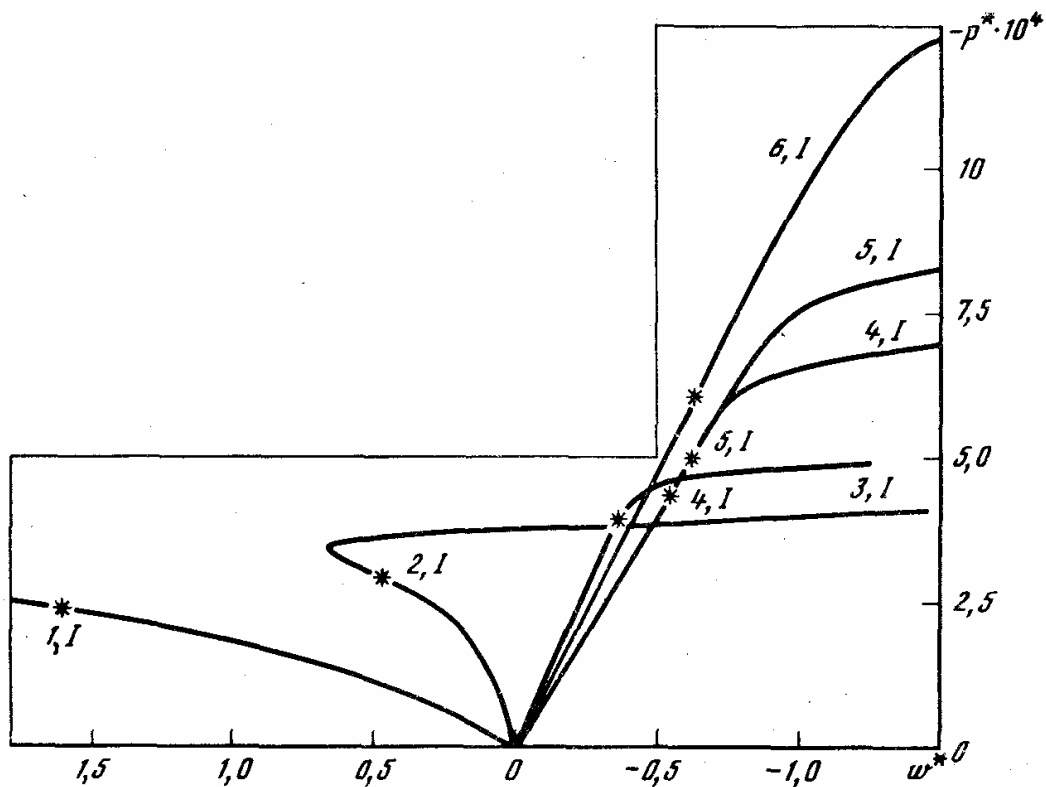


Рис. 6.3



Р и с. 6.4

значений отношений  $E_2/E_1$  и  $G_{13}/E_1$ . Обозначено:  $p^* = p/E_1$ ,  $\sigma_{ik}^* = \sigma_{ik}^1/E_1$ ,

$w^* = w^1/h$ ;  $E_2 = E_2/E_1$ ,  $G_{13} = G_{13}/E_1$ ,  $r_0 = r_0/a$ ,  $e = b/a$ ;  $a = a/h$ ;  $1 \leq i \leq 209$  — номер точки при равномерном разбиении дуги меридиана оболочки,  $i=1$  соответствует левому краю интервала (полюсу или отверстию),  $i=209$  — правому краю при  $\theta_N = \pi/2$ .

Рассмотрим результаты вычислений для эллипсоидального днища с параметрами  $e = 0,5$ ,  $a = 50$ ,  $\theta_0 = 0,15$ ,  $r_0 = 0,2893$ ,  $E_2 = 0,25 \div 4$ ;  $G_{13} = [2(1+\nu_{12})]^{-1}$ ; 0,1; 0,05 (см. табл. 6.9; рис. 6.1—6.2). Вычисления показали, что при рассмотренных значениях параметров  $E_2$  и  $G_{13}$  графики  $p^*(w^*)$ ,  $\sigma^*(p^*)$  мало зависят от параметра  $G_{13}$ . Поэтому на рис. 6.1, 6.2 эти зависимости даны для ряда значений  $E_2$  при  $G_{13} = (2+2\nu_{12})^{-1}$ . При этом на рис. 6.1 и в табл. 6.9  $w^*$  — прогиб у отверстия, который является наибольшим по всему меридиану. На рис. 6.2

Т а б л и ц а 6.8

$G_{13}$	$E_2$					
	0,25	0,50	1,00	1,50	2,00	4,00
$(2+2\nu_{12})^{-1}$	1,I	2,I	3,I	4,I	5,I	6,I
0,10	1,II	2,II	3,II	4,II	5,II	6,II
0,05	1,III	2,III	3,III	4,III	5,III	6,III

Таблица 6.9

$E_2$	$G_{13}$	$-p_n^* \cdot 10^4$	$-w_n^*$	$-\sigma_n^* \cdot 10^2$	$k$
0,25	$(2+2\nu_{12})^{-1}$	0,452	0,69	0,89	0
	0,10	0,441	0,68	0,86	0
	0,05	0,430	0,67	0,81	0
0,50	$(2+2\nu_{12})^{-1}$	0,937	1,55	1,34	0
	0,10	0,928	2,53	1,84	3
	0,05	0,927	2,00	1,45	3
1,00	$(2+2\nu_{12})^{-1}$	1,574	1,25	1,63	4
	0,10	1,531	1,20	1,54	4
	0,05	1,471	1,14	1,43	4
1,50	$(2+2\nu_{12})^{-1}$	1,847	1,15	1,83	4
	0,10	1,745	1,07	1,74	4
	0,05	1,617	0,98	1,56	4
2,00	$(2+2\nu_{12})^{-1}$	2,013	1,04	2,18	4
	0,10	1,854	0,95	1,98	4
	0,05	1,720	0,88	1,84	4
4,00	$(2+2\nu_{12})^{-1}$	2,456	0,84	3,18	4
	0,10	2,238	0,76	2,99	4
	0,05	2,020	0,68	2,68	4

и в табл. 6.9 дано наибольшее напряжение,  $\sigma^* = \max_{s,z}(\sigma_{11}^*, \sigma_{22}^*)$ , которым является окружное напряжение  $\sigma_{22}^*$  у отверстия, за исключением случая  $E_2 = 1$ , тогда наибольшим будет напряжение  $\sigma_{11}^*$  у основания.

На рис. 6.1 звездочками показаны точки НКН  $p_n^*$ ,  $w_n^*$ . Характеристики НДС в момент НПУ приведены также в табл. 6.9, в которой  $k = 0$  означает, что НКН не обнаружена, но приведены значения нагрузки, начиная с которой наблюдается быстрый рост прогибов. Видно, что значения НКН сильно зависят как от значений  $G_{13}$ , так и  $E_2$ : уменьшаются с уменьшением как модулей поперечного сдвига, так и модуля упругости  $E_2$  (по отношению к фиксированному  $E_1$ ). При  $E_2 \geq 1$   $p_n^* < p_0^*$ , где

$p_0^*$  — ОПН. При  $E_2 < 1$   $p_n^* \approx p_0^*$ ,  $w_n^* \ll w_n^*(E_2 = 0,5)$  или  $p_n^*$  не наблюдается

( $E_2 = 0,25$ ). Таким образом, при  $E_2 \geq 1$  расчет необходимо вести по НКН, при  $E_2 < 1$  — по ОПН.

В табл. 6.10 приведены характеристики НДС рассматриваемого эллипсоидального днища в момент НПУ в зависимости от радиуса отверстия  $r_0$  при  $G_{13} = (2+2\nu_{12})^{-1}$ . Графики  $p^*$  ( $w^*$ ) даны на рис. 6.3, где

Таблица 6.10

$E_2$	$\theta_0$	$r_0$	$-p_H^* \cdot 10^4$	$-w_H^*$	$-\sigma_H^* \cdot 10^2$	$k$
1	0	0	1,268	0,96	1,28	3
	0,02424	0,04843	1,270	0,96	1,29	3
	0,09	0,1776	1,400	1,00	1,53	3
	0,12	0,2344	1,456	1,09	1,56	4
	0,15	0,2893	1,574	1,25	1,63	4
	0,18	0,3420	1,678	1,47	1,73	5
	0,21	0,3921	1,781	1,69	2,05	5
2	0,02424	0,04843	1,107	1,39	2,68	0
	0,09	0,1776	1,688	1,13	2,24	3
	0,12	0,2344	1,873	1,09	2,22	3
	0,15	0,2893	2,013	1,04	2,18	4
	0,18	0,3420	2,173	1,03	2,22	4
	0,21	0,3921	2,329	1,02	2,26	5

Таблица 6.11

$E_2$	$G_{13}$	$-p_H^* \cdot 10^4$	$w_H^*, i=1$	$\max_s w_H^*$	$-\sigma_H^* \cdot 10^2$	$k$
0,25	$(2 + 2\nu_{12})^{-1}$	2,350	1,61	1,61	4,51	8
	0,05	2,206	1,55	1,55	4,23	8
0,50	$(2 + 2\nu_{12})^{-1}$	2,844	0,46	-0,61	2,48	12
1,00	$(2 + 2\nu_{12})^{-1}$	3,811	-0,37	-0,45	2,16	11
	0,05	3,637	-0,35	-0,35	2,04	11
1,50	$(2 + 2\nu_{12})^{-1}$	4,484	-0,55	-0,55	2,31	10
2,00	$(2 + 2\nu_{12})^{-1}$	4,982	-0,62	-0,62	2,54	9
4,00	$(2 + 2\nu_{12})^{-1}$	5,950	-0,63	-0,63	4,66	5
	0,05	4,899	-0,51	-0,52	3,82	5

$w^*$  — прогиб у отверстия ( $e = 0,5$ ,  $a = 50$ ). В изотропном случае ( $E_2 = 1$ ) показаны результаты также для оболочки без отверстия.

Видно, что при малом отверстии ( $r_0 = 0,04843$ )  $p_H^*$  мало отличается от  $p_H^*$  для оболочки без отверстия. С дальнейшим ростом радиуса отверстия наблюдается рост НКН. Зависимость НДС оболочки от величины отверстия при  $E_2 = 2$  проявляется сильнее, чем при  $E_2 = 1$ . При малом отверстии ( $r_0 = 0,04843$ ) кривая  $p^*(w^*)$  идет ниже кривых  $p^*(w^*)$  для изотропного материала ( $E_2 = 1$ ). При этом для ортотропного материала НКН  $p_H^*$  не наблюдается: в табл. 6.10 при  $E_2 = 2$ ,  $r_0 = 0,04843$  приведены данные для ОПН ( $k = 0$ ). С ростом отверстия кривые  $p^*(w^*)$  и НКН быстро повышаются и превосходят соответствующие характеристики НДС и НПУ изотропной оболочки.

В табл. 6.11 и на рис. 6.4 приведены результаты вычислений для полусферы с отверстием ( $e = 1$ ,  $a = 50$ ,  $r_0 = 0,2893$ ). В табл. 6.11 даны в момент НПУ значения нагрузки  $p_n^*$ , прогиба у отверстия ( $i = 1$ ) и наибольшего по меридиану  $\max w_n^*$ , а также наибольшее значение напряжения  $\sigma_n^* = \max_{s,z}(\sigma_{11}^*, \sigma_{12}^*)$ , которым будет напряжение  $\sigma_{11}^*$  у отверстия при  $E_2 = 0,25; 0,50$ , напряжение  $\sigma_{11}^*$  у основания при  $E_2 = 1,00; 1,50$ , напряжение  $\sigma_{11}^*$  у отверстия при  $E_2 = 2,00; 4,00$ . Из табл. 6.11 видно, что сферическое днище по сравнению с эллипсоидальным (см. табл. 6.9) несет более высокую НКН, которая растет с ростом отношения модулей  $E_2$ .

На рис. 6.4 показаны зависимости  $p^*(w^*)$  для прогиба у отверстия. В сферическом днище эпюра прогиба по меридиану имеет сложный характер: при  $E_2 = 0,25$   $\max w_n^*$  наблюдается у отверстия, и он противоположен по направлению нагрузке. С ростом  $E_2$  положительный прогиб у отверстия уменьшается, наибольшим становится прогиб в сторону нагрузки — в средней части меридиана ( $E_2 = 0,5; 1,00$ ). При  $E_2 = 1,5 + 4,0$  прогиб будет наибольшим у отверстия и направлен в сторону нагрузки.

## 6.6. УСТОЙЧИВОСТЬ ИЗОТРОПНОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ СРЕДНЕЙ ТОЛЩИНЫ

Рассмотрим задачу расчета НДС и НПУ нетонких изотропных упругопластических эллипсоидальных оболочек постоянной толщины, находящихся под действием внешнего равномерного давления  $p$  [46]. УОС будут (5.1.8), УНР — (4.3.9). В расчетах принят закон линейного упрочнения (5.6.2),  $\lambda = 0,9$ .

а. Полные оболочки с условиями защемления на экваторе. Граничные условия будут (5.5.12), (6.2.12) в полюсе  $\theta_0 = 0$  и (5.7.4), (6.3.6) на экваторе  $\theta_N = \pi/2$ . Результаты вычислений, полученные при  $\nu = 0,4$ ,  $M=6$ , приведены в табл. 6.12—6.15 и на рис. 6.5—6.9 для вытянутых ( $b/a = 5,4, 3,2$ ), сферической ( $b/a = 1$ ) и сплюснутой ( $b/a = 0,5$ ) оболочек. Обозначено:  $e = b/a$ ,  $a = a/h$  — параметры удлиненности и тонкостенности;  $M$  — число отрезков по толщине оболочки при численном нахождении упругопластических интегралов;  $p^* = p(1-\nu^2)/E$ ,  $w^* = w^1/h$ ,  $\sigma_{ik}^* = \max_z \sigma_{ik}^1(1-\nu^2)/E$ ,  $\sigma_{ik}^* = \sigma_{ik}^*(1-\nu^2)/E$  — параметры нагрузки, прогиба, интенсивности напряжений и напряжений; на пределе текучести  $\sigma^* = 0,9e_s$ . Сокращения означают: Л — линейное, Г — геометрически нелинейное, Ф — физически нелинейное, ГФ — геометрически и физически нелинейные решения соответственно; звездочками указаны точки



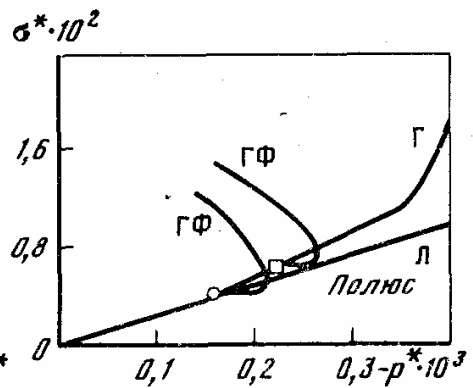
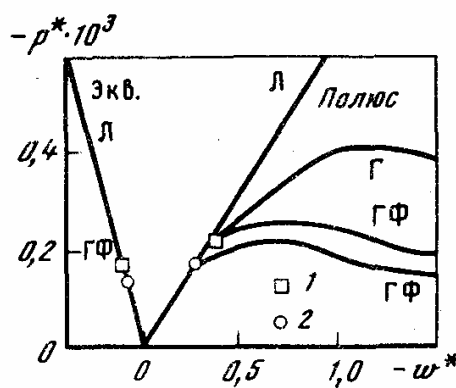
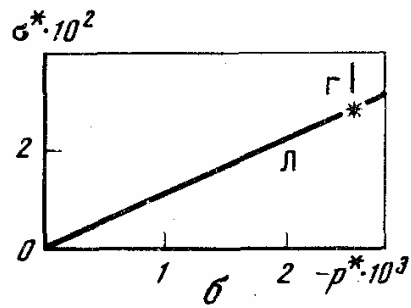
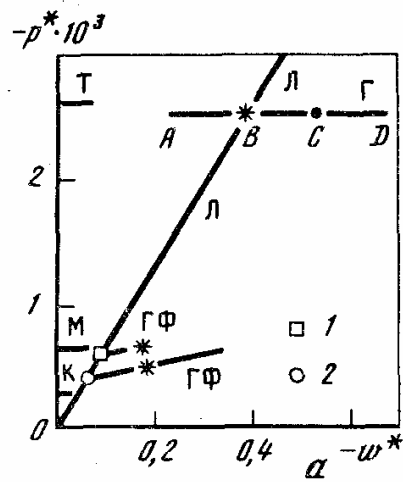
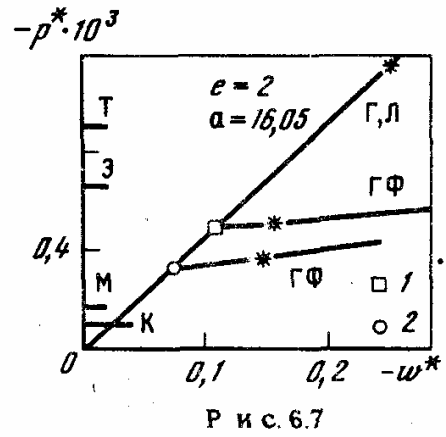
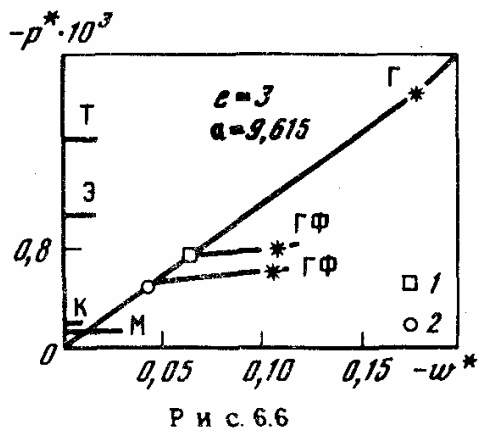
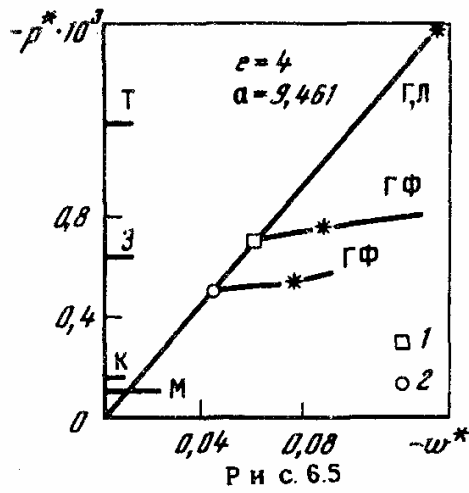


Таблица 6.12

b/a	a/h	θ	λ	e <sub>s</sub> · 10 <sup>3</sup>	НДС при σ <sub>f</sub> =σ <sub>s</sub>			Момент НПУ			Строка
					-p <sub>φ</sub> · 10 <sup>4</sup> (ЭВМ)	-w <sub>φ</sub> · 10 <sup>2</sup> (ЭВМ)	-p <sub>φ</sub> · 10 <sup>4</sup> (6.6.1)	-p <sub>н</sub> · 10 <sup>4</sup>	-w <sub>н</sub> · 10 <sup>2</sup>	-σ <sub>н</sub> · 10 <sup>3</sup>	
4	9,461	0	0	7	7,24	6,08	7,95	16,0	13,7	14,1	3
		π/2	0,9	5	5,15	4,39	5,68	7,83	8,91	6,62	4
3	9,615	0	0	7	7,27/7,95*	6,21/6,52	7,97/7,97	20,8	17,8	18,1	3
		π/2	0,9	5	5,17	4,41	5,69	8,16/8,67	11,1/11,6	6,85/6,38	5/5
2	16,05	π/2	0	7	4,87	10,4	5,16	11,5	24,5	14,9	5
		0	0,9	5	3,48	7,41	3,69	5,21	15,5	6,65	6
1	20	0	0	7	5,86	8,80	6,30	3,91	14,7	4,99	7
		π/2	0,9	5	4,03	6,05	4,50	25,0	37,6	27,0	2
0,5	20	π/2	0	7	1,89	-9,2	2,38	6,61	16,2	6,97	2
		0	0,9	5	1,37	-6,5	1,70	5,34	19,0	5,64	2
0,5	20	π/2	0	7	1,89	-9,2	2,38	4,11	-22,0	13,9	0
		0	0,9	5	1,37	-6,5	1,70	2,64	-15,0	6,79	0
0,5	20	0	0	7	2,19	38,9	3,15	4,11	115,0	22,6	0
		π/2	0,9	5	1,65	27,6	2,25	2,64	73,5	8,28	0
0,5	20	0	0	7	2,19	38,9	3,15	2,16	66,1	6,17	0
		π/2	0,9	5	1,65	27,6	2,25	2,16	66,1	6,17	0

\* В числителе при m = 1, в знаменателе при m = 0.

Т а б л и ц а 6.13

b/a	a/h	$\lambda$	НДС при $\sigma_i = \sigma_s, \theta = \pi/2$			Момент НГУ					$-P_K \cdot 10^4$ [73]	$-P_3 \cdot 10^4$ [133]	
			$-P_\Phi \cdot 10^4$ (ЭВМ)	$-w_\Phi \cdot 10^2$ (ЭВМ)	$-P_\Phi \cdot 10^4$ (6.6.2)	$-P_H \cdot 10^4$	$-w_H \cdot 10^2$	$\sigma_H^* \cdot 10^3$	k	$-P_T \cdot 10^4$ [63]			$-P_M \cdot 10^4$ [51] млн (6.4.1)
2	10	0				32,1	27,2	27,1	4	15,1			
		0,9	7,52	6,32	8,28	9,04	16,6	7,41	5	3,51	3,21		
		0				11,5	24,5	14,9	5	9,23		6,67	
		0,9	4,87	10,4	5,16	5,21	15,5	6,65	6	1,77	1,15		
		0				4,05	22,1	8,26	6	3,51	2,28	2,84	
3	15,87	0,9	3,12	17,0	3,21	3,18	19,1	6,39	7	0,80	0,41		
		0				1,78	20,4	5,22	7	1,37	1,08	1,25	
		0				20,8	17,8	18,1	3	16,7	6,73	11,0	
		0,9	7,27	6,21	7,97	8,16	11,1	6,85	5	1,86	2,08		
		0				6,75	15,5	9,33	4	5,04	2,47	3,50	
4	24,81	0,09	4,64	10,7	4,83	4,79	12,6	6,44	6	0,84	0,67		
		0				2,41	13,6	5,12	4	1,77	1,00	1,38	
		0				0,91	11,8	2,90	5	0,66	0,43	0,60	
		0				16,0	13,7	14,1	3	11,3	3,81	6,62	
		0,9	7,24	6,08	7,95	7,83	8,91	6,62	4	1,17	1,60		
5	36,10	0				4,65	11,2	6,65	3	3,03	0,46		
		0,9	4,44	10,1	4,68	4,55	11,2	6,34	4	0,44	0,46		
		0				1,69	9,65	3,65	4	1,12	0,55	1,00	
		0				0,71	8,52	2,20	4	0,47	0,26	0,38	
		0				11,8	11,4	11,1	3	2,16	1,18		
10	10	0,9	6,75	6,51	7,42	7,21	8,12	6,48	4	0,72	1,18		
		0				4,25	9,10	5,78	3	0,96			
		0				1,29	7,61	2,85	3	0,35			

неосесимметричной критической нагрузки (НКН)  $p_n^*$ . В табл. 6.12, 6.13, кроме данных в момент НПУ, приведены значения нагрузки и прогиба на пределе текучести  $\sigma_i = \sigma_s$ , полученные при расчетах на ЭВМ и подсчитанные по формулам безмоментного решения (7.2.2), (7.2.3):

$$p_\Phi = -2\sigma_s h / \left( R_2 \sqrt{3 - 3R_2/R_1 + (R_2/R_1)^2} \right). \quad (6.6.1)$$

Для вытянутых эллипсоидальных оболочек на рис. 6.5—6.7 (1 —  $e_s = 0,007$ , 2 —  $e_s = 0,005$ ) приведены зависимости  $p^*(w^*)$  на экваторе. Как видно из табл. 6.12 ( $e = 4, 3, 2$ ) и на рис. 6.5—6.7, в нетонких вытянутых оболочках наблюдаются упругопластические деформации уже при малых прогибах:  $w \sim 0,05h$ . В точке  $(p_\Phi^*, w_\Phi^*)$  от упругого решения Г ответвляются упругопластические решения ГФ, которые имеют малый наклон по отношению к оси  $w^*$ . Нагрузка НПУ  $p_n^*$  наблюдается за пределом упругости. При этом нагрузка  $p_n^*$  мало превышает нагрузку  $p_\Phi^*$ , соответствующую моменту появления упругопластических деформаций. Хотя  $w_n^* \gg w_\Phi^*$ . Наибольшие прогибы и напряжения будут на экваторе, где НДС оболочки упругопластическое и близко к безмоментному и где возникают главные вмятины в окружном направлении. НДС в окрестности полюса упругое и моментное.

Полученные результаты позволяют использовать для подсчета неосесимметричной критической нагрузки нетонкой вытянутой эллипсоидальной оболочки формулы (6.6.1), где следует положить  $\theta = \pi/2$ . Тогда

$$p_{\Phi, \pi/2} = -2\sigma_s h / \left( a \sqrt{3 - 3a^2/b^2 + a^4/b^4} \right). \quad (6.6.2)$$

Формулой (6.6.2) можно воспользоваться и для более тонких вытянутых оболочек, если имеются какие-либо данные (например, численное решение в упругой постановке) о том, что в рассматриваемой оболочке нагрузка  $p_n$  наблюдается за пределом упругости.

Для сравнения с экспериментальными и теоретическими результатами, приведенными для нетонких оболочек в работах [63, 133], на рис. 6.5—6.7 нанесены уровни нагрузок Т (расчетные значения НКН в упругой постановке из работы [63]) и Э (экспериментальные значения НКН из работы [133]). Видно сближение экспериментальных данных с результатами упругопластического решения ГФ.

Отметим далее, что неучет изменения метрики по толщине в нетонкой вытянутой оболочке несколько повышает НКН (см. табл. 6.12, строки 5, 6). На рис. 6.5—6.7 уровни К соответствуют НКН по касательно-модульной теории [73], когда НКН с учетом упругопластических деформаций подсчитывают заменой коэффициента  $3G$

Таблица 6.14

$e_s$	$b/a$				
	5	4	3	2	1
0,007	14	17	22	33	84
0,005	19	22	28	42	118
0,003	27	32	40	71	196
0,001	49	—	97	179	588

Таблица 6.15

Упругое решение

$\theta_0$	0				
ГУ	(6.2.6)				
$\theta_N$	$\pi/2$				
ГУ	(6.3.6)	(6.3.10a)	(6.3.9)	(6.3.7)	(6.3.8)
$-p_N^* \cdot 10^4$	11,5	10,1	7,51	10,5	11,4
$k$	5	4	4	5	5
$-\sigma_N^* \cdot 10^3$	14,9	13,2	9,75	17,6	29,5
$-w_N^* \cdot 10^2$	24,5	21,7	16,0	24,6	25,2
Столбец	1	2	3	4	5

Таблица 6.15 (окончание)

	$\lambda = 0,9 \quad e_s = 0,007$				Строка
	M				
	2	4	8	10	
$\theta_0$	0				1
ГУ	(6.2.12)				2
$\theta_N$	$\pi/2$				3
ГУ	(6.3.8)				4
$-p_N^* \cdot 10^4$	Процесс разошелся	5,20	5,20	5,20	5
$k$		6	6	6	6
$-\sigma_N^* \cdot 10^3$		8,93	8,78	8,77	7
$-w_N^* \cdot 10^2$		13,5	13,5	13,5	8
Столбец		13	14	15	16

на касательный модуль  $E_k = d\sigma/d\varepsilon_i$  в величине упругого решения. Уровни  $M(e_s = 0,007)$  на рис. 6.5—6.7 нанесены по решению [51, с. 330, (1.12)], полученному методом Бубнова—Галеркина для тонких упруго-пластических оболочек вращения по теории локальной потери устойчивости. Видно, что как касательно-модульная теория, так и теория локальной потери устойчивости занижают НКН для нетонких вытянутых эллипсоидальных оболочек в 4—5 раз по сравнению с ГФ решением.

		$\lambda = 0,9 \quad e_s = 0,007$					Строка	
		M						
		6						
	0,1	0					0,1	1
	(6.3.6)	(6.2.12)					(6.3.6)	2
	$\pi-0,1$	$\pi/2$					$\pi-0,1$	3
(6.3.10а)	(6.3.6)	(6.3.6)	(6.3.10а)	(6.3.7)	(6.3.8)	(6.3.6)	4	
10,1	7,51	5,21	5,17	5,04	5,20	5,02	5	
4	4	6	6	6	6	6	6	
13,2	9,74	6,65	6,59	6,84	8,80	6,34	7	
21,7	16,0	15,5	14,6	14,5	13,5	10,9	8	
6	7	8	9	10	11	12		

В табл. 6.13 приведены результаты вычислений для вытянутых эллипсоидальных оболочек в зависимости от параметра тонкостенности  $a$  при  $e_s = 0,007$ . Даны характеристики НДС на пределе текучести  $\sigma_i = \sigma_s$ , в момент НПУ, а также значения НКН  $p_T^*$  — по решению [63],  $p_3^*$  — по экспериментальным результатам [133],  $p_K^*$  — по касательно-модульной теории [73],  $p_M^*$  — по теории локальной потери устойчивости для упругой оболочки (6.4.1) и для упругопластической оболочки [51]. Данные табл. 6.13 подтверждают эффективность формулы (6.6.2). С помощью результатов упругого решения ( $\lambda = 0$ ) табл. 6.13 и 6.3 (см. разд. 6.4) можно, построив графики  $\sigma_H^*(a)$  для момента НПУ, установить те значения параметра тонкостенности  $a_s$  (назовем их критическими), для которых НПУ оболочки будет происходить на пределе текучести. Значения  $a_s$  в зависимости от параметра удлиненности  $b/a$  и предела текучести  $e_s$  приведены в табл. 6.14 ( $\nu = 0,4$ ) в столбцах  $b/a = 5,4, 3, 2$ . При  $a < a_s$  НПУ оболочки будет происходить за

пределом упругости, и для оценки НКН вытянутой оболочки можно воспользоваться формулой (6.6.2).

Рассмотрен вопрос о влиянии на НДС и НПУ вытянутой эллипсоидальной оболочки граничных условий на экваторе и малого отверстия около полюса на примере оболочки с параметрами  $bla = 2$ ,  $alh = 16,05$ . Полученные при этом результаты для момента НПУ приведены в табл. 6.15 (стб. 1—12). В строках 1, 2 (см. табл. 6.15) указаны начальное значение угла  $\theta_0$  и ГУ при  $\theta = \theta_0$  для УНР, в строках 3, 4 — конечные значения угла  $\theta_N$  и ГУ при  $\theta = \theta_N$  для УНР. ГУ для УОС получаются из ГУ для УНР, если исключить условия для величин  $\delta v_{2,k}$ ,  $\delta T_{12,k}$ ,  $\delta \vartheta_{II,k}$ ,  $\delta M_{12,k}$ . В табл. 6.15 приведены значения НКН  $p_n^*$ , соответствующие ей наибольшие по меридиану оболочки значения интенсивности напряжений  $\sigma_n^*$  и прогиба  $w_n^*$ , число волн  $k$ . Отметим, что для ГУ шарнирного закрепления (6.3.7)  $\max_s w$  и  $\max_s \sigma_i$  наблюдается на некотором удалении от экватора,  $\max_s w$  для жесткой заделки (6.3.8) — также на некотором удалении от экватора. В остальных случаях  $\max_s w$ ,  $\max_s \sigma_i$  будут на экваторе оболочки.

Из табл. 6.15 видно, что в упругом решении значение  $p_n^*$  сильно зависит от ГУ на экваторе (стб. 1—5). Малый вырез около полюса, когда на краю отверстия имеют место условия защемления (6.3.6), мало влияет на НКН (стб. 6 по сравнению с 2). В стб. 7 приведены результаты, когда расчет проведен для полного меридиана оболочки  $0,1 \leq \theta \leq \pi - 0,1$  при малом отверстии у полюсов. Результат подобного расчета совпал с расчетом при ГУ (6.2.6)—(6.3.9) (стб. 7 по сравнению с 3).

В упругопластическом решении различия в ГУ на экваторе мало сказываются на значениях НКН  $p_n^*$  (стб. 8—12). Однако влияние ГУ на поведение оболочки нужно рассматривать не только через величину НКН, но и через значения напряжений. Для случая жесткой заделки на экваторе (6.3.8) интенсивность напряжений в момент НПУ становится в 1,4 раза больше предела текучести  $\sigma_s$ . Тогда определяющей в несущей способности оболочки может быть не нагрузка НПУ, а нагрузка разрушения  $p_{пч} < p_n$ , соответствующая пределу прочности  $\sigma_{пч}$  на истинной диаграмме растяжения материала.

С учетом внесения поправок на ГУ на основе данных табл. 6.15 результаты, приведенные в табл. 6.12—6.14 для ГУ (6.2.6), (6.2.12)—(6.3.6), можно использовать для случая других ГУ.

В табл. 6.15 приведены также данные о зависимости результатов упругопластического решения от числа делений  $M$  по толщине оболочки (стб. 11, 13—16). Видно, что в рассматриваемом примере удовлетворительные результаты получаются при  $M = 4$ . Отметим, что все рассмотренные в книге упругопластические задачи решены при  $M = 6$ .

Результаты вычислений для сферической оболочки приведены в табл. 6.12 ( $b/a = 1$ ) и на рис. 6.8 ( $e = 1, a = 20$ ). На рис. 6.8, а решение Л (прямая  $OB$ ) совпадает с упругим безмоментным решением; уровень  $T$  соответствует НКН по формуле Цолли—Лейбензона (6.3.11), точка  $B$  — НКН, полученная в расчетах с учетом нетонкости оболочки. Характерно, что для сферической области в точке  $B$  от безмоментного решения  $OB$  ответвляется, кроме неосесимметричного, также осесимметричное моментное решение  $ABCD$ , когда происходит волнообразование по меридиану сферы. Ветвь  $BA$  соответствует  $\min w^*$  (впадина волны), ветвь  $BCD$  —  $\max w^*$  (гребень волны).

Линии ГФ на рис. 6.8, а дают зависимость  $p^*(w^*)$  с учетом упруго-пластических деформаций. Видно, что в рассматриваемой оболочке НПУ происходит за пределом упругости. НКН в 4—5 раз меньше нагрузки, полученной в упругой постановке. НДС всей оболочки упруго-пластическое, близкое к безмоментному.

Так же как и в вытянутых оболочках, в сферической оболочке нагрузки  $p_n$  и  $p_\phi$  отличается мало, что наряду с близостью НДС в момент НПУ к безмоментному позволяет использовать для оценки нагрузки  $p_n$  формулу (6.6.1):

$$p_\phi = -2\sigma_s h/a, \quad (6.6.3)$$

где  $a$  — радиус сферы.

Из рис. 6.8, а следует, что для сферической оболочки решение [51] (уровень  $M$ ) и ГФ решение совпадают. Касательно-модульная теория (уровень  $K$ ) значительно занижает НКН ( $e_s = 0,007$  (1), 0,005 (2)). Критические значения параметра тонкостенности  $a_s$  можно получить с помощью формулы (6.3.11) для  $p_T$ :

$$a_s = 2(1 + \nu)/(3e_s \sqrt{3(1 - \nu^2)}).$$

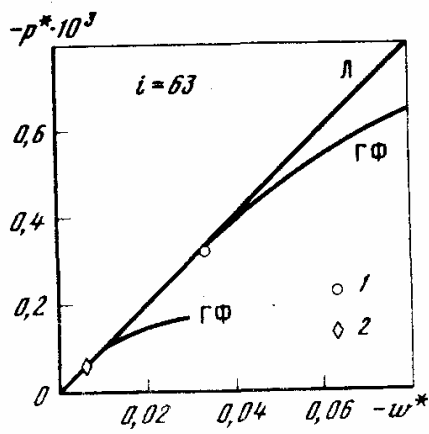
Численные значения  $a_s$  приведены в табл. 6.14 в столбце  $b/a = 1$ . Видно, что со снижением предела текучести  $e_s$  даже очень тонкие сферические оболочки будут терять устойчивость за пределом упругости. При этом отношение

$$p_T/p_\phi = a_s/a$$

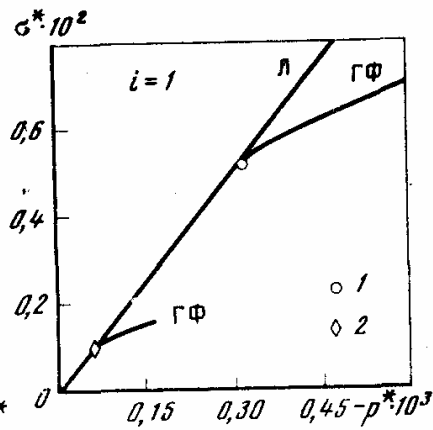
Таблица 6.16

$a/h$	Вид основного состояния	$\lambda$	$e_s \cdot 10^3$	$-p_\phi^* \cdot 10^5$	$-p_n^* \cdot 10^5$	$-w_n^* \cdot 10$	$\sigma_n^* \cdot 10^3$	$k$	Строка
50	Л	0			12,2	7,55	8,3	3	1
	Г	0			10,3	8,24	8,4	4	2
	Ф	0,9	5	7,69	9,79	6,19	5,5	3	3
			3	4,20	5,85	4,88	3,5	4	4
			5	6,85	8,25	6,33	5,4	4	5
ГФ	0,9	7	9,22	10,2	8,12	7,4	4	6	
		Ф	0,9	5	3,75	2,72	7,75	3,9	4
100	ГФ	0,9	1	0,71	1,05	4,95	1,3	5	8
			5	3,18	2,38	7,87	3,8	4	9

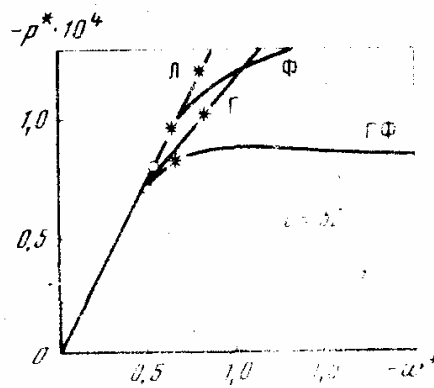




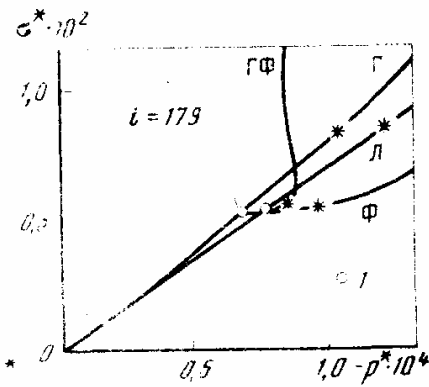
Р и с. 6.10



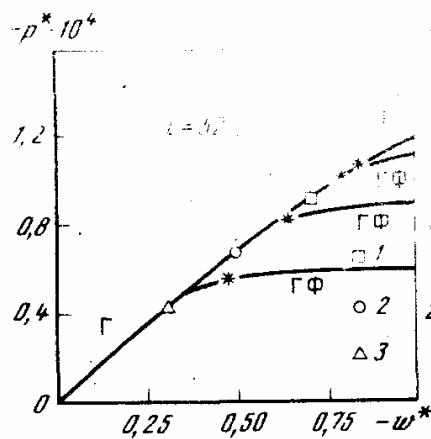
Р и с. 6.11



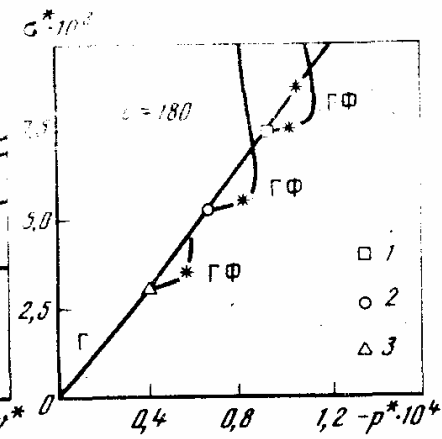
Р и с. 6.12



Р и с. 6.13



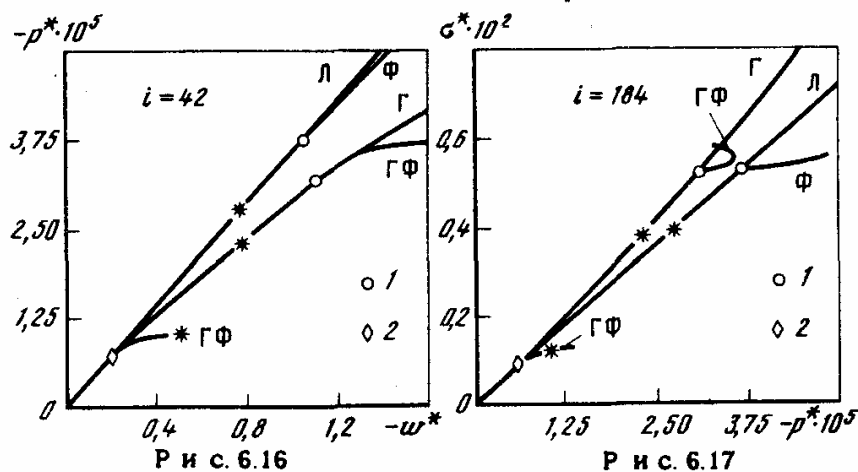
Р и с. 6.14



Р и с. 6.15

показывает, что при  $a < a_s$  снижение НКН за счет возникновения упругопластической деформации может быть многократным.

В табл. 6.12 в строках  $b/a = 0,5$  и на рис. 6.9 ( $e = 0,5$ ;  $a = 20$ ) показаны результаты вычислений для нетонкой сплюснутой эллипсоидальной оболочки, в которой НПУ не наблюдается ( $e_s = 0,007$  (1),  $0,005$  (2)). Поэтому в табл. 6.12 в столбцах "момент НПУ" приведены данные для осесимметричной предельной нагрузки (ОПН) на кривой деформирования.



В отличие от вытянутых и сферических оболочек, в нетонкой сплюснутой оболочке нет областей, где НДС близко к безмоментному. Наибольший прогиб будет в полюсе. Уругопластические деформации вначале возникают на экваторе при нагрузке  $p_{\Phi, \pi/2}$ , затем в полюсе при  $p = p_{\Phi, 0}$ , средняя часть меридиана остается в упругом состоянии. С увеличением прогибов интенсивность напряжений становится наибольшей в полюсе.

Нагрузка  $p_{\Phi, \pi/2}$  можно оценить по формуле (6.6.2), нагрузку  $p_{\Phi, 0}$  — по формуле (6.6.1), положив в ней  $\theta = 0$ :

$$p_{\Phi, 0} = -2\sigma_s hb/a^2. \tag{6.6.4}$$

Как следует из табл. 6.12, значения нагрузок  $p_{\Phi, \pi/2}$ ,  $p_{\Phi, 0}$ , полученные в расчетах на ЭВМ и подсчитанные по формулам (6.6.2), (6.6.4), отличаются значительно. Для нетонкой сплюснутой оболочки ОПН находятся в интервале значений нагрузок, подсчитанных по формулам (6.6.2), (6.6.4). Отметим, что данные о влиянии малого выреза около полюса и граничных условий на экваторе на НДС и НКН сплюснутой оболочки были приведены в разд. 6.3.

б. Сплюснутые эллипсоидальные днища, ослабленные центральным отверстием  $\theta_0$ . В расчетах принято:  $b/a = 0,5$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $N = 200$ ,  $M = 6$ ,  $\theta_0 = 0,092$ . Края оболочки у отверстия  $\theta_0$  и на экваторе  $\theta_N = \pi/2$  шарнирно закреплены: граничные условия (5.7.2), (6.3.7) при  $\theta = \theta_0$  и (5.7.5), (6.3.7) при  $\theta = \theta_N$ . Результаты вычислений приведены в табл. 6.16 и на рис. 6.10—6.17. Кроме обозначений, описанных в п.а., здесь принято:  $1 \leq i \leq 201$  — номер точки меридиана (для отверстия  $i = 1$ , для экватора  $i = 201$ ).

На рис. 6.10, 6.11 даны результаты для нетонкого днища ( $a = 10$ ), где показаны графики  $p^*(w^*)$ ,  $\sigma^*(p^*)$  для материалов с пределами текучести  $e_s = 0,005$  (1), 0,001 (2). Для нетонкого днища в рассматриваемом диапазоне нагрузок НПУ не наблюдается.

Для оболочки с параметром тонкостенности  $a = 50$  результаты вычислений даны в табл. 6.16 и на рис. 6.12—6.15. Из табл. 6.16 и рис. 6.12, 6.13 ( $e_s = 0,005$  (1)) видно большое различие между решениями, полученными в разной постановке: решения Л, Г, Ф завышают НКН  $p_H$  (отмечена звездочкой) по сравнению с решением в ГФ постановке. Из

рис. 6.14, 6.15 следует, что в рассматриваемой оболочке НПУ происходит за пределом упругости, при этом с уменьшением предела текучести материала  $e_s$ , НКН сильно снижается ( $e_s = 0,007$  (1), 0,005 (2), 0,003 (3)).

В табл. 6.16 и на рис. 6.16, 6.17 приведены результаты вычислений для тонкого днища ( $a = 100$ ). Видно, что в зависимости от предела текучести  $e_s$ , НПУ тонкой оболочки происходит или в упругой области ( $e_s = 0,005$  (1)), или за пределом упругости ( $e_s = 0,001$  (2)).

В заключение раздела отметим следующее. Как показали результаты вычислений и как видно на рис. 6.9, 6.11, 6.13, 6.15, 6.17, во всех рассмотренных здесь задачах на восходящей ветке кривой нагрузка—перемещение, т.е. в момент неосесимметричной потери устойчивости и вплоть до осесимметричной предельной нагрузки, разгрузка в оболочке (уменьшение интенсивности напряжений) не наблюдалась.

## ГЛАВА 7

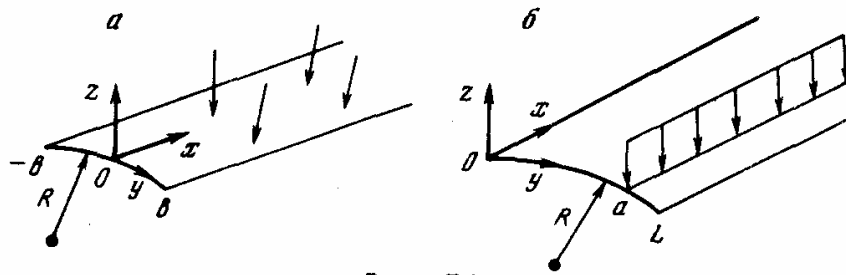
### НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК, ДОПУСКАЮЩИЕ ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ

В теории оболочек малое к общему количеству работ, но особое место занимают точные решения, полученные аналитически. Малое место потому, что уравнения теории оболочек даже в линейной постановке редко поддаются точному интегрированию. Обычно такими являются одномерные задачи (осесимметричная оболочка вращения, длинная цилиндрическая оболочка).

На основе же точных аналитических решений можно иметь эталоны для проверки надежности и отладки алгоритмов и программ при численном решении задач на ЭВМ. Большое значение точные решения имеют для качественного исследования в задачах с особенностями, в случае неединственности решения в нелинейных задачах. Численным интегрированием может быть получена лишь одна, обычно невозмущенная, ветвь решения. Введением же подходящего возмущения можно выявить и другие решения, которые ожидаются по аналогии с точным аналитическим решением хотя бы в родственной задаче. Из точных решений отметим работы [2, 49, 64, 78, 86]. Далее приводятся несколько точных решений.

#### 7.1. ИЗГИБ ДЛИННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Качественному исследованию и классификации задач общей теории тонких оболочек посвящены работы Х.М. Муштари, например [88]. Наряду с этим интересно и количественное сравнение результатов, полученных для непологий оболочки по общим уравнениям и соотношениям теории пологих оболочек. Это сравнение особенно важно для локальных нагрузок.



Р и с. 7.1

В данном разделе приводится линейное решение задачи изгиба тонкой длинной цилиндрической оболочки на основе общих уравнений теории оболочек и теории пологих оболочек [26]. Разобраны случаи равномерного давления и локальной нагрузки, действующей вдоль образующей. Приведены численные результаты для оболочки с жестко заделанными краями. Принята теория Кирхгофа—Лява. Выбор координатной системы и размеры оболочки показаны на рис. 7.1 для случая равномерного давления (а) и для случая локальной нагрузки, действующей вдоль образующей  $y = a$  (б).

Цилиндрический изгиб непологий длинной оболочки описывается следующими соотношениями [88] — уравнения равновесия:

$$\frac{dT_y}{dy} + kQ_y = 0, \quad (7.1.1a)$$

$$\frac{dQ_y}{dy} - kT_y + p = 0, \quad (7.1.1б)$$

$$dM_y / dy = Q_y, \quad (7.1.1в)$$

где  $k = 1/R$  — кривизна панели;  
деформации:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = 0, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{dv}{dy} + kw, \quad \varepsilon_{xy} = 0, \\ \kappa_{xx} = 0, \quad \kappa_{yy} = -\frac{d^2w}{dy^2} - k^2w, \quad \kappa_{xy} = 0 \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

( $\kappa_{yy}$  — по формуле из работы [14]);  
закон Гука:

$$T_y = N\varepsilon_{yy}, \quad M_y = D\kappa_{yy}, \quad N = Eh/(1 - \nu^2), \quad D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)], \quad (7.1.3)$$

напряжения:

$$\sigma_y^M = T_y/h, \quad \sigma_y^H = 6M_y/h^2, \quad z = 0,5h. \quad (7.1.4)$$

Чтобы перейти от формул (7.1.1)—(7.1.4) к формулам теории пологих оболочек [88], необходимо заменить (7.1.1a) на уравнение

$$dT_y/dy = 0 \quad (7.1.5)$$

и положить

$$\kappa_{yy} = -d^2w/dy^2. \quad (7.1.6)$$

Уравнения (7.1.1)—(7.1.6) допускают точное интегрирование. Рассмотрим примеры.

1. Цилиндрический изгиб непологой оболочки под действием равномерной нагрузки  $p = \text{const}$ .

а. Решение по теории непологих оболочек:

$$\begin{aligned} T_y &= C_1 \cos ky + C_2 \sin ky + pR, \quad Q_y = C_1 \sin ky - C_2 \cos ky, \\ M_y &= -R(C_1 \cos ky + C_2 \sin ky + pR) + C_3, \\ w &= -C_3(k^2 D)^{-1} + C_4 \sin ky + C_5 \cos ky + 3(C_2 \sin ky + \\ &+ C_1 \cos ky)(4Dk^3)^{-1} + (C_1 \sin ky - C_2 \cos ky) y(2Dk^2)^{-1}, \\ v &= C_6 + (C_1 \sin ky - C_2 \cos ky + py) RN^{-1} - (-C_3 y(kD)^{-1} - \\ &- C_4 \cos ky + C_5 \sin ky) - 5(C_1 \sin ky - C_2 \cos ky)(4Dk^3)^{-1} + \\ &+ (C_1 \cos ky + C_2 \sin ky) y(2Dk^2)^{-1}. \end{aligned} \quad (7.1.7)$$

Константы интегрирования  $C_1 + C_6$  определяются из граничных условий. Для случая жестко заделанных краев оболочки, когда

$$w = v = dw/dy = 0 \text{ при } y = \pm b, \quad (7.1.8)$$

получим ( $\sin bk \neq 0$ ):

$$\begin{aligned} C_2 = C_4 = C_6 = 0, \quad C_1 &= pbR/(NA), \\ C_3 &= -\frac{pbR}{2NA} \left( \frac{\cos bk}{k} + \frac{b}{\sin bk} \right), \end{aligned} \quad (7.1.9)$$

$$C_5 = -\frac{pbR}{NA} \left( -\frac{1}{4Dk^3} + \frac{b}{2Dk^2} \text{ctg} bk \right),$$

$$A = \sin bk \left( \frac{1}{kN} - \frac{1}{Dk^3} \right) + \frac{b}{2Dk^2} \left( \cos bk + \frac{bk}{\sin bk} \right).$$

б. Приведем общее решение системы (7.1.1)—(7.1.6) по теории пологих оболочек:

$$\begin{aligned} T_y = C_1, \quad Q_y &= (kC_1 - p)y + C_2, \quad w = C_1 \frac{y^4}{24} - C_2 \frac{y^3}{6} + C_3 \frac{y^2}{2} + \\ &+ C_4 y + C_5, \quad v = \frac{C_1}{N} y - k \left( C_1 \frac{y^5}{120} - C_2 \frac{y^4}{24} + C_3 \frac{y^3}{6} + \right. \\ &\left. + C_4 \frac{y^2}{2} + C_5 y \right) + C_6, \quad C_1 = \frac{p - kC_1}{D}, \quad C_2 = \frac{C_2}{D}. \end{aligned} \quad (7.1.10)$$

Если на кромках оболочек выполняются условия (7.1.8), то

$$C_2 = C_4 = C_6 = 0, \quad C_1 = pkb^4/(45B), \quad C_1 = p/(NB),$$

$$C_3 = -pb^2/(6NB), \quad C_5 = pb^4/(24NB), \quad B = D/N + k^2 b^4/45.$$

Некоторые численные результаты, полученные по формулам общей теории, приведены в табл. 7.1 для ряда значений параметров пологости  $bk$  и тонкостенности  $hk$ . Здесь приняты обозначения:  $w = 12(1 -$

Таблица 7.1

Коэффициент	$hk$	$bk$			
		3	$\pi/2$	$\pi/4$	$\pi/8$
$\xi_0$	0,10	0,56	1,01	1,84	1,57
	0,05	1,11	2,03	3,92	5,76
	0,01	5,55	10,2	20,0	39,2
$\alpha_0$	0,10	10,0	9,94	9,11	3,79
	0,05	20,0	20,0	19,5	14,3
	0,01	100	100	99,9	98,5
$\beta_0$	0,10	-0,45	0,72	4,87	9,30
	0,05	-0,45	0,72	5,18	17,0
	0,01	-0,45	0,72	5,29	23,2
$\alpha_b$	0,10	10,0	10,0	9,37	4,27
	0,05	20,0	20,0	19,7	14,8
	0,01	100	100	99,9	98,6
$-\beta_b$	0,10	0,55	2,63	10,8	19,0
	0,05	0,55	2,63	11,5	34,9
	0,01	0,55	2,64	11,7	47,5

$-v^2)bp\zeta/E, \sigma_y^M = \alpha p, \sigma_y^H = \beta p, z = 0,5h$ . В табл. 7.1 даны значения параметров прогиба и напряжений в центре оболочки  $\zeta_0, \alpha_0, \beta_0$  и на краю  $\alpha_b, \beta_b$ . Сравнение показывает, что наибольшая относительная разница между значениями прогиба и полного напряжения, полученными по общей теории и теории пологих оболочек, оказывается при  $bk = 3, hk = 0,1$ . Для случая равномерного давления она составляет 6—7%.

2. Цилиндрический изгиб непологой оболочки под действием локальной нагрузки, действующей по образующей  $y = a$ . Здесь и в дальнейшем будут использованы обобщенные функции [91] — дельта-функция, имеющая особенность в точке  $y = d$ :

$$\delta(y-d) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \neq d, \\ \infty & \text{при } y = d; \end{cases} \quad (7.1.11)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y-d) dy = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y-d) f(y) dy = f(d);$$

единичная функция, имеющая конечный разрыв при  $y = d$ :

$$e(y-d) = \int \delta(y-d) dy = \begin{cases} 0 & \text{при } y < d, \\ 1 & \text{при } y > d. \end{cases} \quad (7.1.12)$$

ломаная, имеющая излом в точке  $y = d$ :

$$(y-d)_+ = \int e(y-d) dy = \begin{cases} 0 & \text{при } y < d, \\ y-d & \text{при } y \geq d. \end{cases} \quad (7.1.13)$$

Таблица 7.2

Коэффициент	$hk$	$Lk$			
		6	$\pi$	$\pi/2$	$\pi/4$
$10^3 \zeta_{0,5L}$	0,10	123	12,6	3,04	1,64
	0,05	123	11,9	1,77	0,84
	0,01	123	11,7	1,33	0,20
$10^3 \zeta_{0,45L}$	0,10	106	10,9	2,81	1,58
	0,05	106	10,2	1,57	0,80
	0,01	106	9,97	1,13	0,17
$10^2 \alpha_{0,5L}$	0,10	2,94	45,6	102	87,0
	0,05	2,94	45,8	110	167
	0,01	2,94	45,9	113	232
$\beta_{0,5L}$	0,10	18,2	9,13	5,04	4,44
	0,05	36,4	18,2	9,21	6,46
	0,01	182	90,9	44,6	22,7

Тогда интенсивность давления  $p$  вводится с помощью дельта-функции  $\delta(y - a)$ :

$$p = Q\delta(y - a),$$

где  $Q$  — погонная нагрузка на образующей  $y = a$ .

а. Решение по теории непологих оболочек:

$$T_y = C_1 \cos ky + C_2 \sin ky + e(y - a)Q \sin k(y - a),$$

$$Q_y = C_1 \sin ky + C_2 \cos ky - e(y - a)Q \cos k(y - a),$$

$$M_y = -R(C_1 \cos ky + C_2 \sin ky + e(y - a)Q \sin k(y - a)) + C_3,$$

$$w = C_4 \cos ky + C_5 \sin ky - \frac{C_3}{k^2 D} + \frac{1}{k^2 D} \left[ C_1 \left( \frac{y}{2} \sin ky + \frac{\cos ky}{4k} \right) + C_2 \left( -\frac{y}{2} \cos ky + \frac{\sin ky}{4k} \right) \right] + e(y - a) \frac{Q}{k^2 D} \left[ -\frac{y - a}{2} \cos k(y - a) + \frac{\sin k(y - a)}{2k} \right],$$

$$v = C_6 + \frac{1}{Nk} \left[ C_1 \sin ky - C_2 (\cos ky - 1) + e(y - a)Q(1 - \cos k(y - a)) \right] - (7.1.14)$$

$$- \left\{ C_4 \sin ky + C_5 (1 - \cos ky) - C_3 \frac{y}{kD} + \frac{1}{k^3 D} \left[ C_1 \left( \frac{3}{4} \sin ky - \frac{ky}{2} \cos ky \right) + \right. \right.$$

$$\left. + C_2 \left( -\frac{ky}{2} \sin ky - \frac{3}{4} (\cos ky - 1) \right) + e(y - a)Q(1 - \cos k(y - a)) - \right.$$

$$\left. - \frac{k(y - a)}{2} \sin k(y - a) \right\}.$$

Коэффициент	$Lk$			
	6	$\pi$	$\pi/2$	$\pi/4$
$10^2\alpha_{0,45L}$	17,6	52,8	106	88,9
	17,6	53,1	113	169
	17,6	53,2	116	233
$\beta_{0,45L}$	9,42	4,78	2,87	2,30
	18,9	9,49	4,91	4,26
	94,3	47,3	23,1	12,0
$10^2\alpha_0$	4,15	50,0	107	99,5
	4,15	50,0	113	174
	4,15	50,0	115	233
$\beta_0$	17,5	6,48	1,74	-3,07
	35,0	13,2	5,38	-1,20
	175	66,3	30,2	-13,7

При граничных условиях (7.1.8) получим

$$C_6 = 0, C_5 = C_2 / (4Dk^3), C_4 = -C_1 / (4Dk^3) + C_3 / (k^2 D) \quad (7.1.15)$$

и систему трех уравнений для  $C_1, C_2, C_3$ :

$$C_1 kL \sin kL + C_2 (-kL \cos kL + \sin kL) + 2C_3 k (\cos kL - 1) = Q [(L - a)k \cos k(L - a) - \sin k(L - a)], \quad (7.1.16)$$

$$C_1 (\sin kL + kL \cos kL) + C_2 kL \sin kL - 2C_3 k \sin kL = -Qk(L - a) \sin k(L - a),$$

$$C_1 \left[ \left( \frac{k^2 h^2}{6} - 1 \right) \sin kL + kL \cos kL \right] + C_2 \left[ \left( 2 - \frac{k^2 h^2}{6} \right) (\cos kL - 1) + kL \sin kL \right] + 2C_3 k (kL - \sin kL) = -Q \left[ (1 - \cos k(L - a)) \left( \frac{k^2 h^2}{6} - 2 \right) + k(L - a) \sin k(L - a) \right].$$

Отметим, что система (7.1.16) при некоторых значениях параметров  $kL$  и  $kh$  оказывается плохо обусловленной, поэтому в коэффициентах ее третьего уравнения оставлены члены  $k^2 h^2 / 6$ .

б. Решение по теории пологих оболочек:

$$T_y = C_1 Q_y = C_2 + C_1 k y - e(y - a)Q,$$

$$M_y = C_3 + C_2 y + C_1 k \frac{y^2}{2} - e(y - a)Q(y - a),$$



Таблица 7.3

Различие	hk	Lk			
		6	π	π/2	π/4
$\Delta\zeta_{0,5L}$	0,10	42	13	2,8	2,0
	0,05	43	13	2,9	1,1
	0,01	43	14	3,5	0,8
$\Delta\zeta_{0,45L}$	0,10	43	13	2,7	2,0
	0,05	43	14	2,9	1,1
	0,01	43	14	3,6	0,8
$\Delta\sigma_{0,5L}$	0,10	5,7	0,7	1,8	-1,5
	0,05	6,6	1,8	-0,4	-0,9
	0,01	7,2	2,6	0,5	-0,1
$\Delta\sigma_{0,45L}$	0,10	5,7	1,1	-2,2	-1,5
	0,05	6,7	2,5	-0,5	-1,0
	0,01	7,4	3,4	0,7	-0,1
$\Delta\sigma_0$	0,10	34	9,6	3,6	2,6
	0,05	35	10	2,5	0,3
	0,01	36	11	2,7	0,6

$$w = C_5 + C_4 + \frac{1}{D} \left[ -C_3 \frac{y^2}{2} - C_2 \frac{y^3}{6} - C_1 k \frac{y^4}{24} + e(y-a)Q \frac{(y-a)^3}{6} \right],$$

$$v = C_6 + C_1 \frac{y}{N} - \frac{k}{D} \left[ C_5 D y + C_4 D \frac{y^2}{2} - C_3 \frac{y^3}{6} - C_2 \frac{y^4}{24} - C_1 k \frac{y^5}{120} + e(y-a)Q \frac{(y-a)^4}{24} \right]. \quad (7.1.17)$$

При граничных условиях (7.1.8)  $C_4 = C_5 = C_6 = 0$ , а константы  $C_1, C_2, C_3$  удовлетворяют следующей системе:

$$kLC_1 + 4C_2 + 12 \frac{C_3}{L} = 4 \frac{(L-a)^3}{L^3} Q,$$

$$kLC_1 + 3C_2 + 6 \frac{C_3}{L} = 3 \frac{(L-a)^2}{L^2} Q,$$

$$\left( kL + 10 \frac{k^2 h^2}{k^3 L^3} \right) C_1 + 5C_2 + 20 \frac{C_3}{L} = 5 \frac{(L-a)^4}{L^4} Q.$$

В табл. 7.2. приведены численные результаты по формулам общей теории, при этом введены обозначения:

$$w = \frac{Q}{Dk^3} \zeta, \quad \sigma_y^* = \frac{Q}{h} \alpha, \quad \sigma_y^* = \frac{Q}{h} \beta,$$

и принято  $a = 0,5L$ ,  $z = 0,5h$ . Значения параметров прогиба  $\zeta$ , напряжений  $\alpha, \beta$  даны на краю панели:  $\alpha_0, \beta_0$ , в окрестности приложения нагрузки:  $\zeta_{0,45L}, \alpha_{0,45L}, \beta_{0,45L}$ , под нагрузкой:  $\zeta_{0,5L}, \alpha_{0,5L}, \beta_{0,5L}$ .

В табл. 7.3 дана относительная разница (в %) значений параметра прогиба  $\Delta\zeta$  и полного напряжения  $\Delta\sigma$ , полученных по общей теории и теории пологих оболочек. Видно, что величины  $\Delta\zeta$  и  $\Delta\sigma$  при больших значениях параметра  $Lk$  могут достигать 30—40%. Величины  $\Delta\zeta$  и  $\Delta\sigma$  при заданном  $Lk$  мало зависят от параметра тонкостенности  $hk$ . С уменьшением значения  $Lk$ , т.е. когда оболочка становится более полой, относительная разница  $\Delta\zeta, \Delta\sigma$  быстро убывает. Если в значениях прогиба и напряжений длинной оболочки допустима погрешность порядка 10%, то, начиная с  $Lk = \pi$ , можно пользоваться уравнениями пологих оболочек даже в случае действия локальной нагрузки. В пользу соотношений теории пологих оболочек говорит и то обстоятельство, что с уменьшением значений  $Lk$  в решениях по общей теории (7.1.7)—(7.1.9), (7.1.14)—(7.1.16) возникают разности близких величин. Тогда оказывается необходимым во избежание потери точности работать с большим числом значащих цифр (8—9).

## 7.2. БЕЗМОМЕНТНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

Приведем необходимые соотношения в задаче об осесимметричной деформации оболочки вращения в безмоментной постановке [95]: уравнения равновесия:

$$\frac{drT_1}{ds} - T_2 \cos \theta = 0, \quad k_1 T_1 + k_2 T_2 - p = 0, \quad (7.2.1)$$

где  $p$  — равномерное нормальное давление; усилия в оболочек без отверстия в полюсе:

$$T_1 = \frac{pR_2}{2}, \quad T_2 = T_1 \left( 2 - \frac{R_2}{R_1} \right); \quad (7.2.2)$$

напряжения:

$$\sigma_{11} = T_1/h, \quad \sigma_{22} = T/h; \quad (7.2.3)$$

деформации:

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{ds} + k_1 w, \quad \varepsilon_2 = uk_2 \operatorname{ctg} \theta + k_2 w, \quad (7.2.4)$$

но  $d/ds = d/d\theta \cdot d\theta/ds = k_1(d/d\theta)$ , тогда

$$\varepsilon_1 = k_1 \left( \frac{du}{d\theta} + w \right), \quad \varepsilon_2 = k_2 (u \operatorname{ctg} \theta + w); \quad (7.2.5)$$

закон Гука для ортотропного материала:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \varepsilon_1 + \frac{E_1\nu_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \varepsilon_2, \\ \sigma_{22} &= \frac{E_2\nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \varepsilon_1 + \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \varepsilon_2,\end{aligned}\quad (7.2.6)$$

$$E_1\nu_{12} = E_2\nu_{21}, \quad E_2 = nE_1, \quad \nu_{12} = n\nu_{21};$$

связь между деформациями и напряжениями:

$$\varepsilon_1 = (\sigma_{11} - \nu_{21}\sigma_{22})/E_1, \quad \varepsilon_2 = (\sigma_{22} - \nu_{12}\sigma_{11})/E_2; \quad (7.2.7)$$

главные радиусы кривизны эллипсоида вращения с полуосями  $a, b$ :

$$\begin{aligned}R_1 &= R_0\nu^3, \quad R_2 = R_0\nu, \quad R_0 = a^2/b, \\ m &= a^2/b^2 - 1, \quad \nu = (1 + m \sin^2 \theta)^{-0.5};\end{aligned}\quad (7.2.8)$$

$a > b, m > 0$  — сплюснутый эллипсоид;  $a = b, m = 0$  — сфера;  $a < b, m < 0$  — вытянутый эллипсоид;  $b$  — полуось вдоль оси вращения.

С учетом (7.2.5)–(7.2.8) получим [31]

$$u = t \sin \theta, \quad w = -t \cos \theta + q[(2 - \nu_{12})\nu^2 - 1]/E_2, \quad (7.2.9)$$

где

$$q = pa^2(1 + m)/(2h), \quad (7.2.10)$$

а функция  $t(\theta)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{q}{E_2} \left[ \frac{1}{\sin \theta} + 2(\nu_{12} - 1) \frac{\nu^2}{\sin \theta} + (1 - 2\nu_{21})n \frac{\nu^4}{\sin \theta} \right]. \quad (7.2.11)$$

При  $m > 0$  решение уравнения (7.2.11) имеет вид

$$\begin{aligned}t(\theta) &= \frac{q}{E_2} \left[ (n-1) \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + n(1-2\nu_{21}) \frac{m}{2(1+m)} \nu^2 \cos \theta + \sqrt{\frac{m}{1+m}} \times \right. \\ &\times \left. \frac{n(3+2m-2\nu_{21})-4(1+m)}{4(1+m)} \ln \frac{\sqrt{1+m} + \sqrt{m} \cos \theta}{\sqrt{1+m} - \sqrt{m} \cos \theta} \right] + C,\end{aligned}\quad (7.2.12)$$

при  $m < 0$  оно будет

$$\begin{aligned}t(\theta) &= \frac{q}{E_2} \left[ (n-1) \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + n(1-2\nu_{21}) \frac{m}{2(1+m)} \nu^2 \cos \theta - \right. \\ &- \left. \sqrt{\frac{-m}{1+m}} \frac{n(3+2m-2\nu_{21})-4(1+m)}{2(1+m)} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{-m}{1+m}} \cos \theta \right) \right] + C.\end{aligned}\quad (7.2.13)$$

В частности, из (7.2.9), (7.2.12) получается решение для изотропного сплюснутого эллипсоида [86], а также известное безмоментное решение для сферической оболочки.

**7.3. БОЛЬШИЕ ПРОГИБЫ И УСТОЙЧИВОСТЬ ДЛИННОЙ  
ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ  
ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАВНОМЕРНОГО ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ**

Решение задачи о больших прогибах длинной ортотропной пластинки под действием равномерно распределенной по ее поверхности нагрузки  $p$  дано в работе [2]. Здесь решается задача об устойчивости и больших прогибах упругой ортотропной длинной пологой цилиндрической панели [77]. Полученные результаты сравниваются с решением, основанным на гипотезе Кирхгофа—Лява [78].

Уравнения, описывающие большие прогибы такой панели, имеют вид (рис. 7.1, а, где  $z$  — внутренняя нормаль)

$$\frac{dT_y}{dy} = 0, \quad \frac{d^2M_y}{dy^2} + \left( k_2 + \frac{d^2w}{dy^2} \right) T_y + p = 0, \quad Q_y = \frac{dM_y}{dy}. \quad (7.3.1)$$

Здесь

$$T_y = \frac{E_2 h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \varepsilon_2, \quad M_y = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})} \kappa_2, \quad Q_y = \frac{h^3 \psi}{12},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{dv}{dy} - k_2 w + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dy} \right)^2, \quad \kappa_2 = -\frac{d^2w}{dy^2} + \frac{h^2}{10G_{23}} \frac{d\psi}{dy}; \quad (7.3.2)$$

$v, w$  — компоненты перемещения срединной поверхности;  $\psi$  — функция сдвига, через которую деформация поперечного сдвига выражается следующим образом [2]:

$$e_{23} = \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\psi}{2G_{23}}. \quad (7.3.3)$$

Из первого уравнения системы (7.3.1) получаем  $T_y = -T = \text{const}$ . Общие решения второго и третьего уравнений системы (7.3.1) запишутся в виде

$$w = C_1 \cos \lambda y + C_2 \sin \lambda y + \frac{p - k_2 T}{2T} y^2 + C_3 y + C_4,$$

$$\frac{h^3 \psi}{12} = T \lambda (-C_1 \sin \lambda y + C_2 \cos \lambda y).$$

Для дальнейшего введем безразмерные величины:

$$\xi = y/b, \quad k^* = 4b^2 k_2/h, \quad w = w/(k_2 b^2), \quad v = v/(k_2^2 b^3),$$

$$p = pb^2/(k_2 D_2), \quad \sigma_y = \sigma_y/(G_{23} \theta^*), \quad z = z/h, \quad Q_y = Q_y/(G_{23} h \theta^*) \cdot (b/h);$$

кроме того, используем обозначения:

$$D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \quad \theta^* = \frac{1}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})} \frac{E_2}{G_{23}} \left( \frac{h}{b} \right)^2,$$

$$\alpha = \frac{1}{1 + 1,2\mu^2 \theta^*}, \quad \lambda^2 = \frac{T}{\alpha D_2}, \quad \mu = \lambda b. \quad (7.3.4)$$

а. Панель с шарнирно-закрепленными краями. Константы интегрирования находятся из граничных условий шарнирного закрепления

$$v = w = 0, -\frac{d^2w}{dy^2} + \frac{h^2}{10G_{23}} \frac{d\psi}{dy} = 0 \text{ при } y = \pm b.$$

Решение задачи при указанных граничных условиях дает следующие результаты:

зависимость между безразмерными параметрами нагрузки  $p$  и сжимающего усилия  $\mu$ :

$$A \left( \frac{p}{\alpha \mu^2} - 1 \right)^2 - B \left( \frac{p}{\alpha \mu^2} - 1 \right) + C = 0, \quad (7.3.5)$$

где

$$A = \frac{1}{4\alpha^2} \left( \frac{1}{\mu^2 \cos^2 \mu} - \frac{\operatorname{tg} \mu}{\mu^3} \right) + \frac{1}{6} - \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\operatorname{tg} \mu}{\mu^3} - \frac{1}{\mu^2} \right),$$

$$B = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\operatorname{tg} \mu}{\mu^3} - \frac{1}{\mu^2} \right) - \frac{1}{3}, \quad C = \frac{4}{3} \frac{\alpha \mu^2}{(k^*)^2};$$

безразмерный прогиб панели:

$$w = \left( \frac{p}{\alpha \mu^2} - 1 \right) \left[ \frac{\cos \mu \xi - \cos \mu}{\alpha \mu^2 \cos \mu} + \frac{1}{2} (\xi^2 - 1) \right]; \quad (7.3.6)$$

безразмерное изгибное напряжение в центре панели на волокне  $z = 0,5$ :

$$\sigma_{y,0}^n = 1,5k^* \left( \frac{p}{\alpha \mu^2} - 1 \right) \left( 1 - \frac{1}{\alpha \cos \mu} + \frac{\mu^2 \theta^*}{\cos \mu} \right); \quad (7.3.7)$$

безразмерное постоянное вдоль дуги мембранное напряжение:

$$\sigma_y^m = -\alpha \mu^2; \quad (7.3.8)$$

безразмерная перерезывающая сила:

$$Q_y = \frac{\mu k^*}{4} \left( \frac{p}{\alpha \mu^2} - 1 \right) \frac{\sin \mu \xi}{\cos \mu}. \quad (7.3.9)$$

Из (7.3.5)—(7.3.9) при  $\theta^* = 0$  ( $\alpha = 1$ ) получаем решение, основанное на гипотезе Кирхгофа—Лява [78].

Соотношения (7.3.5)—(7.3.9) описывают симметричное напряженно-деформированное состояние панели. Из решения рассматриваемой задачи, основанного на гипотезе Кирхгофа—Лява [78], известно, что в панелях с параметром кривизны  $k^* > 9,04$  при некотором значении нагрузки наряду с симметричной формой прогиба оказывается возмож-

ной бесконечно близкая несимметричная форма. Эту нагрузку, называемую критической, обозначим через  $p_{кр}^H$ .

Возможность несимметричной формы потери устойчивости содержится и в решении задачи с учетом деформации сдвига, о чем свидетельствует наличие несимметричных слагаемых в выражении для  $w$ , но теперь ее реализация зависит от двух параметров, а именно от параметров  $k^*$  и  $\theta^*$ .

Условие бифуркации решения, полученное из граничных условий, будет  $\sin \mu = 0$ . Откуда наименьшее значение безразмерного сжимающего усилия  $\mu = \pi$ . Положив в соотношениях (7.3.5)–(7.3.9)  $\mu = \pi$ , найдем критические значения нагрузки, прогиба, напряжений, соответствующие заданным  $k^*$  и  $\theta^*$ , если для последних несимметричная форма потери устойчивости реализуется.

б. Панель с жесткозаделанными краями:

$$v = w = 0, \quad -\frac{dw}{dy} + \frac{h^2}{10G_{23}} \psi = 0 \quad \text{при } y = \pm b.$$

Основные результаты для панели с жесткозаделанными краями будут следующие:

зависимость между безразмерными параметрами нагрузки  $p$  и  $\mu$ :

$$A \left( \frac{p}{\alpha \mu^2} - 1 \right)^2 - B \left( \frac{p}{\alpha \mu^2} - 1 \right) + C = 0, \quad (7.3.10)$$

где

$$A = \frac{1}{4\alpha^2} \left( \frac{1}{\sin^2 \mu} - \frac{\operatorname{ctg} \mu}{\mu} \right) + \frac{1}{6} - \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{\mu^2} - \frac{\operatorname{ctg} \mu}{\mu} \right),$$

$$B = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{\mu^2} - \frac{\operatorname{ctg} \mu}{\mu} \right) - \frac{1}{3}, \quad C = \frac{4}{3} \frac{\alpha \mu^2}{(k^*)^2}; \quad (7.3.11)$$

безразмерный прогиб панели:

$$w = \left( \frac{p}{\alpha \mu^2} - 1 \right) \left[ \frac{\cos \mu \xi - \cos \mu}{\alpha \mu \sin \mu} + \frac{1}{2} (\xi^2 - 1) \right]; \quad (7.3.12)$$

безразмерное изгибное напряжение в центре на волокне  $z = 0,5$ :

$$\sigma_{y,0}^H = 1,5k^* \left( \frac{p}{\alpha \mu^2} - 1 \right) \left( 1 - \frac{\mu}{\alpha \sin \mu} + \frac{\mu^3 \theta^*}{\sin \mu} \right); \quad (7.3.13)$$

безразмерное изгибное напряжение на краю на волокне  $z = 0,5$ :

$$\sigma_{y,b}^H = 1,5k^* \left( \frac{p}{\alpha \mu^2} - 1 \right) \left( 1 - \frac{\mu \operatorname{ctg} \mu}{\alpha} + \mu^3 \theta^* \operatorname{ctg} \mu \right); \quad (7.3.14)$$

безразмерное постоянное вдоль дуги мембранное напряжение:

$$\sigma_y^M = -\alpha \mu^2; \quad (7.3.15)$$

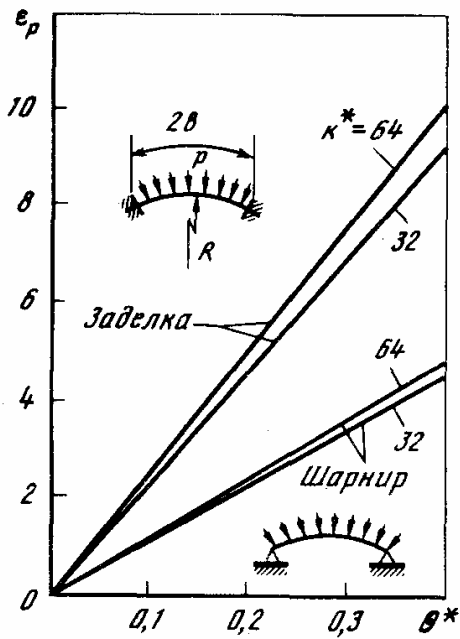


Рис. 7.2

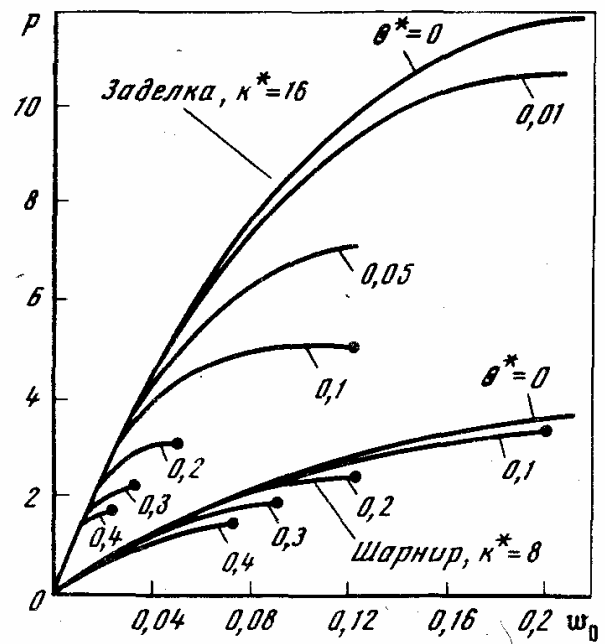


Рис. 7.3

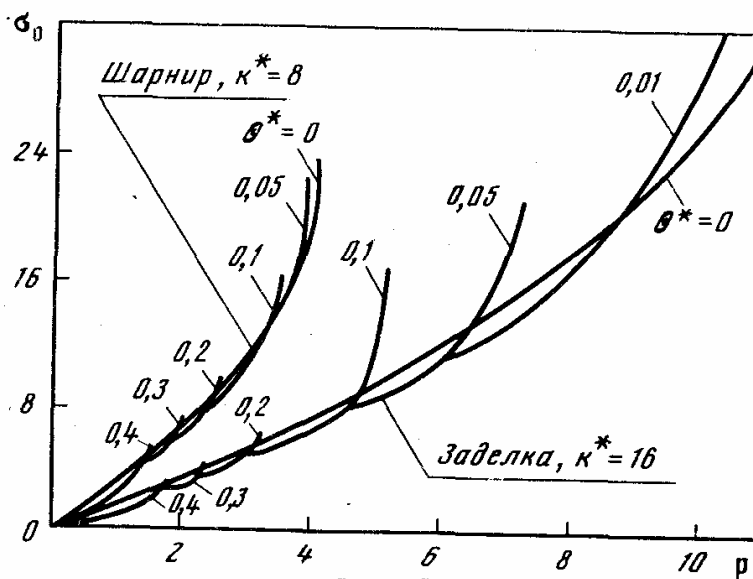


Рис. 7.4

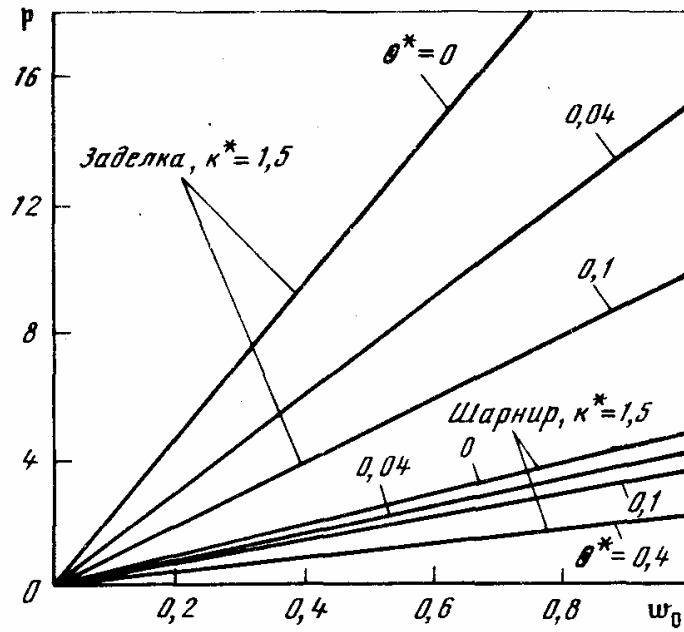
безразмерная перерезывающая сила:

$$Q_y = \frac{\mu^2 k^*}{4} \left( \frac{p}{\alpha \mu^2} - 1 \right) \frac{\sin \mu \xi}{\sin \mu} \quad (7.3.16)$$

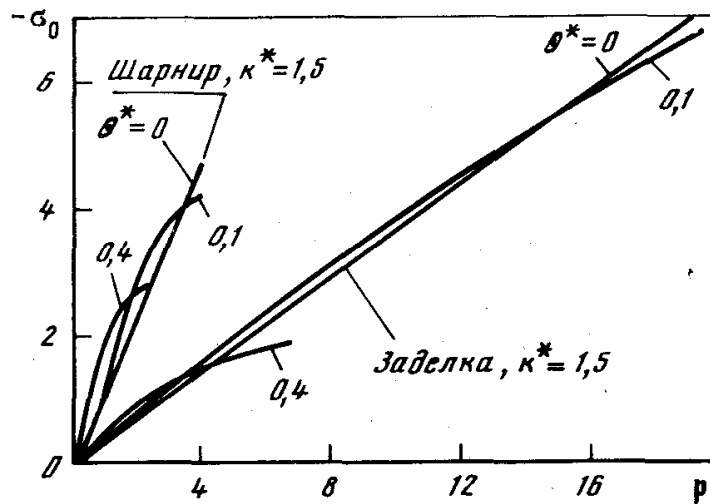
Параметр  $\mu$ , при котором возникает несимметричная форма потери устойчивости, находится из уравнения

$$\operatorname{tg} \mu = \alpha \mu. \quad (7.3.17)$$

Результаты вычислений для обоих видов граничных условий представлены ниже на рисунках. На рис. 7.2. приведены кривые  $\varepsilon_p(\theta^*) = (p_{кр}^{н,к} - p_{кр}^{н,с}) / p_{кр}^{н,с}$ , показывающие погрешность в величине критической



Р и с. 7.5



Р и с. 7.6

нагрузки несимметричной формы потери устойчивости  $p_{кр}^{н,к}$ , найденной с использованием гипотезы Кирхгофа (индекс  $k$  сверху), по отношению к соответствующей критической нагрузке  $p_{кр}^{н,с}$ , полученной с учетом деформации поперечного сдвига (индекс  $s$  сверху). На рис. 7.3, 7.4 приведены кривые  $p(w_0)$ ,  $\sigma_0(p)$  для панели с  $k^* = 8$  при шарнирном закреплении и  $k^* = 16$  при заделке, а на рис. 7.5, 7.6 аналогичные кривые для панелей с  $k^* = 1,5$ .

Из рис. 7.2 видно, что погрешность  $\varepsilon_p$  линейно зависит от параметра  $\theta^*$ , причем в случае условий заделки эта погрешность примерно в 2 раза больше, чем в случае шарнирного закрепления. Точки на рис. 7.3 соответствуют моменту потери устойчивости панелью по несимметричной форме.



Из рис. 7.3—7.6 видно, что при малых прогибах в отличие от пластины, для которой наибольшая поправка при отказе от гипотезы Кирхгофа—Лява получается в прогибах, в то время как поправка в напряжениях обычно мала [2], в случае цилиндрической панели при рассматриваемых здесь граничных условиях и достаточно больших  $k^*$  мы имеем обратную картину, т.е. поправка в напряжениях в несколько раз превосходит поправку в прогибах. Поправка в прогибах увеличивается с ростом нагрузки. Для панелей с малым параметром кривизны  $k^* = 1,5$  картина влияния деформации поперечного сдвига на прогибы и напряжения напоминает случай плоской пластины.

#### 7.4. БОЛЬШИЕ ПРОГИБЫ И УСТОЙЧИВОСТЬ ДЛИННОЙ ПОЛОГОЙ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛОКАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

Рассмотрим цилиндрический изгиб длинной пологой упругой ортотропной круговой панели под действием нагрузки, равномерно распределенной по линии, параллельной длинным сторонам (см. рис. 7.1, б, з — внутренняя нормаль) [40]. Задача описывается соотношениями (7.3.1)—(7.3.3), где с учетом (7.1.11), (7.1.12)

$$p = Q\delta(y - a).$$

На длинных сторонах панели  $y = 0, L$  ставятся обобщенные граничные условия

$$w = \pm\alpha Q_y, \quad v = \pm\gamma T_y, \quad \frac{dw}{dy} - \frac{h^2\psi}{10G_{23}} = \pm\beta M_y, \quad (7.4.1)$$

при  $y = 0$  (знак плюс) и  $y = L$  (знак минус), где  $\alpha, \beta, \gamma$  — коэффициенты пропорциональности, варьируя которые можно изменять характер и степень податливости опор: при  $\alpha = 0, \beta = \infty, \gamma = 0$  получим шарнирное закрепление, при  $\alpha = \beta = \gamma = 0$  — жесткую заделку и т.д.

Из (7.3.1) следуют

$$T_y = -T = \text{const} \quad (7.4.2)$$

и уравнение

$$\frac{d^4 w}{dy^4} + \lambda^2 \frac{d^2 w}{dy^2} = -k_2 \lambda^2 + \frac{Q\delta(y-a)}{sD_2} - QF \frac{d^2 \delta(y-a)}{dy^2}, \quad (7.4.3)$$

где

$$D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad \lambda^2 = \frac{T}{SD_2}, \quad S = 1 - \frac{6T}{5hG_{23}}, \quad F = \frac{6}{5hSG_{23}}.$$

В теории, основанной на гипотезе Кирхгофа—Лява ( $G_{23} = \infty$ ), получим  $S = 1, F = 0$ . Введем безразмерные величины и некоторые обозначения:

$$\xi = y/L, \quad z = z/h, \quad n = a/L, \quad k^* = k_2 L^2/h, \quad w = w/(k_2 L^2), \\ v = v/(k_2 L^3), \quad \mu = \lambda L, \quad Q = QL/(k_2 D_2), \quad Q_y = Q_y L/(k_2 D_2), \quad (7.4.4)$$

$$\sigma_y = \sigma_y h L^2 / D_2, \quad \psi^* = \psi h^2 L^3 / D_2, \quad \theta = 1 / [12(1 - \nu_{12} \nu_{21})] (E_2 / G_{23}) (h / L)^2,$$

$$S = 1 / (1 + 1,2 \mu^2 \theta), \quad M_y = M_y / (k_2 D_2).$$

Общее решение уравнения (7.4.3) будет

$$w = A_1 + A_2 \xi + A_3 \sin \mu \xi + A_4 \cos \mu \xi - 0,5 \xi^2 + Q e(\xi - n) \times \\ \times \left[ \frac{\xi - n}{S \mu^2} + \sin \mu(n - \xi) / (S^2 \mu^3) \right], \quad (7.4.5)$$

где  $A_1, A_2, A_3, A_4$  — константы интегрирования.

Приведем выражения некоторых основных величин: перерезывающее усилие:

$$Q_y = S \mu^3 (A_3 \cos \mu \xi - A_4 \sin \mu \xi) - \frac{Q e(\xi - n)}{S} \cos \mu(\xi - n); \quad (7.4.6)$$

поворот срединной поверхности:

$$\frac{dw}{d\xi} = A_2 - \xi + \mu (A_3 \cos \mu \xi - A_4 \sin \mu \xi) + \\ + \frac{Q e(\xi - n)}{S \mu^2} \left[ 1 - \frac{\cos \mu(\xi - n)}{S} \right]; \quad (7.4.7)$$

изгибающий момент:

$$M_y = 1 + S \mu^2 (A_3 \sin \mu \xi + A_4 \cos \mu \xi) + \frac{Q e(\xi - n)}{S \mu} \sin \mu(n - \xi); \quad (7.4.8)$$

мембранное напряжение:

$$\sigma_y^M = -S \mu^2; \quad (7.4.9)$$

изгибное напряжение на волокне  $z = 0,5$ :

$$\sigma_y^H = 6k^* (1 - S \theta \mu^2) \left[ \mu^2 (A_3 \sin \mu \xi + A_4 \cos \mu \xi) + \frac{Q e(\xi - n)}{\mu S^2} \sin \mu(n - \xi) \right] + \\ + 6k^* \left[ \frac{\theta}{5S} Q \delta(\xi - n) - 1 \right]. \quad (7.4.10)$$

Из формул (7.4.5)—(7.4.10) видно, что в полученном решении прогиб и изгибающий момент особенностей в точке  $\xi = n$  не имеют; поворот  $dw/d\xi$  терпит разрыв, который приводит к скачку в величине перерезывающего усилия, равному  $Q/S$  вместо  $Q$  по теории Кирхгофа—Лява; изгибное напряжение имеет особенность порядка  $\delta(\xi - n)$  в месте приложения нагрузки  $\xi = n$ .

Константы  $A_i$  определяются из условий (7.4.1). Если обозначить

$$a_1 = \alpha S \mu^3 (1 + \cos \mu) - S \mu + \sin \mu, \quad a_2 = \cos \mu - 1 + \beta S \mu^2 - \alpha S \mu^3 \sin \mu,$$

$$a_3 = S \mu (\cos \mu - 1) + \beta S \mu^2 \sin \mu, \quad a_4 = \beta S \mu^2 (1 + \cos \mu) - S \mu \sin \mu,$$

$$\Delta = a_1 a_4 - a_2 a_3, \quad g_1 = \frac{\alpha}{S} \cos \mu(n-1) + \frac{\sin \mu(1-n)}{S^2 \mu^3} - \frac{1-n}{S \mu^2},$$

$$g_2 = \frac{\cos \mu(n-1) - 1}{S \mu^2} + \frac{\beta}{S \mu} \sin \mu(1-n), \quad g_3 = (g_1 a_4 - a_2 g_2) / \Delta; \quad (7.4.11)$$

$$g_4 = (0,5 - \beta) / \left( \beta S \mu^2 \operatorname{ctg} \frac{\mu}{2} - S \mu \right), \quad g_5 = (a_1 g_2 - a_3 g_1) / \Delta,$$

$$g_6 = (0,5 - \beta) / \left( \beta S \mu^2 - S \mu \operatorname{tg} \frac{\mu}{2} \right), \quad g_7 = -S \mu g_3 + \beta S \mu^2 g_5,$$

$$g_8 = -g_5 + \alpha S \mu^3 g_3, \quad g_9 = -g_6 + \alpha S \mu^3 g_4, \quad \alpha = \alpha D_2 / L^3,$$

$$\beta = \beta D_2 / L, \quad \gamma = \gamma D_2 / (L h^2),$$

то

$$A_1 = g_8 Q + g_9, \quad A_2 = g_7 Q + 0,5, \quad A_3 = g_3 Q + g_4, \quad A_4 = g_5 Q + g_6.$$

Основное уравнение, связывающее параметр нагрузки  $Q$  с остальными параметрами, имеет вид

$$A Q^2 + B Q + C = 0, \quad (7.4.12)$$

где

$$A = \frac{g_7^2}{2} + \frac{\mu^2}{2} \left[ g_3^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{\sin 2\mu}{4\mu} \right) + g_3 g_5 \frac{\cos 2\mu - 1}{2\mu} + g_5^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{\sin 2\mu}{4\mu} \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[ \frac{1-n}{\mu^4 S^2} + \frac{1}{\mu^4 S^4} \left( \frac{\sin 2\mu(1-n)}{4\mu} + \frac{1-n}{2} \right) - \frac{2}{\mu^5 S^3} \sin \mu(1-n) \right] +$$

$$+ g_3 g_7 \sin \mu + g_5 g_7 (\cos \mu - 1) + g_7 \left( \frac{1-n}{S \mu^2} - \frac{\sin \mu(1-n)}{S^2 \mu^3} \right) +$$

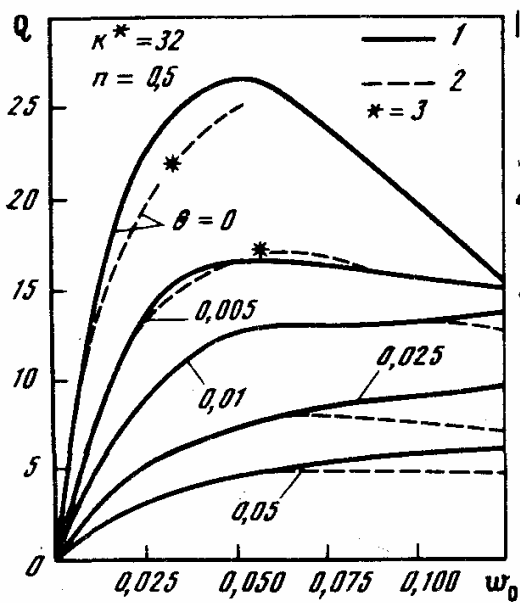
$$+ \frac{g_3}{S \mu^2} (\sin \mu - \sin \mu n) - \frac{g_5}{S \mu^2} (\cos \mu n - \cos \mu) - \frac{1}{2\mu S^2} \left\{ g_3 [(1-n) \cos \mu n + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos \mu}{\mu} \sin \mu(1-n)] - g_5 \left[ (1-n) \sin \mu n + \frac{\sin \mu}{\mu} \sin \mu(1-n) \right] \right\}, \quad (7.4.13)$$

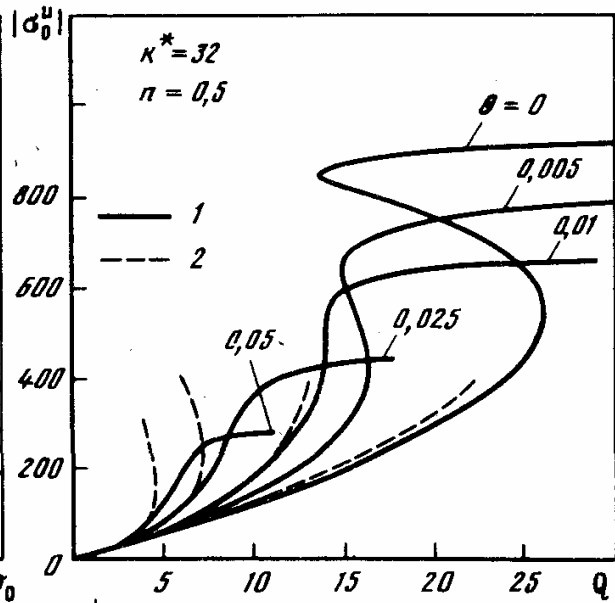
$$B = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \mu(1-n)}{S^2 \mu^3} - \frac{1-n}{S \mu^2} \right) - g_8 - \frac{1}{2} (g_3 \sin \mu + g_5 (1 + \cos \mu) + g_7) +$$

$$+ \frac{g_6}{S \mu^2} + \mu^2 \left[ g_3 g_4 \left( \frac{1}{2} + \frac{\sin 2\mu}{4\mu} \right) + (g_4 g_5 + g_3 g_6) \frac{\cos 2\mu - 1}{4\mu} + g_5 g_6 \left( \frac{1}{2} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\sin 2\mu}{4\mu} \right) \right] - \frac{1}{S \mu^2} (g_4 \sin \mu n + g_6 \cos \mu n) - \frac{1}{2\mu S^2} [g_4 ((1-n) \cos \mu n +$$



Р и с. 7.7



Р и с. 7.8

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\cos \mu}{\mu} \sin \mu (1-n) \Bigg) = g_6 \left( (1-n) \sin \mu n + \frac{\sin \mu}{\mu} \sin \mu (1-n) \right) \Bigg], \\
 C = & \frac{S \mu^2}{k^{*2}} \left( \frac{1}{12} + 2\gamma \right) - \frac{1}{24} - g_6 - g_9 + \frac{\mu^2}{2} \left[ g_4^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{\sin 2\mu}{4\mu} \right) + \right. \\
 & \left. + g_4 g_6 \frac{\cos 2\mu - 1}{2\mu} + g_6^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{\sin 2\mu}{4\mu} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Как видно из (7.4.11), при некоторых значениях параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\theta$ ,  $\mu$  величина  $\Delta$  может обратиться в нуль, а коэффициенты  $A_i$  при этом становятся бесконечными. Условие  $\Delta = 0$ , определяющее особые точки кривой  $Q(\mu)$ , распадается на два:

$$\operatorname{tg} \frac{\mu}{2} = \mu \beta, \operatorname{tg} \frac{\mu}{2} = (2\alpha S \mu^3 - S \mu) / (\beta S \mu^2 - 2), \quad (7.4.14)$$

причем первое из них соответствует кратным корням уравнения (7.4.12), а второе является условием бифуркации решения.

Приведенное здесь решение при  $S = 1$  совпадает с решением [64].

Для граничных условий шарнирного закрепления и жесткой заделки проведены вычисления. На рис. 7.7 приведены кривые зависимости безразмерной нагрузки  $Q$  от безразмерного прогиба в центре  $w_0$  для ряда значений параметра  $\theta$ , при этом кривые  $\theta = 0$  соответствуют решению по теории Кирхгофа—Лява (1 — заделка, 2 — шарнир, 3 — точка бифуркации). На рис. 7.8 приведены значения изгибного напряжения  $\sigma_0^{\text{II}}$  на волокне  $z = 0,5$  в непосредственной близости от линии приложения нагрузки (1 — заделка, 2 — шарнир).

Отметим, что работе [44] дано обобщение задачи, рассмотренной в данном разделе, на случай, когда панель находится под действием внешнего давления, равномерно распределенного по части ширины панели.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Айнола Л. Нелинейная теория типа Тимошенко для упругих оболочек // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1965. Т. 14, № 3. С. 337—344.
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин: Прочность, устойчивость и колебания. М.: Наука, 1987. 360 с.
3. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
4. Бакирова А.З. Об устойчивости замкнутых вытянутых оболочек вращения под действием равномерного внешнего давления // Труды семинара по теории оболочек / Казан. физ.-техн. ин-т. 1973, № 3. С. 266—277.
5. Бакирова А.З., Суркин Р.Г. Об устойчивости эллипсоидальных и сфероидальных оболочек вращения при внешнем равномерно распределенном давлении // Прочность и устойчивость оболочек: Тр. семинара / Казан. физ.-техн. ин-т. 1977. № 9. С. 5—16.
6. Бакирова А.З., Суркин Р.Г. Экспериментальное исследование устойчивости вытянутых оболочек вращения при внешнем равномерном давлении // Там же. 1980. № 13. С. 142—151.
7. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1975. 632 с.
8. Болотин В.В., Григолюк Э.И. Устойчивость упругих и неупругих систем // Механика в СССР за 50 лет. М.: Наука, 1972. Т. 3. С. 325—363.
9. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 376 с.
10. Вайнберг Д.В., Гоцуляк Е.А., Гуляев В.И. Устойчивость физически нелинейных тонкостенных оболочек при больших перемещениях // Теория оболочек и пластин: Тр. VIII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1973. С. 104—109.
11. Валишвили Н.В. Об одном алгоритме решения нелинейных краевых задач // ПММ. 1968. Т. 32, № 6. С. 1089—1091.
12. Валишвили Н.В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. М.: Машиностроение, 1976. 278 с.
13. Валишвили Н.В. О выборе параметра при численном решении краевых задач статики гибких оболочек // Прикл. механика. 1984. № 11. С. 115—118.
14. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
15. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. М.: Гостехтеоретиздат, 1956. 419 с.
16. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
17. Ворович И.И., Зипалова В.Ф. К решению нелинейных краевых задач теории упругости методом перехода к задаче Коши // ПММ. 1965. Т. 29, № 5. С. 894—901.
18. Ворович И.И., Минакова Н.И. Проблема устойчивости и численные методы в теории сферических оболочек // Механика твердых деформируемых тел. М.: ВИНТИ, 1974. С. 5—87 (Итоги науки и техники; Т. 7).
19. Галеркин Б.Г. К теории упругой цилиндрической оболочки // ДАН СССР. 1934. Т. 4, № 5/6. С. 270—272.
20. Галеркин Б.Г. Равновесие упругой сферической оболочки // ПММ. 1942. Т. 6, № 6. С. 487—496.
21. Галимов К.З. Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975. 326 с.
22. Галимов К.З. К нелинейной теории тонких оболочек типа Тимошенко // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 4. С. 155—166.
23. Галин М.П. Распространение упругопластических волн изгиба и сдвига при осесимметричной деформации оболочек вращения // Инж. сб. 1961. № 31. С. 135—170.
24. Галиньш А.К. Расчет пластин и оболочек по уточненным теориям // Исслед. по теории пластин и оболочек. Казань. 1967. № 5. С. 66—92; 1970. № 6/7. С. 23—64.

25. Ганеева М.С. О некоторых приближениях при решении задач изгиба пластин и оболочек с учетом физической и геометрической нелинейностей // Там же. 1972. № 9. С. 270—278.
26. Ганеева М.С. Цилиндрический изгиб длинной круговой оболочки под действием нормального давления // Тр. семинара по теории оболочек / Казан. физ.-техн. ин-т. 1974. № 5. С. 57—65.
27. Ганеева М.С. Основные нелинейные соотношения уточненной теории многослойных ортотропных нетонких оболочек // Статика и динамика оболочек: Тр. семинара / Казан. физ.-техн. ин-т. 1977. № 8. С. 5—18.
28. Ганеева М.С. Неосесимметричная деформация многослойной ортотропной оболочки вращения средней толщины // Прочность и устойчивость оболочек: Тр. семинара / Казан. физ.-техн. ин-т. 1977. № 9. С. 31—41.
29. Ганеева М.С. Уравнения нейтрального равновесия многослойной тонкой оболочки вращения // Исследования по теории оболочек: Тр. семинара / Казан. физ.-техн. ин-т. 1978. № 10. С. 37—52.
30. Ганеева М.С. Уравнения нейтрального равновесия многослойной упруго-пластической оболочки вращения средней толщины // Там же. С. 53—65.
31. Ганеева М.С. К расчету оболочек вращения // Статика и динамика оболочек: Тр. семинара / Казан. физ.-техн. ин-т. 1979. № 12. С. 143—152.
32. Ганеева М.С. Нелинейный осесимметричный изгиб непологий оболочки вращения средней толщины // Прочность и устойчивость оболочек: Тр. семинара / Казан. физ.-техн. ин-т. 1980. № 13. С. 29—41.
33. Ганеева М.С. Расчет напряженно-деформированного состояния оболочки вращения средней толщины, замкнутой в полюсе // Исследования по теории оболочек: Тр. семинара / Казан. физ.-техн. ин-т. 1982. № 15. С. 5—14.
34. Ганеева М.С. Разложения в окрестности полюса для разрешающих функций уравнений нейтрального равновесия нетонкой оболочки вращения // Там же. 1984. № 17, ч. 1. С. 57—65.
35. Ганеева М.С., Алексеева О.В. О применении методов численного интегрирования к уравнениям непологих оболочек вращения с полюсом // Тр. семинара по теории оболочек / Казан. физ.-техн. ин-т. 1975. № 6. С. 231—240.
36. Ганеева М.С., Алексеева О.В. Об одном алгоритме численного решения геометрически нелинейных осесимметричных задач непологих оболочек вращения // Исследования по теории оболочек: Тр. семинара / Казан. физ.-техн. ин-т. 1976. № 7. С. 120—127.
37. Ганеева М.С., Алексеева О.В. Численное исследование неосесимметричной потери устойчивости упругих оболочек вращения // Прочность и устойчивость оболочек: Тр. семинара / Казан. физ.-техн. ин-т. 1980. № 13. С. 89—99.
38. Ганеева М.С., Косолапова Л.А. Большие прогибы непологих оболочек вращения // Исследования по нелинейным задачам теории пластин и оболочек. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1974. С. 23—33.
39. Ганеева М.С., Косолапова Л.А. Большие прогибы оболочки вращения с полюсом при учете деформации поперечного сдвига // Исследования по теории оболочек: Тр. семинара / Казан. физ.-техн. ин-т. 1982. № 15. С. 15—26.
40. Ганеева М.С., Корнишин М.С. Большие прогибы и устойчивость длинной пологий ортотропной цилиндрической панели под действием локальной нагрузки // Исслед. по теории пластин и оболочек. Казань. 1972. № 9. С. 283—293.
41. Ганеева М.С., Корнишин М.С. Об одном варианте основных соотношений для оболочек с учетом деформации поперечного сдвига // Там же. 1973. № 10. С. 260—271.
42. Ганеева М.С., Малахов В.Г. Большие осесимметричные прогибы и устойчивость упругопластической эллипсоидальной оболочки переменной толщины // Устойчивость пластин и оболочек: Материалы конф. "Нелинейные задачи теории пластин и оболочек". Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1981. С. 26—28.

43. Ганеева М.С., Олимпиаева О.В. Каноническая система уравнений нейтрального равновесия тонкой оболочки вращения переменной толщины // Тр. семинара по теории оболочек / Казан. физ.-техн. ин-т. 1974. № 4. С. 21—31.
44. Ганеева М.С., Саченкова Г.В. Большие прогибы и устойчивость длинной цилиндрической панели из ортотропного стеклопластика под действием кусочно-равномерной нагрузки // Механика полимеров. 1972. № 5. С. 829—837.
45. Ганеева М.С., Дегтярев М.Н., Косолапова Л.А. Устойчивость гибких непологих ортотропных оболочек вращения. Казань, 1983. 20 с. Деп. в ВИНТИ 02.08.83, № 4276—83.
46. Ганеева М.С., Моисеева В.Е. Большие прогибы и неосесимметричная потеря устойчивости нетонких упругопластических оболочек вращения // Исследования по теории оболочек: Тр. семинара / Казан. физ.-техн. ин-т. 1984. № 17, ч. 1. С. 66—78.
47. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // УМН. 1961. Т. 16, № 3. С. 171—174.
48. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. 2-е изд. М.: Наука, 1976. 512 с.
49. Григолюк Э.И. К расчету устойчивости пологих арок // Инж. сб. 1951. № 9. С. 177—200.
50. Григолюк Э.И. Теоретическое и экспериментальное исследование устойчивости тонких оболочек за пределом упругости // Механика: Упругость и пластичность, 1964. М.: ВИНТИ, 1966. С. 7—80.
51. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 360 с.
52. Григолюк Э.И., Мальцев В.П., Мяченков В.И., Фролов А.Н. Об одном методе решения задач устойчивости и колебаний оболочек вращения // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 1. С. 9—19.
53. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. М.: Наука, 1988. 231 с.
54. Григоренко Я.М. Об уравнениях циклически-симметричного термонапряженного состояния оболочек вращения переменной жесткости // Тепловые напряжения в элементах конструкций. Киев: Наук. думка, 1965. № 5. С. 146—156.
55. Григоренко Я.М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. Киев: Наук. думка, 1973. 228 с.
56. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Методы расчета оболочек. Т. 4. Теория оболочек переменной жесткости. Киев: Наук. думка, 1981. 544 с.
57. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Статика анизотропных толстостенных оболочек. Киев: Вища шк., 1985. 190 с.
58. Григоренко Я.М., Крюков Н.Н. К осесимметричной деформации оболочек вращения средней толщины // Прикл. механика. 1969. № 7. С. 20—27.
59. Григоренко Я.М., Крюков Н.Н. Численное решение задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами. Киев: Наук. думка, 1988. 216 с.
60. Григоренко Я.М., Судавцова Г.К. Оболочки вращения сферического класса при локальных нагрузках в полюсе // Прикл. механика. 1973. № 6. С. 24—30.
61. Гудрамович В.С. Устойчивость упругопластических оболочек. Киев: Наук. думка, 1987. 216 с.
62. Гуляев В.И., Баженов В.А., Лизунов П.П. Неклассическая теория оболочек и ее приложение к решению инженерных задач. Львов: Вища шк., 1978. 192 с.
63. Драсдейл В.Х., Зак Э.Р. Задачи расчета толстостенных оболочек // Тонкостенные оболочечные конструкции. М.: Машиностроение, 1980. С. 455—466.
64. Ефимов А.С. Устойчивость пологой круговой арки под действием различных локальных нагрузок // Исслед. по теории пластин и оболочек. Казань. 1964. № 2. С. 79—93.
65. Зубчанинов В.Г. О современных проблемах неупругой устойчивости // Устойчивость в механике деформируемого твердого тела: Материалы Всесоюз. симпоз. Калинин: Калинин. ун-т, 1981. С. 12—60.

66. *Ильюшин А.А.* Устойчивость пластинок и оболочек за пределом упругости // ПММ. 1944. Т. 8. № 5. С. 337—360.
67. *Ильюшин А.А.* Пластичность. М.; Л.: Гостехтеоретиздат. 1948. 376 с.
68. *Калекин О.Ю.* К приближенной теории оболочек средней толщины // Прикл. механика. 1965. № 12. С. 29—37.
69. *Кантор Б.Я., Катаржнов С.И.* К теории упругопластических оболочек средней толщины // ДАН УССР. Сер. А. 1975. № 1. С. 52—54.
70. *Кантор Б.Я., Науменко В.В.* Об одном варианте теории оболочек средней толщины // Пробл. машиностроения. 1982. № 12. С. 2—7.
71. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1952. 696 с.
72. *Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н.* Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. М.: Машиностроение, 1975. 376 с.
73. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956. 324 с.
74. *Китовер К.А.* Применение степенных рядов к задачам статки оболочек вращения // Соппротивление материалов и теория сооружений. Киев: Будівельник, 1973. № 21. С. 132—140.
75. *Климанов В.И., Чупин В.В.* Статика и устойчивость гибких неоднородных оболочечных систем. Красноярск: Изд-во Краснояр. ун-та, 1986. 182 с.
76. *Корнишин М.С.* Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения. М.: Наука, 1964. 192 с.
77. *Корнишин М.С., Ганеева М.С.* Устойчивость и большие прогибы ортотропной длинной цилиндрической панели под действием равномерного внешнего давления // Теория пластин и оболочек. М.: Наука, 1971. С. 161—166.
78. *Корнишин М.С., Муштари Х.М.* Устойчивость бесконечно длинной пологой цилиндрической панели под действием нормального равномерного давления // Изв. Казан. фил. АН СССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1955, № 7. С. 36—50.
79. *Корнишин М.С., Муштари Х.М.* Об одном алгоритме решения нелинейных задач теории пологих оболочек // ПММ. 1959. Т. 23, № 1. С. 159—163.
80. *Коровайцев А.В.* Об одном алгоритме исследования состояния непологих оболочек вращения при больших осесимметричных перемещениях // Изв. вузов. Машиностроение. 1981. № 10. С. 12—15.
81. *Кривошеев Н.И., Муртазин Р.З.* Об устойчивости эллипсоидальных оболочек // Тр. семинара по теории оболочек / Казан. физ.-техн. ин-т. 1975. № 6. С. 125—129.
82. *Крылов А.Н.* Лекции о приближенных вычислениях. М.: Гостехтеоретиздат, 1954. 400 с.
83. *Курдюмов А.А.* К теории физически и геометрически нелинейных задач изгиба и устойчивости пластин и оболочек // Тр. Ленингр. кораблестроит. ин-та. 1961. № 34. С. 65—75.
84. *Лепик Ю.Р.* Равновесие упругопластических и жесткопластических пластин и оболочек // Инж. журн. 1964. Т. 4, № 3. С. 601—616.
85. *Лепик Ю.Р., Лухт Л.Я.* О влиянии сжимаемости на изгиб упругопластических пластинок // Теория оболочек и пластин: Тр. IV Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1964. С. 634—640.
86. *Макаренков А.Г., Бабяк В.С.* Напряженно-деформированное состояние возле отверстия в эллипсоидальной оболочке // Прикл. механика. 1971. № 10. С. 37—41.
87. *Муштари Х.М.* Теория изгиба плит средней толщины // Изв. АН СССР. ОТН. 1959. № 2. С. 107—113.
88. *Муштари Х.М., Галимов К.З.* Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Таткнигоиздат, 1957. 433 с.
89. *Муштари Х.М., Терегулов И.Г.* Теория пологих ортотропных оболочек средней толщины // Изв. АН СССР. ОТН. 1959. № 6. С. 60—67.
90. *Мяченков В.И., Юсов В.Н.* Деформация оболочечных конструкций из нелинейно-упругого материала // Строит. механика и расчет сооружений. 1981. № 1. С. 23—27.



91. *Новицкий В.В.* Дельта-функция и ее применение в строительной механике // Расчет пространственных конструкций. М.: Госстройиздат, 1962. № 8. С. 207—244.
92. *Новичков Ю.Н.* Нелинейная теория и устойчивость толстых многослойных оболочек // ПММ. 1973. Т. 37, № 3. С. 532—543.
93. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. М.: Гостехтеоретиздат, 1948. 212 с.
94. *Новожилов В.В.* Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
95. *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек. 2-е изд. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.
96. *Паймушин В.Н.* Соотношения теории тонких оболочек типа Тимошенко в криволинейных координатах поверхности отсчета // ПММ. 1978. Т. 42, № 4. С. 753—758.
97. *Палий О.М., Спиро В.Е.* Анизотропные оболочки в судостроении: Теория и расчет. Л.: Судостроение, 1977. 392 с.
98. *Пикуль В.В.* Теория и расчет слоистых конструкций. М.: Наука, 1985. 184 с.
99. *Погорелов А.В.* Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек: Науч. сообщ. в Президиуме АН СССР // Вестн. АН СССР. 1980. № 9. С. 17—20.
100. Прочность, устойчивость, колебания: Справочник / Под ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. Т. 2. 464 с.
101. *Работнов Ю.Н.* Локальная устойчивость оболочек // ДАН СССР. Н.С. 1946. Т. 52, № 2. С. 111—112.
102. *Рикс Е.* Применение метода Ньютона к задаче упругой устойчивости // Прикл. механика. 1972. Т. 39, № 4. С. 204—209 (амер.).
103. *Родионова В.А.* Модифицированная теория пластин и оболочек средней толщины // Вопр. механики и процессов управления. Л. 1989. № 11. С. 129—133.
104. *Саченков А.В., Красновский И.Ю.* Изгиб цилиндрических оболочек и плит с учетом поперечной деформации // Изв. вузов. Математика. 1981. № 11. С. 49—57.
105. *Свирский И.В.* Методы типа Бубнова—Галеркина и последовательных приближений. М.: Наука, 1968. 200 с.
106. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. М.: Гостехтеоретиздат, 1956. Т. 3. ч. 2. 674 с.
107. *Срубщик Л.С.* Выпучивание и послекритическое поведение оболочек. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1981. 96 с.
108. *Столяров Н.Н.* Об одном эффективном методе решения геометрически и физически нелинейных задач теории оболочек // Прикл. механика. 1977. № 11. С. 126—129.
109. *Сухова Н.А.* Граничные условия в полюсе оболочки вращения при расчете на ЭВМ // Изв. вузов. Машиностроение. 1981. № 5. С. 19—23.
110. *Терентьев В.Ф.* О расчете осесимметричной деформации оболочек вращения из нелинейно-упругого материала с учетом изменения формы срединной поверхности // Изв. ВНИИГидротехники. 1969. Т. 91. С. 239—253.
111. *Терентьев В.Ф., Кабриц С.А., Господариков А.П.* О применении итерационных методов линеаризации в нелинейных одномерных задачах статической устойчивости упругих систем // Механика деформируемого твердого тела. Куйбышев, 1977. С. 39—42.
112. *Тимошенко С.П.* Устойчивость упругих систем. М.: Гостехтеоретиздат, 1955. 568 с.
113. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.
114. *Толоконников Л.А.* О влиянии сжимаемости материалов на упругопластическую устойчивость пластин и оболочек // Вестн. МГУ. Сер. физ.-мат. и естеств. наук. 1949. № 6. С. 35—44.
115. *Феодосьев В.И.* Применение шагового метода к анализу устойчивости сжатого стержня // ПММ. 1963. Т. 27, № 5. С. 833—841.
116. *Фролов А.Н.* Нелинейная деформация оболочек вращения // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 1. С. 157—162.

117. *Чепига В.Е.* Линеаризованные уравнения устойчивости толстых многослойных оболочек // Там же. 1971. № 2. С. 33—41.
118. *Чернина В.С.* Статика тонкостенных оболочек вращения. М.: Наука, 1968. 456 с.
119. *Чернышенко И.С.* К расчету осесимметричных оболочек вращения переменной толщины с учетом физической и геометрической нелинейностей // Теория пластин и оболочек. М.: Наука, 1971. С. 279—284.
120. *Шаманский В.Е.* Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. Ч. 1. Киев: Изд-во АН УССР, 1963. 196 с.; Ч. 2. Киев: Наук. думка, 1966. 244 с.
121. *Шаповалов Л.А.* Об одном простейшем варианте уравнений геометрически нелинейной теории тонких оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1968. № 1. С. 56—62.
122. *Шевелев Л.П.* Основы теории устойчивости оболочек за пределом упругости. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1982. 166 с.
123. *Юсов В.Н.* Экспериментальная проверка возможности применения модели нелинейно-упругого материала при расчетах на устойчивость за пределами упругости // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1986. № 27. С. 208—214.
124. *Almroth B.O., Bushnell D.* Computer analysis of various shells of revolution // AIAA Pap. 1968. N. 10.
125. *Bercha F.G., Glockner P.G.* Numerical analysis of thick shells of revolution // J. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng. 1973. Vol. 99, N 5. P. 1053—1072.
126. *Bushnell D.* Nonlinear axisymmetric behaviour of shells of revolution // AIAA J. 1967. Vol. 5, N 3. P. 432—439.
127. *Bushnell D.* Plastic buckling of various shells // Trans. ASME: J. Pressure Vessel Technol. 1982. Vol. 104. N 2. P. 51—72.
128. *Eberlein P.J., Boothroyd J.* Solution to the eigenproblem by a norm reducing Jacobi type method // Numer. Math. 1968. Bd. 11. H. 1. S. 1—12.
129. *Faraji S., Archer R.R.* Method of initial functions for thick shells // Intern. J. Solids and Struct. 1985. N 8. P. 851—863.
130. *Goldberg J.E., Fang Yu Kuang, Baloch M.H.* Analysis of moderately thick shells of revolution // Proc. III Canad. congr. appl. mech. Calgary, 1971. P. 243—244.
131. *Huang N.C.* Unsymmetrical buckling of thin shallow spherical shells // Trans. ASME. E. 1964. Vol. 31. N 3. P. 477—457.
132. *Hutchins G.J., Soler A. J.* Approximate elasticity solution for moderately thick shells of revolution // Ibid. 1973. Vol. 40, N 4. P. 955—960.
133. *Hyman B.J., Healey J.J.* Buckling of prolate spheroidal shells under hydrostatic pressure // AIAA J. 1967. Vol. 5., N 8. P. 1469—1477.
134. *Kalnins A.* Analysis of shells of revolution subjected to symmetrical and nonsymmetrical loads // Trans. ASME. E. 1964. Vol. 31, N 3. P. 467—476.
135. *Keller H.B.* Numerical methods for two-point boundary-value problems. Waltham (Mass.) etc.: Blaisdell, 1968. 184 p.
136. *Klosner I.M., Kempner J.* Comparison of elasticity and shell theory solution // AIAA J. 1963. Vol. 2. N 3. P. 627—630.
137. *Klosner I.M., Levine H.S.* Futher comparison of elasticity and shell theory solution // Ibid. 1966. Vol. 4. N 3. P. 467—480.
138. *Naghdi P.M.* The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic shells of revolution // Quart. Appl. Math. 1957. Vol. 15, N 1. P. 41—52.
139. *Reissner E.* On finite symmetrical deflections of thin shells of revolution // Trans. ASME. E. 1969. Vol. 36. N 2. P. 267—270.
140. *Renton J.D.* On the buckling of thick spherical shells under normal pressure // Intern. J. Solids and Struct. 1981. Vol. 17, N 2. P. 145—153.
141. *Riks E.* Progress in collapse analysis // Trans. ASME: J. Pressure Vessel Technol. 1987. Vol. 109, N 1. P. 33—41.
142. *Sanders I.* Nonlinear theories for thin shells // Quart. Appl. Math. 1963. Vol. 21, N 1. P. 21—36.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
Глава 1. ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ОСНОВНЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ ОБОЛОЧЕК СРЕДНЕЙ ТОЛЩИНЫ.....	7
1.1. Некоторые сведения из теории ортогональных криволинейных координат.....	7
1.2. Формулы для компонентов деформации и напряжений в криво- линейной ортогональной системе координат в нелинейной теории упругости .....	8
1.3. Постановка задачи для оболочки средней толщины. Основные допу- щения .....	9
1.4. Перемещения и деформации оболочки .....	11
1.5. Уравнения равновесия и граничные условия.....	13
1.6. Уравнения теории типа С.П. Тимошенко .....	20
1.7. Зависимости между напряжениями и деформациями.....	22
1.8. Выражения усилий и моментов через удлинения и изменения кри- визн.....	23
Глава 2. УРАВНЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ОБОЛОЧЕК СРЕДНЕЙ ТОЛЩИНЫ.....	26
2.1. Уравнения нейтрального равновесия .....	26
2.2. Вариации упругопластических добавок в напряжениях, усилиях и моментах .....	28
2.3. Контурный интеграл. Вариации внешних нагрузок .....	33
Глава 3. КАНОНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯ- НИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ.....	35
3.1. Основные соотношения для оболочки вращения .....	36
3.2. Нелинейный осесимметричный изгиб оболочки средней толщи- ны .....	37
3.3. Малые неосесимметричные прогибы нетонкой оболочки.....	42
3.4. Большие неосесимметричные прогибы тонкой оболочки.....	46
3.5. О граничных условиях .....	50
Глава 4. КАНОНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНО- ГО РАВНОВЕСИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ.....	51
4.1. Уравнения нейтрального равновесия многослойной тонкой упру- гой ортотропной оболочки.....	51
4.2. Уравнения нейтрального равновесия многослойной тонкой упру- гопластической изотропной оболочки.....	55
4.3. Уравнения нейтрального равновесия нетонкой многослойной оболочки .....	60
4.4. Уравнения нейтрального равновесия тонкой упругой изотропной оболочки по теории Кирхгофа—Лява .....	65

Глава 5. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ НЕПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ .....	70
5.1. Продолжение по параметру и выбор ведущего параметра при численном решении нелинейных краевых задач статики неполигих оболочек .....	70
5.2. Алгоритм численного решения осесимметричной задачи о больших прогибах упругопластической оболочки средней толщины методом линеаризации .....	72
5.3. Способы решения линеаризованных задач. Метод дополнительных функций ортогональная прогонка.....	75
5.4. Соответствие между углом $\theta$ и дугой меридиана $s$ .....	79
5.5. О поведении разрешающих функций в окрестности полюса оболочки вращения .....	80
5.6. Большие прогибы сплюснутого эллипсоидального днища с отверстием .....	84
5.7. Расчет напряженно-деформированного состояния оболочки средней толщины, замкнутой в полюсе .....	88
5.8. Неединственность решения; осесимметричная бифуркация.....	93
5.9. Большие осесимметричные прогибы и устойчивость упругопластической тонкой эллипсоидальной оболочки переменной толщины .....	95
Глава 6. НЕОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ .....	99
6.1. Алгоритмы расчета неосесимметричной потери устойчивости оболочки вращения на основе метода ортогональной прогонки .....	99
6.2. Оболочка вращения, замкнутая в полюсе.....	101
6.3. Численное исследование алгоритма расчета неосесимметричной потери устойчивости оболочки вращения.....	107
6.4. Тонкие упругие изотропные эллипсоидальные оболочки и сегменты под действием внешнего равномерного давления.....	113
6.5. Устойчивость ортотропной упругой оболочки.....	118
6.6. Устойчивость изотропной упругопластической оболочки средней толщины.....	123
Глава 7. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК, ДОПУСКАЮЩИЕ ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ .....	134
7.1. Изгиб длинной цилиндрической оболочки.....	134
7.2. Безмоментное решение для ортотропной эллипсоидальной оболочки вращения .....	141
7.3. Большие прогибы и устойчивость длинной ортотропной цилиндрической панели под действием равномерного внешнего давления..	143
7.4. Большие прогибы и устойчивость длинной пологой ортотропной цилиндрической панели под действием локальной нагрузки.....	148
ЛИТЕРАТУРА.....	152

# CONTENTS

INTRODUCTION .....	3
Chapter 1. ON ONE VERSION OF BASIC RELATIONSHIPS OF SHELLS OF MODERATE THICKNESS .....	7
1.1. Some information from the theory of orthogonal curvilinear co-ordinates .....	7
1.2. Formulas for strain and stress components in curvilinear orthogonal frame in non-linear elasticity theory .....	8
1.3. Statement of a problem for shells of moderate thickness. Basic assumptions.....	9
1.4. Displacements and strains of shell.....	11
1.5. Equilibrium equations and boundary conditions.....	13
1.6. Equations of the theory S.P. Timoshenko's type.....	20
1.7. Dependences between stresses and strains .....	22
1.8. Stress resultants expressions for in terms of elongations and curvatures changes .....	23
Chapter 2. EQUATIONS OF INDIFFERENT EQUILIBRIUM OF SHELLS OF MODERATE THICKNESS.....	26
2.1. Equations of indifferent equilibrium .....	26
2.2. Variations of elasto-plastic additions in stresses and stress resultants .....	28
2.3. Contour integral. Variations of external loads .....	33
Chapter 3. CANONICAL SETS OF EQUATIONS IN CALCULATION PROBLEMS OF STRESSED-STRAINED STATE OF REVOLUTION SHELLS .....	35
3.1. Main relationships for shells of revolution .....	36
3.2. Non-linear axially-symmetric bending of shells of moderate thickness .....	37
3.3. Small non-axially symmetric deflections of non-thin shell .....	42
3.4. Large non-axially symmetric deflections of thin shell.....	46
3.5. On boundary conditions.....	50
Chapter 4. CANONICAL SETS OF EQUATIONS OF INDIFFERENT EQUILIBRIUM OF REVOLUTION SHELLS.....	51
4.1. Equations of indifferent equilibrium of multilayer thin elastic orthotropic shell .....	51
4.2. Equations of indifferent equilibrium of multilayer thin elasto-plastic isotropic shell .....	55
4.3. Equations of indifferent equilibrium of non-thin multilayer shell.....	60
4.4. Equations of indifferent equilibrium of thin elastic isotropic shell within Kirchhoff—Love's theory.....	65
Chapter 5. NUMERICAL SOLVING OF NON-LINEAR BOUNDARY PROBLEMS OF AXIALLY SYMMETRICAL DEFORMATION OF NON-SHALLOW SHELLS OF REVOLUTION .....	70
5.1. Continuation by using parameter and choice of leading parameter for numerical solving of non-linear boundary problems of statics of non-shallow shells .....	70
5.2. Algorithm for numerical solving of axially symmetric problem about large deflections of elasto-plastic shell of moderate thickness with linearization method.....	72
5.3. Solving ways of linearized problems. Method of additional functions, orthogonal pass .....	75
5.4. Correlation between angle $\theta$ and meridian arc $s$ .....	79

5.5. On the behaviour of solving functions in vicinity of a pole of shell of revolution .....	80
5.6. Large deflections of oblate ellipsoidal bottom with a hole.....	84
5.7. Calculation of stressed-strained state of non-thin shell, closed in a pole.....	88
5.8. Non-uniqueness of the solution. Axially symmetrical bifurcation .....	93
5.9. Large axially symmetrical deflections and stability of elasto-plastic thin ellipsoidal shell of variable thickness.....	95
<b>Chapter 6. NON-AXIALLY SYMMETRICAL BUCKLING OF SHELLS OF REVOLUTION .....</b>	<b>99</b>
6.1. Algorithm of calculation of non-axially symmetrical buckling of shells of revolution on the basis of orthogonal pass method .....	99
6.2. Revolution shell closed on a pole .....	101
6.3. Numerical research of calculation algorithm of non-axially symmetrical buckling of shell of revolution.....	107
6.4. Thin elastic isotropic ellipsoidal shells and segments under uniform external pressure.....	113
6.5. Stability of orthotropic elastic shell.....	118
6.6. Stability of isotropic elasto-plastic shell of moderate thickness.....	123
<b>Chapter 7. SOME EXACT SOLUTIONS OF PROBLEMS OF THE THEORY OF THIN ELASTIC SHELLS.....</b>	<b>134</b>
7.1. Bending of long cylindrical shell.....	134
7.2. Membrane solution for orthotropic ellipsoidal shell of revolution .....	141
7.3. Large deflections and stability of long orthotropic cylindrical panel under uniform external pressure.....	143
7.4. Large deflections and stability of long shallow orthotropic cylindrical panel under local loading .....	148
<b>REFERENCES.....</b>	<b>152</b>

Научное издание

Ганеева Музайна Саитгареевна

**ПРОЧНОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ**

*Утверждено к печати*

*Казанским физико-техническим институтом им. Е.К. Завойского  
Казанского научного центра РАН*

Заведующий редакцией *Н.Н. Прокофьева*

Редактор издательства *Н.Е. Миронова*

Художник *И.В. Монастырская*

Художественный редактор *В.Ю. Яковлев*

Технический редактор *Г.И. Астахова*

Корректор *З.Д. Алексеева*

**Набор выполнен в издательстве на компьютерной технике**

ИБ № 48425

Подписано к печати 27.01.92. Формат 60 x 90 1/16. Бумага типографская № 2  
Гарнитура Сов. Кириллица. Печать офсетная. Усл.печ.л. 10,0  
Усл.кр.-отт. 10,4. Уч.-изд.л. 9,6. Тираж 840 экз. Тип. зак. 1816

Ордена Трудового Красного Знамени издательство "Наука"  
117864 ГСП-7, Москва В-485, Профсоюзная ул., д. 90

Ордена Трудового Красного Знамени 1-я типография издательства "Наука"  
199034, Санкт-Петербург В-34, 9-я линия, 12